

PARTEA 1: Modelul dezintegrării radioactive

Dezintegrarea radioactivă este un proces care se referă la descompunerea unei substanțe cu o anumită viteză de dezintegrare într-un interval de timp dat. Acest model este folosit în domenii precum: biologie, fizica, chimie pentru a determina timpul în care o anumită cantitate dintr-o substanță se dezintegrează.

Modelul dezintegrării radioactive se bazează pe legea lui Rutherford, care spune ca: *viteza de dezintegrare radioactiva a unei substanțe este direct proporțională cu cantitatea de substanță existentă la momentul respectiv.*

Cunoscând această lege, presupunem că se cunoaște cantitatea de substanță radioactivă x_0 la momentul de timp t_0 . De aici desprindem condiția inițială $x(t_0) = x_0$. Funcția (necunoscută) $x(t)$ este folosită pentru a reprezenta cantitatea de substanță la momentul $t \geq t_0$. Viteza de dezintegrare a substanței este $x'(t)$ (derivată).

Rezultă modelul dezintegrării radioactive:

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

unde: $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ = viteza de dezintegrare; $x(t)$ = cantitatea de substanță la momentul t ; k = constantă de dezintegrare ($k > 0$);

x_0 = cantitatea inițială ($x_0 > 0$)

Soluția ecuației se obține prin metoda separării variabilei:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -k \cdot dt$$

Integram și obținem:

$$\ln(x) = -kt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x = e^{-k \cdot t} \cdot C$$

Din condiția inițială avem:

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{-k \cdot t_0} \cdot C & \Rightarrow \\ C &= x_0 \cdot e^{k \cdot t_0} & \Rightarrow \end{aligned}$$

Soluția problemei Cauchy este:

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$$

Funcția $x(t) = x_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}$ descrie legea după care se dezintegrează substanța.

Dacă $t_0 = 0$, atunci $x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}$.

Aplicatie: *Timpul de înjumătățire* este timpul în care cantitatea inițială de substanță ajunge la jumătate. Notăm timpul de înjumătățire cu $T_{1/2}$. Acesta poate fi folosit în aplicațiile biologice pentru a calcula în cât timp 50% dintr-un medicament este eliminat din corp prin excreție sau metabolism.

Timpul de înjumătățire se obține astfel: considerăm soluția problemei Cauchy de mai sus cu $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} x(T_{1/2}) = x_0 \cdot e^{-kT_{1/2}}, \\ x(T_{1/2}) = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

Calculăm timpul de înjumătățire $t_{1/2}$, rezolvând ecuația:

$$x_0 e^{-kT_{1/2}} = \frac{x_0}{2}$$

După logaritmare și simplificări obținem timpul de înjumătățire :

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

Problema 1.1

(a) Timpul de înjumătățire pentru Carbon14 (C14) este 5230 ani. Determinați rata de dezintegrare k pentru C14.

(b) Timpul de înjumătățire pentru Iod131 (I131) este de 8 zile. Determinați parametrul de dezintegrare k al I131.

(c) Care sunt unitățile de măsură pentru k de la punctele a) și b) ?

(d) Ca să determinăm timpul de înjumătățire pentru un izotop, trebuie să pornim cu 1 000 de atomi din acel izotop și să măsurăm timpul în care ei scad la 500 prin dezintegrare sau să luăm inițial 10 000 de atomi și să măsurăm timpul în care ei scad la 5 000. O să găsim același răspuns? De ce?

Soluție. Fie modelul matematic:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k \cdot x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soluția acestui model este: $x(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

(a) Știm că $x(5230) = \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 e^{-k \cdot 5230} = \frac{x_0}{2}$.

După simplificări și logaritmare se obține:

$$5230k = \ln 2$$

De unde rezultă: $k = \frac{\ln 2}{5230} \approx 0.00013253$

(b) Știm că $x(8) = \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 \cdot e^{-k \cdot 8} = \frac{x_0}{2}$.

După simplificări și logaritmare obținem: $k = \frac{\ln 2}{8} \approx 0.08664$

(c) La a) unitatea de măsură pentru k este: ani^{-1}

La b) unitatea de măsură pentru k este: zile^{-1}

(d) Da, o să găsim același răspuns, deoarece timpul de înjumătățire nu depinde de cantitatea inițială, ci doar de parametrul de dezintegrare. Deci, pentru aceeași substanță timpul de înjumătățire este același indiferent de cantitate, și este egal cu $\frac{\ln 2}{k}$, unde k = constanta de dezintegrare.

Problema 1.2. Pentru izotopul de Radium constanta de dezintegrare este $k = 0.01682$. Dacă timpul se măsura în minute și cantitatea inițială este $x_0 = 2 \text{ g}$, să se determine timpul de înjumătățire și în cât timp cantitatea ajunge la 0.5 g ? (indicatie: aplicăm formula timpului

de injumatatire $T_{1/2}$, obținem $T_{1/2} = 41.2$ min; pentru partea a doua a problemei observăm că trebuie să reducem încă o dată cantitatea la jumătate, deci aplicăm încă o dată timpul de înjumătățire pentru noua cantitate (adică pentru 1g)).

Problema 1.3. Timpul de înjumătățire al unui izotop este de 16 zile. Avem nevoie de 30 g după 30 de zile. Ce cantitate ar trebui să avem inițial?

$$T_{1/2} = 16 \Rightarrow \frac{\ln 2}{k} = 16 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{16}$$

$$x(30) = 30 \Rightarrow x_0 e^{-k \cdot t} = 30 \Rightarrow x_0 e^{-\frac{\ln 2}{16} \cdot 30} = 30 \Rightarrow x_0 = 30 \cdot e^{\frac{\ln 2}{16} \cdot 30}$$

Datarea prin metoda C^{14} :

În jurul anului 1950 o echipă de cercetători din Chicago condusă de chimistul Willard Libby (1908-1980) a descoperit o metodă care utilizează izotopi radioactivi de carbon și care ajută la determinarea vârstei aproximative a unor substanțe fosilizate. Metoda se bazează pe modelul dezintegrării radioactive.

Teoria privitoare la datarea cu carbon este bazată pe faptul că radioizotopul de Carbon 14 este produs în atmosferă prin acțiunea radiațiilor cosmice asupra Azotului 14. Raportul dintre cantitatea de C^{14} și cantitatea de C^{12} în atmosferă este constant și cantitatea izotopului de carbon prezenta în organismele vii este aceeași cu cea din atmosferă.

Deci organismele vii, pe lângă izotopul stabil C^{12} conțin o cantitate mică a izotopului radioactiv C^{14} care provine din radiațiile cosmice. Izotopul C^{14} intră în organismele vii în urma unui proces specific de transformare astfel încât raportul C^{14}/C^{12} rămâne constant.

Când un organism moare acest proces încetează și astfel absorbția de C^{14} realizată prin respirație, hrană sau fotosinteză scade (după legea dezintegrării radioactive) cu o rată constantă $k = 1/8000$, rată determinată experimental.

Comparând cantitatea de carbon din organism cu cea din atmosferă este posibil să găsim o aproximare rezonabilă a vârstei sale. Această metodă folosește timpul de înjumătățire al C^{14} . W. Libby a calculat că timpul de înjumătățire al C^{14} este aproximativ 5600 de ani, dar azi valoarea acceptată este 5730 de ani.

Metoda lui Libby a fost folosită pentru a descoperi de când datează o mobilă din lemn descoperită în mormintele egiptene, o copie recent descoperită a Evangheliei a lui Iuda scrisă pe papii Rossi Giulgiul din Torino.

Cum această metodă se bazează pe modelul dezintegrării radioactive, notăm cu $x(t)$ raportul cantității de substanță C^{14}/C^{12} după

t ani de la moartea organismului. Ecuația care modelează acest proces este $x'(t) = -\frac{1}{8000} \cdot x(t)$. Considerăm x_0 rata constantei C^{14}/C^{12} din timpul vieții, adică cantitatea de substanță la momentul inițial, $t_0 = 0$ este $x(0) = x_0$.

Rezultă că soluția problemei de față este: $x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{1}{8000} \cdot t}$. La momentul T se măsoară raportul C^{14}/C^{12} și se obține valoarea x_T , $x(T) = x_T$. Pentru a afla momentul morții organismului respectiv trebuie determinată valoarea T din $x(T) = x_T = x_0 \cdot e^{-\frac{1}{8000} \cdot T}$. Obținem: $T = \frac{1}{8000} \cdot \ln \frac{x_0}{x_T}$.

Problema 1.4. Datarea cu carbon este o metodă cu ajutorul căreia se determină timpul scurs de la decesul unui organism. Cantitatea izotopului de carbon prezentă în organisme vii este aceeași ca și în atmosferă. Când un organism moare, cantitatea de carbon începe să scadă fără a fi înlocuită.

Folosind rata de dezintegrare a carbonului găsită la exercițiul anterior, determinați cât timp a trecut de la decesul unui organism, dacă:

- a) 2% din cantitatea inițială de carbon se găsește acum în organism;
- b) 98% din cantitatea inițială de carbon se găsește acum în organism.

[Paul Blanchard, Robert L.Devaney, Glen R.Hall, Differential Equation, pagina 17, problema 12]

Soluție. Fie:

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot x \text{ modelul dezintegrării radioactive}$$

$$r = \frac{\ln 2}{5230} \text{ rata de dezintegrare}$$

x_0 cantitatea inițială

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{5230} \cdot t} \text{ soluția modelului cu condiție inițială}$$

a) Știm $x(t) = 2\% \cdot x_0$. De aici rezultă că:

$$x_0 e^{-\frac{\ln 2}{5230} \cdot t} = 0.02 \cdot x_0 \Rightarrow t \approx 29517 \text{ ani}$$

Deci după aproximativ 29 517 ani de la deces, 2% din cantitatea inițială de carbon se mai găsește în organism.

b) Știm $x(t) = 98\% \cdot x_0$. De aici rezultă că:

$$x_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5230} \cdot t} = 0.98 \cdot x_0 \Rightarrow t \approx 152 \text{ ani}$$

Deci după aproximativ 152 ani de la deces 98% din cantitatea inițială de carbon se mai găsește în organism.

Problema 1.5 Fosilele sunt deseori datate utilizând ecuația diferențială $\frac{dx}{dt} = -k \cdot x$

unde $x(t)$ este cantitatea de substanță radioactivă rămasă, k este constantă și t se măsoară în ani. Presupunând că $k = 1.5 \cdot 10^{-7}$ să se determine vârsta unei fosile care conține substanța radioactivă A dacă a mai rămas doar 30% din substanță. [Stephen Lynch, Dynamical Systems with Applications using Maple, pagina 39, problema 2] R: vârsta fosilei este de $8.026485360 \cdot 10^6$ ani.

PARTEA 2: Modelul creșterii exponențiale (Malthus)

Acest model este similar cu modelul de la paragraful anterior.

Legea de creștere a unei populații dintr-un mediu dat este:
viteza de creștere a unei populații este direct proporțională cu populația la momentul de timp t .

Presupunem ca se cunoaște populația x_0 la momentul de timp $t_0 = 0$. Astfel condiția inițială $x(0) = x_0$. Funcția (necunoscută) $x(t)$ este folosită pentru a reprezenta populația la momentul de timp $t \geq t_0$. Viteza de creștere a populației este $x'(t)$.

Rezultă modelul creșterii populației:

$$\begin{cases} x'(t) = k \cdot x(t), \\ x(0) = x_0 \\ (k > 0) \end{cases}$$

Soluția ecuației se obține prin metoda separării variabilei: $x'(t) = \frac{dx}{dt} = k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = k \cdot dt$

Integram și obținem: $\ln(x) = kt + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x = e^{k \cdot t} \cdot C$

Din condiția inițială avem: $x_0 = e^{k \cdot 0} \cdot C \Rightarrow C = x_0 \Rightarrow$

Soluția problemei Cauchy este: $x(t) = x_0 \cdot e^{k \cdot t}$

Funcția $x(t) = x_0 \cdot e^{k \cdot t}$ descrie legea de creștere a populației.

Observăm că dacă t tinde la infinit atunci și populația tinde la infinit, acest lucru arată că într-o perioadă foarte mare de timp mediul corespunzător va fi suprapopulat.

Aplicatie: *timpul de dublare* este timpul în care populația se dublează. Notăm timpul de dublare cu T_d . Acesta poate fi folosit în aplicațiile din medicina pentru a calcula în cât timp o populație de virusi se dublează.

Cum obținem timpul de dublare: considerăm soluția problemei Cauchy de mai sus:

$$\begin{cases} x(T_d) = x_0 \cdot e^{k \cdot T_d}, \\ x(T_d) = x_0 \cdot 2 \end{cases}$$

Calculăm timpul de dublare. Rezultă: $T_d = \frac{\ln 2}{k}$

Problema 2.1. Cantitatea de lemn (volumul) dintr-o pădure se notează cu $N_1(t)$ și se măsoară în m^3 iar timpul se va măsura în ani. La momentul t avem: $N_1(t) = 10^5 \cdot e^{0.03 \cdot t}$. După cât timp se va dubla cantitatea de lemn din pădure? (indicatie: se calculează T_d . Puteti aplica formula.) R: $T_d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0.03} = 23.1$

Problema 2.2 O altă pădure, al cărei volum de lemn se notează cu $N_2(t)$, are la momentul de timp $t_0 = 0$ un volum de lemn $N_2(0) = 8 \cdot 10^4 m^3$. Constanta sa de creștere este $k_2 = 0.035$. După cât timp vor avea cele două păduri același volum de lemn? (indicatie: se scrie

legea de crestere a celei de-a doua paduri. Cunoastem legea de crestere a primei paduri -vezi ex 1 enunt. Egalam cele doua legi considerand momentul de timp acelasi t_e . Ecuatia care se obtine este ecuatie algebrica cu necunoscuta t_e . Rezulta $t_e = \frac{\ln \frac{5}{4}}{0.005} = 44$. Cele doua populatii vor avea acelasi volum de lemn dupa aproximativ 44 ani.

Problema 2.3 O populatie de furnici de 10000 de indivizi creste anual cu 10% . Care este functie de crestere a populatiei de furnici? In cat timp populatia de furnici se dubleaza?

PARTEA 3: Racirea corpurilor

Problema racirii corpurilor se bazeaza pe legea lui Newton de racire a corpurilor: *viteza de racire a unui corp este proportionala cu diferenta dintre temperatura corpului la momentul respectiv de timp si temperatura mediului.*

Fie temperatura corpului la momentul de timp t notata cu $T(t)$. Presupunem ca temperatura corpului la momentul initial de timp t_0 este egala cu T_0 . Rezulta conditia initiala: $T(t_0) = T_0$.

Fie temperatura mediului inconjurator egala cu T_m .

Problema Cauchy ce rezulta din legea si datele expuse mai sus este:

$$\begin{cases} T'(t) = -k \cdot (T - T_m), \\ T(t_0) = T_0 \end{cases}$$

Observația: Daca $T_m > T(t)$, atunci $T'(t) > 0$, deci corpul se incalzeste.

Observația: Daca $T_m < T(t)$, atunci $T'(t) < 0$, deci corpul se raceste.

Rezolvand ecuatia prin metoda separarii variabilelor (tema), obtinem solutia ecuatiei: $T(t) = c \cdot e^{-k \cdot t} + T_m$. Punem conditia initiala. Rezulta solutia problemei Cauchy: $T(t) = (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)} + T_m$

Observația: Solutia T_m este solutie de echilibru.

Problema 3.1. Problema de criminalistica: sa se stabileasca ora decesului unei persoane daca se stie ca temperatura mediului este de 18° .

Rezolvare: Consideram momentul initial de timp $t_0 = 0$. Temperatura corpului la momentul initial (momentul decesului) este $T_0 = 36^\circ$. Temperatura mediului ambiant in care este plasat corpul este $T_m = 18^\circ$. Practic suntem intr-o situatie de racire a corpului, adica avem o problema Cauchy de tipul celei prezentate mai sus, cu solutia data de formula: $T(t) = (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot t} + T_m$. La momentul t_d =momentul descoperirii corpului, acesta are temperatura T_d .

Rezulta

$$T(t_d) = (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot t_d} + T_m, T_d = (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot t_d} + T_m$$

$$\text{Rezulta } t_d = -\frac{1}{k} \cdot \ln \frac{T_d - T_m}{T_0 - T_m}$$

Problema 3.2. Determinarea constantei k . Pentru a putea determina constanta k este nevoie, pe langa valoarea temperaturii corpului la momentul descoperirii, de inca o valoare a temperaturii corpului. Procedăm in felul urmator: se masoara temperatura corpului la momentul descoperirii acestuia și se mai face inca o măsurătoare a temperaturii corpului dupa un interval de timp cunoscut.

Datele problemei:

-masuratoarea 1: $T(t_d) = T_d$ =temperatura corpului la momentul descoperirii si

-masuratoarea 2: $T(t_d+h) = T_f$ = temperatura corpului la intevalul h de timp de la momentul descoperirii.

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t_d) = T_d \\ T(t_d + h) = T_f \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot t_d} + T_m = T_d \\ (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot (t_d + h)} + T_m = T_f \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{-k \cdot t_d} = \frac{T_d - T_m}{T_0 - T_m} \\ e^{-k \cdot t_d} \cdot e^{-k \cdot h} = \frac{T_f - T_m}{T_0 - T_m} \end{array} \right. =$$

$$e^{-k \cdot h} = -\frac{1}{h} \cdot \ln \frac{T_f - T_m}{T_d - T_m}$$

Problema 3.3. Temperatura initiala a unei cafele este de $80^\circ C$, temperatura camerei este $T_m = 21^\circ C$, constanta $k = 0.13$. Sa se calculeze temperatura cafelei dupa 5 minute si dupa 10 minute. (indicatie: scriem legea racirii corpurilor si aplicam aceasta lege pentru $t = 5$ si apoi pentru $t = 10$) R: $T(5) = 51.8^\circ C, T(10) = 37.1^\circ C$.

Problema 3.4. Cunoastem ca exact in 10 minute o cafea se raceste de la $80^\circ C$ la $49^\circ C$. Ce temperatura va avea cafeaua dupa 20 minute, daca se cunoaste ca temperatura camerei este de $21^\circ C$.

Rezolvare: cafeau se raceste dupa legea $T(t) = T_m + (T_0 - T_m) \cdot e^{-k \cdot t}$.

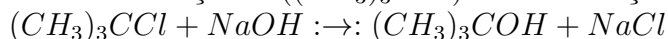
Aplicam datele problemei in aceasta ecuatie: $49^\circ C = 21^\circ C + (80^\circ C - 21^\circ C) \cdot e^{-k \cdot 10}$.

Deducem valoarea constantei $k = \frac{\ln \frac{59}{28}}{10}$

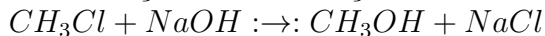
Calculam temperatura dupa 20 minute: $T(20) = 21 + (80 - 21) \cdot e^{-\frac{\ln \frac{59}{28}}{10} \cdot 20} = etc$

PARTEA 4: Reacții chimice

Dezintegrarea unei substanțe radioactive guvernată de ecuația diferențială $\frac{dx}{dt} = kx$ se numește reacție de ordinul întâi. În chimie, o parte din reacțiile chimice urmează aceeași lege: dacă moleculele substanței A se descompun în molecule mai mici, atunci rata de descompunere este proporțională cu cantitatea de substanță care nu a suferit schimbări. Un exemplu de reacție chimică de ordinul I este transformarea soluției de clorură de terț-butil($(CH_3)_3CCl$) în alcool terț butilic($(CH_3)_3COH$).



În reacția de mai sus doar concentrația de $(CH_3)_3CCl$ controlează rata de reacție. Dar în reacția



o moleculă de hidroxid de sodiu($NaOH$) este consumată pentru fiecare moleculă de clorură de metil(CH_3Cl) formându-se astfel o moleculă de alcool metilic(CH_3OH) și o moleculă de clorură de sodiu($NaCl$). În acest caz, rata la care reacția are loc este proporțională cu produsul concentrațiilor rămase de CH_3Cl și $NaOH$. Pentru a vizualiza o generalizare a situației de mai sus, să considerăm că o moleculă dintr-o substanță A se combină cu o moleculă dintr-o substanță B pentru a forma o moleculă dintr-o substanță C . Dacă X reprezintă cantitatea de soluție chimică C formată la timpul t și α , respectiv β reprezintă cantitățile celor două substanțe A , respectiv B la timpul $t = 0$ (cantitățile inițiale), atunci cantitățile de substanță A și B care nu sunt transformate în substanța C la un moment dat sunt egale cu $\alpha - X$ și $\beta - X$. Deci rata de formare a substanței C este dată de relația

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X)$$

unde k este constanta de proporționalitate. Modelul de mai sus este numit **reacție de ordinul doi**.

Soluția ecuației se obține astfel:

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X) \Leftrightarrow \frac{dX}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha - X} - \frac{1}{\beta - X} \right) = k dt$$

Integrând obținem:

$$\ln \frac{\beta - X}{\alpha - X} = k(\beta - \alpha)t + C_1$$

Ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{\beta - X}{\alpha - X} = C_2 e^{k(\beta - \alpha)t}$$

De unde rezultă soluția generală a ecuației:

$$X(t) = \frac{C_2 \alpha e^{k(\beta - \alpha)t} - \beta}{C_2 e^{k(\beta - \alpha)t} - 1}$$

Atașând condiția inițială $X(0) = 0$, obținem soluția problemei Cauchy:

$$X(t) = \frac{\alpha \beta (e^{k(\beta - \alpha)t} - 1)}{\beta e^{k(\beta - \alpha)t} - \alpha}$$

În continuare vom determina punctele de echilibru ale acestui model rezolvând ecuația:

$$\frac{dX}{dt} = 0 \Leftrightarrow k(\alpha - X)(\beta - X) = 0$$

Cum constanta $k \neq 0$ rezultă că cele două puncte de echilibru sunt $X_1 = \alpha$ și $X_2 = \beta$.

Pentru valorile particulare $k = 0.5$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ se obține graficul ecuației diferențiale care descrie comportamentul a două substanțe care reacționează:

Analizând graficul se observă faptul că cantitatea de soluție chimică C rezultată în urma reacției dintre substanțele A și B crește atât timp cât în reacție intervin ambele soluții A și B . Când cea care este mai

puțină se termină atunci cantitatea de soluție C devine constantă. Cu alte cuvinte, dacă α este cantitatea inițială de substanță A și β este cantitatea inițială de substanță B , atunci la finalul reacției cantitatea de substanță C va fi $\min\{\alpha, \beta\}$.

PARTEA 5; Diluarea unei soluții

Se consideră un rezervor care conține un volum V_0 de saramură (apă amestecată cu sare). Volumul se măsoară în litri, iar soluția conține a g de sare.

O altă soluție care conține b g de sare per litru este turnată în rezervor cu o rată de e l/min și, în același timp, soluția amestecată iese din rezervor cu o rată egală cu f l/min. Problema constă în a găsi cantitatea de sare din rezervor la momentul t . Fie $Q(t)$ cantitatea de sare din rezervor la momentul t . Rata cu care cantitatea de sare din rezervor se schimbă este dQ/dt , egală cu rata cu care sarea intră în rezervor minus rata cu care sarea părăsește rezervorul. Sarea intră în rezervor cu o rată de be g/min. Pentru a determina rata cu care sarea părăsește rezervorul trebuie să calculăm prima dată volumul de saramură care se găsește în rezervor la momentul t . Acesta este volumul inițial V_0 plus volumul de saramură adăugat, et , minus volumul de saramură care iese din rezervor, ft . Deci, volumul de saramură din rezervor la momentul t este:

$$V_0 + et - ft$$

Concentrația de sare din rezervor la momentul t este egală cu: $\frac{Q}{V_0 + et - ft}$

Deci, sarea părăsește rezervorul cu o rată de: $f\left(\frac{Q}{V_0 + et - ft}\right)$

În concluzie, modelul matematic care descrie variația cantității de sare din rezervor este guvernat de ecuația diferențială:

$$\frac{dQ}{dt} = be - f\left(\frac{Q}{V_0 + et - ft}\right)$$

Pentru a fi mai clară construcția modelului s-a considerat cazul în care este amestecată apă cu sare, dar modelul este valabil și pentru alte amestecuri de substanțe, cum ar fi apă cu zahăr sau apă cu substanțe chimice toxice.

Pentru a determina soluția modelului vom considera două cazuri distincte:

Cazul I. În acest caz vom determina soluția modelului atunci când $f \neq e$. Ecuația diferențială este de tip liniar și o vom rezolva prin metoda variației constantei. În primul rând vom rezolva ecuația omogenă cu variabile separabile

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{f}{V_0 + (e-f)t} Q$$

Soluția acestei ecuații este:

$$Q_0 = C(V_0 + (e-f)t)^{\frac{f}{f-e}}$$

În continuare considerăm pe C ca funcție de timp și avem:

$$Q_p = C(t)(V_0 + (e - f)t)^{\frac{f}{f-e}}$$

Derivăm Q_p în raport cu timpul și înlocuim Q_p și Q'_p în ecuația inițială. După simplificări se obține:

$$C'(t) = be(V_0 + (e - f)t)^{\frac{f}{e-f}}$$

Integrând avem:

$$C(t) = b(V_0 + (e - f)t)^{\frac{e}{e-f}}$$

Deci, $Q_p = b(V_0 + (e - f)t)$.

Soluția generală a modelului este:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = C(v_0 + (e - f)t)^{\frac{f}{f-e}} + b(V_0 + (e - f)t), \quad C \in \mathbb{R}$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = a$, obținem soluția particulară:

$$Q(t) = (a - bV_0)V_0^{\frac{f}{e-f}}(V_0 + (e - f)t)^{\frac{f}{f-e}} + b(V_0 + (e - f)t)$$

În graficul se observă situația în care rata cu care soluția amestecată părăsește rezervorul este mai mare decât rata cu care intră soluție în rezervor, adică $f > e$. Cele trei curbe corespund situațiilor în care concentrația de sare care intră în rezervor este mai mare, egală, respectiv mai mică decât cea existentă deja în rezervor. Considerăm $c_0 = \frac{a}{V_0}$ concentrația de sare din rezervor la momentul inițial.

Se observă că atunci când concentrația saramurii care intră în bazin este mai mare decât cea deja existentă în bazin, cantitatea de sare crește, iar apoi scade și în timp tinde la zero, deoarece la un moment dat în rezervor nu va mai exista lichid de amestecat datorită faptului că debitul cu care amestecul iese din rezervor este mai mare decât debitul cu care intră o nouă soluție. În cazul în care cele două concentrații sunt egale cantitatea de sare din bazin scade odată cu scăderea cantității de saramură din rezervor. Atunci când concentrația din saramura care intră în rezervor este mai mică decât concentrația saramurii deja existentă, cantitatea de sare scade, tinzând în timp la zero. Deci, oricât ar fi concentrația de sare din soluția care este adăugată în rezervor, în timp cantitatea de sare tinde la zero datorită faptului că debitul cu care soluția iese din bazin este mai mare decât debitul cu care intră saramură în rezervor.

Situația în care rata cu care soluția intră în rezervor este mai mare decât rata cu care soluția iese din rezervor, adică $f < e$, este prezentată în graficul de mai jos. Cele trei curbe corespund situațiilor în care concentrația de sare care intră în rezervor este mai mare, egală, respectiv mai mică decât cea existentă deja în rezervor. Considerăm $c_0 = \frac{a}{V_0}$ concentrația de sare din rezervor la momentul inițial.

Analizând graficul observăm că atunci când concentrația de sare din soluția adăugată în rezervor este mai mare, respectiv egală cu cea existentă deja, cantitatea de sare crește în timp tinzând la infinit. În cazul în care concentrația de sare adăugată este mai mică decât cea existentă, cantitatea de sare scade până când se stabilizează, apoi începe să crească, în timp tinzând la infinit. Creșterea nelimitată a cantității de sare se datorează faptului că debitul cu care intră soluție în bazin este mai mare decât debitul cu care iese.

Cazul II. În acest caz vom considera că rata cu care saramura intră în rezervor este egală cu rata cu care amestecul din rezervor iese, adică $f = e$. Notând $e = f =: r$ modelul devine:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r}{V_0}Q = br$$

Ecuția liniară se rezolvă asemănător cu cea de la primul caz. Primul pas constă în rezolvarea ecuației omogene cu variabile separabile:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r}{V_0}Q = 0$$

Soluția acestei ecuații este:

$$Q_0 = Ce^{-\frac{r}{V_0}t}$$

Considerând pe C ca funcție de timp, avem:

$$Q_p = C(t)e^{-\frac{r}{V_0}t}$$

Derivând Q_p în raport cu t și înlocuind Q_p și Q'_p în ecuația inițială și făcând simplificările convenabile obținem:

$$C'e^{-\frac{r}{V_0}t}$$

Integrând avem că $C(t) = bV_0e^{\frac{r}{V_0}t}$.

Deci, $Q_p = bV_0$ și soluția generală a modelului este:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = Ce^{-\frac{r}{V_0}t} + bV_0$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = a$, obținem soluția particulară:

$$Q(t) = (a - bV_0)e^{-\frac{r}{V_0}t} + bV_0$$

Valoarea echilibrului se determină rezolvând ecuația:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Leftrightarrow br - \frac{r}{V_0}Q = 0$$

Rezolvând ecuația în raport cu Q obținem punctul de echilibru:

$$Q = bV_0$$

Situația în care rata cu care soluția intră în rezervor este egală cu rata cu care soluția iese din rezervor, adică $f = e$, este prezentată în graficul de mai jos. Cele trei curbe corespund situațiilor în care concentrația de sare care intră în rezervor este mai mare, egală, respectiv mai mică decât cea existentă deja în rezervor. Considerăm $c_0 = \frac{a}{V_0}$ concentrația de sare din rezervor la momentul inițial.

Analizând graficul se observă faptul că atunci când concentrația de sare din soluția care intră în rezervor este mai mare decât concentrația care există deja, cantitatea de sare crește până când atinge valoarea de echilibru, apoi rămâne constantă. În cazul în care cele două concentrații

sunt egale cantitatea de sare rămâne constantă în timp fiind egală cu cea inițială. În cazul în care concentrația sării din saramura adăugată este mai mică decât concentrația sării din saramura existentă în rezervor, cantitatea de sare din amestec scade odată cu trecerea timpului, până când atinge punctul de echilibru, apoi rămâne constantă. Aspirația, în timp, a cantității de sare la o valoare constantă se datorează faptului că cele două debite sunt egale.

Problema 4.1 Două substanțe chimice A și B sunt combinate pentru a forma o substanță chimică C . Viteza de reacție la momentul t este proporțională cu produsul dintre cantitățile de substanțe A și B care la momentul t nu au fost supuse reacției (cantitățile rămase). Inițial, sunt 40 de grame de substanță A și 50 de grame de substanță B , și pentru fiecare gram de substanță B se folosesc 2 grame de substanță A . Se observă că 10 grame de substanță C se formează în 5 minute. Ce cantitate de substanță C se formează după 20 de minute? Care este cantitatea limitată de substanță C după mult timp? Ce cantități de substanțe A și B rămân după mult timp? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 101, problema 9].)

Soluție. Fie $X(t)$ cantitatea de substanță C rezultată în urma reacției la momentul t . Avem că:

$$X(0) = 0$$

$$X(5) = 10$$

Dacă a grame din substanța A reacționează cu b grame din substanța B presupunem că se formează 2 grame de substanță C . Avem că:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a = 2b \end{cases}$$

Rezolvând sistemul găsim că $a = 2(\frac{2}{3})$ și $b = 2(\frac{1}{3})$. Deci, la momentul t rămân $40 - \frac{2}{3}X$ g de substanță A și $50 - \frac{1}{3}X$ g de substanță B . Știm că:

$$\frac{dX}{dt} \propto (40 - \frac{2}{3}X)(50 - \frac{1}{3}X)$$

Ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{dX}{dt} = k(60 - X)(150 - X)$$

Primul pas în rezolvarea ecuației este separarea variabilelor:

$$\frac{dX}{(60-X)(150-X)} = k dt$$

Descompunând produsul din stânga egalului în diferență de două fracții și apoi integrând obținem:

$$\ln \frac{150-X}{60-X} = 90kt + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Aplicând funcția exponențială avem:

$$\frac{150-X}{60-X} = C_1 e^{90kt}$$

Atașând condiția inițială $X(0) = 0$ expresiei de mai sus obținem constanta $C_1 = \frac{5}{2}$ și pe urmă atașând condiția $X(5) = 10$ se determină că $90k = 0.0226$. Înlocuind cele determinate în expresia de mai sus și rezolvând ecuația în variabila X se găsește soluția particulară a modelului:

$$X(t) = 300 \frac{e^{0.0226t} - 1}{5e^{0.0226t} - 2}$$

După 20 de minute vor fi $X(20) = 29.26$ grame de substanță C .

Cantitatea de substanță C după mai mult timp se determină calculând limita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 60$$

Deci, când $t \rightarrow \infty$ cantitatea de substanță C va fi de 60 de grame.

Cantitățile de substanțe A și B care rămân după o perioadă lungă de timp se determină astfel:

$$40 - \frac{2}{3}60 = 0 \text{ g de substanță } A$$

$$50 - \frac{1}{3}60 = 30 \text{ g de substanță } B$$

Problema 4.2. Să se rezolve problema anterioară dacă inițial sunt 100 de grame de substanță chimică A . După cât timp substanța chimică C este jumătate formată? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 101, problema 10].)

Soluție. Conform datelor de la problema anterioară avem că:

$$\frac{dX}{dt} \propto (100 - \frac{2}{3}X)(50 - \frac{1}{3}X)$$

Ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{dX}{dt} = k(150 - X)(150 - X) = k(150 - X)^2$$

Primul pas în rezolvarea ecuației este separarea variabilelor:

$$\frac{dX}{(150 - X)^2} = k dt$$

Integrând obținem:

$$\frac{1}{150 - X} = kt + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

De unde rezultă:

$$X(t) = \frac{150kt + 150C_1 - 1}{kt + C_1}$$

Atașând condiția inițială $X(0) = 0$ expresiei de mai sus obținem constanta $C_1 = \frac{1}{150}$ și soluția particulară a modelului:

$$X(t) = \frac{22500kt}{150kt + 1}$$

Pentru a determina constanta de proporționalitate vom rezolva ecuația $X(5) = 10$, de unde se obține $k = 1/10500$. Deci cantitatea de soluție chimică la momentul t este dată de legea:

$$X(t) = \frac{150t}{t + 70}$$

Cantitatea de substanță C formată la finalul reacției se determină calculând limita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 150$$

Pentru a determina după cât timp va fi formată jumătate din cantitatea de substanță trebuie să rezolvăm ecuația $X(t) = 150/2$, unde necunoscuta este timpul. Soluția ecuației este $t = 70$. Deci, după 70 de minute va fi formată jumătate din cantitatea de substanță C .

Problema 4.3. Când anumite tipuri de substanțe chimice se amestecă, rata cu care noul compus este format este modelată de ecuația diferențială autonomă:

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X)$$

unde $k > 0$ este constanta de proporționalitate și $\beta > \alpha > 0$. Aici $X(t)$ reprezintă numărul de grame de substanță nou formată la momentul t .

(a) Utilizați un portret fazic pentru a determina comportamentul funcției $X(t)$ când $t \rightarrow \infty$.

(b) Se consideră cazul când $\alpha = \beta$. Să se utilizeze un portret fazic care descrie comportamentul funcției $X(t)$ când $t \rightarrow \infty$ și $X(0) < \alpha$ și când $X(0) > \alpha$.

(c) Verificați dacă soluția ecuației diferențiale în cazul în care $k = 1$ și $\alpha = \beta$ este $X(t) = \alpha - 1/(t + c)$. Găsiți o soluție care îndeplinește condiția $X(0) = \alpha/2$. Apoi găsiți o soluție care îndeplinește condiția $X(0) = 2\alpha$. Realizați graficul celor două soluții. Comportamentul acestor funcții când $t \rightarrow \infty$ este similar cu cel al funcțiilor de la punctul b? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 46, problema 42].)

Soluție. (a) Soluția acestei probleme va fi dată cu ajutorul soft-ului matematic Maple:

Pentru a determina portretul fazic trebuie să dam valori particulare constantelor k , α și β .

Soluția modelului pentru valorile particulare amintite mai sus este:

$$\text{sol}:=X(t)=\frac{60(e^{\frac{4}{5}t}-1)}{3e^{\frac{4}{5}t}-1}$$

Punctele de echilibru ale modelului sunt:

$$\text{pct_ech}:=20,60$$

Analizând portretul fazic se observă faptul că atunci când condițiile inițiale sunt mai mici decât punctul inferior de echilibru(20) sau mai mari decât acesta, dar mai mici decât 60(al doilea punct de echilibru), $X(t)$ tinde la punctul de echilibru inferior. Dacă condițiile inițiale sunt mai mari decât 60, atunci $X(t)$ va tinde la infinit.

(b) Pentru a determina soluția la punctul (b) se consideră $\alpha = \beta$.

$$\text{sol}:=X(t) = \frac{60(e^{\frac{2}{25}t}-1)}{3e^{\frac{2}{25}t}-1}$$

$$\text{pct_ech}:=20,20$$

Observăm că punctul de echilibru este chiar α .

Analizând portretul fazic se observă că dacă $X(0) < \alpha$, atunci $X(t)$ tinde la α când $t \rightarrow \infty$, iar când $X(0) > \alpha$, atunci $X(t) \rightarrow \infty$.

(c) Soluția de la punctul (c) se regăsește în liniile următoare:

$$\text{sol}:=X(t) = \frac{C1\alpha+\alpha t-1}{-C1+t}$$

Soluția generală a ecuației determinată mai sus este echivalentă cu forma dată în enunț.

Pentru a putea reprezenta grafic trebuie să-i dăm constantei *alpha* o valoare numerică.

$$\alpha := 20$$

$$\text{pct_ech}:=20,20$$

$$\text{sol1}:=X(t) = \frac{10(20t+1)}{10t+1}$$

Analizând graficul se observă faptul că dacă condițiile inițiale sunt mai mari decât soluția de echilibru, atunci $X(t)$ tinde la infinit când $t \rightarrow \infty$. În caz contrar, dacă condițiile inițiale sunt mai mici decât soluția de echilibru, atunci cantitatea de substanță nou formată tinde în timp la punctul de echilibru.

$$\text{sol2}:=X(t) = \frac{40(10t-1)}{20t-1}$$

$$y2:=t \rightarrow \frac{40(10t-1)}{20t-1}$$

Analizând graficul se observă că funcția modelată are același comportament ca aceea studiată anterior.

Comportamentul funcțiilor este similar cu cel al funcțiilor de la punctul (b).

Problema 4.4. Un bazin mare este parțial umplut cu 100 de galoane de fluid în care s-au dizolvat 10 livre de sare. Saramura care conține o jumătate de livră de sare per galon este pompată în bazin cu o rată de 6 gal/min. Soluția bine amestecată este pompată afară cu o rată de 4 gal/min. Să se găsească numărul de livre de sare din bazin după 30 de minute. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 27].)

Soluție. Se știe că:

$$V_0 = 100$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$e = 6$$

$$f = 4$$

$$Q(0) = 10$$

Se cere $Q(30) = ?$.

Avem ecuația diferențială:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{50+t}Q = 3$$

Prima dată rezolvăm ecuația omogenă cu variabile separabile

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{2}{50+t}Q$$

a cărei soluție este:

$$Q_0 = C(50+t)^{-2}$$

În continuare, privim pe C ca funcție de t și avem:

$$Q_p = C(t)(50+t)^{-2}$$

Derivând Q_p în raport cu timpul și înlocuind Q_p și Q'_p în ecuația inițială se obține:

$$C''^2$$

Integrând obținem $C(t) = (50+t)^3$ și imediat rezultă $Q_p = 50+t$.

Soluția generală a ecuației este:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = C(50+t)^{-2} + 50+t, \quad C \in \mathbb{R}$$

Atașând condiția inițială obținem soluția particulară:

$$Q(t) = -10^5(50+t)^{-2} + 50+t$$

Pentru a găsi numărul de livre de sare din bazin după 30 de minute, vom calcula $Q(30) = 64.375$ livre de sare după 30'.

Problema 4.5. Un lac industrial este plin cu 100 m^3 de apă curată. Apă contaminată cu o substanță chimică toxică de concentrație 0.0002 kg/m^3 este pompată în lac cu o rată de $0.5 \text{ m}^3/\text{min}$. Conținutul este amestecat bine și pe urmă este pompat afară din lac cu aceeași rată. Să se scrie problema cu valori inițiale pentru concentrația contaminată $C(t)$ care se găsește în lac la orice moment t . Determinați concentrația de echilibru. Găsiți o formulă pentru concentrația $c(t)$. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [J. David Logan, A first course in Differential Equations, pagina 49, problema 2].)

Soluție. Din datele problemei avem următoarele:

$$V_0 = 100$$

$$b = 0.0002$$

$$e = 0.5$$

$$f = 0.5$$

Modelul matematic care descrie variația cantității de substanță chimică din lac este dat de ecuația diferențială:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{200}C = 0.00001$$

Deoarece inițial în lac se află doar apă curată avem condiția inițială $C(0) = 0$. În concluzie, problema cu valori inițiale pentru concentrația

contaminată la momentul t este următoarea:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{200}C = 0.00001, C(0) = 0$$

Fie $dC/dt = f(C)$, unde $f(C) = 0.00001 - C/200$. Concentrația de echilibru este soluția ecuației $f(C) = 0$, adică $C = 0.002 \text{ kg/m}^3$.

Pentru a găsi soluția problemei cu valori inițiale dată mai sus vom rezolva ecuația liniară în două etape. În primul rând se rezolvă ecuația omogenă cu variabile separabile:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{200}C = 0$$

Soluția acestei ecuații este:

$$C_0 = Ce^{-\frac{1}{200}t}, C \in R$$

În continuare îl vom privi pe C ca funcție de timp și avem: $C_p = C(t)e^{-\frac{1}{200}t}$. Derivând C_p în raport cu timpul, apoi înlocuind C_p și C'_p în ecuația inițială se obține:

$$C(t)'e^{-\frac{1}{200}t}$$

Integrând, se obține $C(t) = 200 \cdot 10^{-5}e^{\frac{1}{200}t}$ și înlocuind $C(t)$ în expresia lui C_p , avem că $C_p = 100 \cdot 10^{-5}$.

Soluția generală a modelului este:

$$C(t) = C_0 + C_p = Ce^{-\frac{1}{200}t} + 200 \cdot 10^{-5},$$

Atașând condiția inițială $C(0) = 0$, se obține soluția particulară:

$$C(t) = 200 \cdot 10^{-5}(1 - e^{-\frac{1}{200}t})$$

Problema 4.6 Un rezervor mare este umplut cu 500 de galoane de apă curată. Saramura conținând 2 livre de sare per galon este pompată în rezervor cu o rată de 5 gal/min. Soluția bine amestecată este pompată afară cu aceeași rată. Să se găsească numărul $A(t)$ de livre de sare din rezervor de la momentul t . (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 23].)

Problema 4.7 Având în vedere datele de la problema anterioară, care este concentrația $c(t)$ a sării din rezervor la momentul t ? Dar la $t = 5$ min? Care este concentrația sării din rezervor după mai mult timp, adică atunci când $t \rightarrow \infty$? După cât timp concentrația de sare din rezervor este egală cu jumătate din valoarea la limită? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 24].)

Problema 4.8. Să se rezolve problema diluării folosind datele de la problema 23 (problema 9 în cazul nostru) cu presupunerea că soluția este pompată afară cu o rată de 10 gal/min. După cât timp rezervorul se golește? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă

deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 25].)

Soluție. Deoarece ultimele trei probleme enunțate au legătură între ele se va da o singură soluție construită cu ajutorul soft-ului matematic Maple care va răspunde la toate întrebările propuse în cele trei enunțuri de mai sus.

$$\text{sol}:=A(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$$

Pentru a răspunde întrebărilor de la problema 10 se determină concentrația la momentul t care este egală cu cantitatea de sare din rezervor de la momentul t împărțită la volumul de saramură din rezervor de la același moment.

După 5 minute concentrația va fi:

$$2 - 2e^{-\frac{1}{20}} = 0.097541151$$

După mai mult timp, adică atunci când $t \rightarrow \infty$ concentrația va fi:

$$2$$

Timpul după care concentrația de sare din rezervor este egală cu jumătate din valoarea la limită, adică cu 1, se determină astfel:

$$100\ln(2)$$

Pentru a determina soluția de la problema 11, se atribuie lui f valoarea 10:

$$\text{sol1}:=A(t) = -10t + 1000 - \frac{1}{10}(t - 100)^2$$

Timpul după care rezervorul se golește se determină în două moduri. Unul dintre aceste moduri este rezolvarea ecuației $A(t) = 0$, adică determinarea timpului după care în rezervor nu mai este deloc sare. Se va observa că ecuația are două soluții: 0 și 100. Evident soluția $t = 0$ nu este bună, așa că timpul după care rezervorul se golește va fi de 100 de minute.

$$0, 100$$

Cea de-a doua metodă constă în determinarea timpului la care în rezervor sunt 0 galoane de saramură.

$$100$$

Problema 4.9. Un lac conține inițial 1 000 000 de galoane de apă care nu are în compoziția sa substanțe chimice nedorite. Apă care conține 0.01 g/gal substanțe chimice, este pompată în lac cu o rată de 300 gal/oră și cu aceeași rată apa astfel amestecată iese din lac. Se presupune că substanța chimică este distribuită uniform în lac.

(a) Fie $Q(t)$ cantitatea de substanță chimică din lac la momentul t . Să se scrie o problemă cu valori inițiale pentru $Q(t)$.

(b) Să se rezolve problema de la punctul (a) pentru $Q(t)$. Ce cantitate de substanță chimică se află în lac după un an?

(c) După un an sursa de substanță chimică este înlăturată și în lac curge apă curată, iar amestecul iese din lac cu aceeași rată. Să se scrie problema cu valori inițiale care descrie noua situație.

(d) Să se rezolve problema cu valori inițiale de la punctul (c). Ce cantitate de substanță chimică rămâne în lac după încă un an (doi ani de la începutul problemei)?

(e) Cât timp durează pentru ca $Q(t)$ să se reducă la 10 g?

(Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition, pagina 16, problema 14].)

Soluție.

(a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 3 - \frac{3Q}{10000} \\ Q(0) = 0 \end{cases}$$

(b) În primul rând se determină soluția ecuației omogene cu variabile separabile atașate:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{3Q}{10000}$$

care este:

$$Q_0(t) = Ce^{-3 \cdot 10^{-4}t}, : C \in \mathbb{R}$$

În continuare se consideră $Q_p(t) = C(t)e^{-3 \cdot 10^{-4}t}$. Derivând $Q_p(t)$ în raport cu timpul și apoi înlocuind pe Q_p și Q'_p în ecuația inițială, după simplificări se obține:

$$C'3 \cdot 10^{-4}t$$

Integrând și înlocuind $C(t)$ în expresia lui Q_p , obținem soluția generală a ecuației:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = Ce^{-3 \cdot 10^{-4}t} + 10^4$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = 0$ se obține soluția particulară a modelului:

$$Q(t) = 10^4(1 - e^{-3 \cdot 10^{-4}t})$$

După un an care are 365 de zile a câte 24 de ore fiecare, cantitatea de substanță chimică din lac va fi:

$$Q(365 \cdot 24) = 10^4(1 - e^{-3 \cdot 10^{-4} \cdot 365 \cdot 24}) = 9277.77 \text{ g.}$$

(c) Problema cu valori inițiale care descrie noua situație este:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -3 \cdot 10^{-4}Q \\ Q(0) = 9277.77 \end{cases}$$

(d) Problema de la punctul (c) este una cu variabile separabile, iar soluția generală a acesteia este:

$$Q(t) = Ce^{-3 \cdot 10^{-4}t}, : C \in \mathbb{R}$$

Atașând condiția inițială, se obține soluția particulară:

$$Q(t) = 9277.77e^{-3 \cdot 10^{-4}t}$$

După încă un an de 365 de zile a câte 24 de ore, cantitatea de substanță chimică din lac va fi:

$$Q(365 \cdot 24) = 9277.77 \cdot e^{-3 \cdot 10^{-4} \cdot 365 \cdot 24} = 670.07 \text{ g.}$$

(e) Se cere a se determina t astfel încât $Q(t) = 10$, ceea ce e echivalent cu:

$$9277.77 \cdot e^{-3 \cdot 10^{-4}t} = 10$$

Rezolvând ecuația de mai sus se obține $t = 22775.97$ ore, ceea ce înseamnă 2.60 ani.

Problema 4.10. Se presupune că o cameră conține inițial 1200 ft^3 aer care nu conține monoxid de carbon. La momentul de timp $t = 0$ este introdus în cameră fum de țigară care are o concentrație de 4% de monoxid de carbon cu o rată de $0.1 \text{ ft}^3/\text{min}$ și aerul astfel amestecat părăsește camera cu aceeași rată.

(a) Să se găsească expresia concentrației $x(t)$ de monoxid de carbon din cameră la orice moment de timp $t > 0$.

(b) Expunerea îndelungată la o concentrație de monoxid de carbon de până la 0.00012 este dăunătoare corpului uman. Găsiți momentul de timp τ la care este atinsă această concentrație. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition, pagina 60, problema 19].)

Soluție. (a) Modelul matematic care descrie variația cantității de monoxid de carbon din cameră este dat de ecuația diferențială:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.04 \cdot 0.1 - 0.1 \cdot \frac{Q}{1200}$$

Pentru a determina soluția acesteia, în primul rând se rezolvă ecuația omogenă cu variabile separabile atașată:

$$\frac{dQ}{dt} = -0.1 \cdot \frac{Q}{1200}$$

a cărei soluție este:

$$Q_0(t) = Ce^{-\frac{0.1}{1200}t}, : C \in \mathbb{R}.$$

În continuare, se consideră $Q_p(t) = C(t)e^{-\frac{0.1}{1200}t}$. Derivând Q_p în raport cu timpul și apoi înlocuind Q_p și Q'_p în expresia inițială, după simplificări, se obține:

$$C' e^{-\frac{0.1}{1200}t}$$

Integrând și înlocuind $C(t)$ în expresia lui Q_p , se obține apoi soluția generală a modelului:

$$Q(t) = Q_0(t) + Q_p(t) = Ce^{-\frac{0.1}{1200}t} + 48$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = 0$ se obține soluția particulară:

$$Q(t) = -48e^{-\frac{0.1}{1200}t} + 48$$

Concentrația de monoxid de carbon din cameră la momentul t se determină împărțind cantitatea de monoxid de carbon la volumul total de aer din cameră:

$$x(t) = \frac{-48(e^{-\frac{0.1}{1200}t} - 1)}{1200} = -0.04(e^{-\frac{0.1}{1200}t} - 1)$$

(b) Se cere a se determina $\tau = ?$ astfel încât $x(\tau) = 0.00012$, ceea ce este echivalent cu:

$$0.04(1 - e^{-\frac{\tau}{12000}}) = 0.00012$$

Rezolvând ecuația de mai sus se obține:

$$\tau = 36.05 \text{ min.}$$