1. Probleme Cauchy. Probleme bilocale

1.1. **Problema Cauchy. Teoreme de existenţă şi unicitate.** Fie ecuaţia diferenţială de ordinul I

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Printr-o **problemă Cauchy** sau **problemă cu valori iniţiale** ataşată ecuaţiei (1) înţelegem problema

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2}$$

unde $(t_0, x_0) \in D_f$.

Cu alte cuvinte Problema Cauchy relativă la ecuaţia (1) constă în faptul că se dă un punct $(t_0, x_0) \in D_f$ şi se cere soluţia ecuaţiei ce satisface condiţia $x(t_0) = x_0$. Această condiţie se numeşte condiţie iniţiala sau condiţie Cauchy.

Din punct de vedere geometric, problema Cauchy revine la a determina curbele integrale ale ecuaţiei (1) care trec prin punctul (t_0, x_0).

Pentru o problemă Cauchy dată se pun următoarele probleme:

(P1) În ce condiţii asupra lui f problema Cauchy (2) admite o soluţie unică.

(P2) În ce condiţii asupra lui f problema Cauchy (2) admite cel puţin o soluţie.

Rezultatele care răspund la problema $(P1)$ se numesc *teoreme de existenţă şi unicitate*, iar rezultatele pentru problema $(P2)$ se numesc *teoreme de existenţă*.

Propoziţia 1. *Fie $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I interval nedegenerat din $\mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, o funcţie continuă şi $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. O funcţie $x : I \to \Omega$ este soluţie a problemei Cauchy (2) dacă şi numai dacă este soluţie continuă a ecuaţiei integrale Volterra*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad x \in I. \tag{3}$$

Propoziţia 1 ne arată că orice problemă Cauchy de forma (2) este echivalentă cu o ecuaţie integrală Volterra de forma (3), astfel teoremele de existenţă şi unicitate sunt obţinute prin intermediul ecua ţiei integrale (3).

Definiţia 1. *Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că f este **local lipschitz** în raport cu cea de a doua variabilă* *pe U dacă pentru orice mulţime compactă de forma $K = [a;b] \times [c;d]$ există $L > 0$ astfel încât*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|,$$

pentru orice $t \in [a;b]$, x_1, $x_2 \in [c;d]$.

Definiţia 2. *Fie $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f : [a;b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că f este **lipschitz** în raport cu cea de a doua variabilă pe $[a;b] \times \mathbb{R}$ dacă există $L > 0$ astfel încât*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|,$$

pentru orice $t \in [a;b]$, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 2. *Fie $U \subset \mathbb{R}$ o mulţime deschisă şi $f : U \to \mathbb{R}$. Dacă f este de clasă C^1 atunci f este local lipschitz în raport cu cea de a doua variabilă pe U.*

Propoziţia 3. *Fie $f : [a;b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă f este de clasă C^1 şi $\frac{\partial f}{\partial x}$ este mărginită pe $[a;b] \times \mathbb{R}$ atunci f este lipschitz în raport cu cea de a doua variabilă pe $[a;b] \times \mathbb{R}$.*

Teorema 1. *(Teorema de existenţă şi unicitate în bilă)*
Fie D_f un domeniu din $\mathbb{R}^2$ şi $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f = f(t, x)$, continuă şi local lipschitz în raport cu cea de a doua variabilă pe D_f. Fie $(t_0, x_0) \in D_f$ şi $a, b > 0$ astfel încât $\bar{D} = [t_0 - a; t_0 + a] \times [x_0 - b; x_0 + b] \subset D_f$.

Atunci problema Cauchy (2) admite o unică soluţie

$$x^* \in C^1([t_0 - h; t_0 + h], [x_0 - b; x_0 + b]),$$

unde $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \sup\limits_{(t,x)\in\bar{D}} |f(t, x)|$.

Mai mult, unica soluţie poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice funcţie continuă

$x_0 \in C([t_0 - h; t_0 + h], [x_0 - b; x_0 + b])$, adică şirul aproximaţiilor succesive definit de

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds, \; n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$t \in [t_0 - h; t_0 + h]$, converge uniform la unica soluţie y^*.

Observaţia 1. *Caracterul local al teoremei precedente: pentru $f : D_f \to \mathbb{R}$ continuă şi local lipschitz în raport cu cea de a doua variabilă pe D_f, ea ne garantează existenţa soluţiei numai pe un interval suficient de mic cu centrul în x_0, de forma $[x_0 - h; x_0 + h]$, unde $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$*
.

Teorema 2. *(Teorema de existenţă şi unicitate în spaţtiu)*
Fie $f : [a;b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(t,x)$, *continuă şi lipschitz în raport cu cea de a doua variabilă pe* $[a;b] \times \mathbb{R}$ *atunci problema Cauchy (2) admite o unică soluţie* $x^* \in C^1([a;b])$ *pentru orice* $(t_0, x_0) \in [a;b] \times \mathbb{R}$.

Mai mult, unica soluţie poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice funcţie continuă $x_0 \in C([a;b])$, *adică şirul aproximaţiilor succesive definit de (4) converge uniform la unica soluţie* x^*.

Metoda aproximatiilor succesive

Pornind de la ecuaţia integrala Volterra echivalenta cu problema Cauchy (2) avem sirul aproximatiilor succesive definit astfel

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Acesta converge uniform la unica soluţie a problemei Cauchy x^*. Deci în condiţiile teoremei de existenţă şi unicitate în bilă sau spaţiu putem aproxima $x(t)$, soluţia exactă a problemei Cauchy cu iterata de ordinul n a şirului aproximaţiilor succesive definit de (5), adică

$$x(t) \approx x_n(t).$$

Eroarea dintre soluţia exactă şi iterata de ordinul n a şirului aproximaţiilor succesive poate fi estimată prin

$$\epsilon_n = |x(t) - x_n(t)| \le M L^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6}$$

Exemplul 1. *Dacă* $P, Q \in C([a;b])$ *atunci problema Cauchy ataşată ecuaţiei liniare neomogene*

$$\begin{cases} x'(t) + P(t) \cdot x(t) &= Q(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{7}$$

are o unică soluţie $x^* \in C^1([a;b])$ *pentru orice* $t_0 \in [a;b]$ *şi* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Mai mult, unica soluţie poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice funcţie continuă* $x_0 \in C([a;b])$.

Verificăm condiţiile Teoremei 2. În cazul problemei Cauchy (7) avem

$$f : [a;b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(t,x) = -P(t) \cdot x + Q(t)$$

Deoarece $P, Q \in C([a;b])$ atunci $f \in C([a;b] \times \mathbb{R})$ şi

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right| = |P(t)| \le L, \quad \forall t \in [a;b],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

unde

$$L=\max_{t\in[a;b]}|P(t)|,$$

deci f este lipschitz pe $[a;b]\times\mathbb{R}$ în raport cu cea de a doua variabilă conform Propoziţiei 3. Astfel toate condiţiile Teoremei 2 sunt îndeplinite de unde deducem concluzia.

Exemplul 2. *Problema Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & =2t\sin\left(t^2\right)+\ln\left(1+x^2(t)\right) \\ x(0) & =0 \end{array}\right. \tag{8}$$

are o unică soluţie în $C^1([-a;a])$ *pentru orice* $a>0$.

În cazul problemei Cauchy (8) avem

$$\begin{gathered} f:[-a;a]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(t,x)=2t\sin\left(t^2\right)+\ln\left(1+x^2\right) \end{gathered}$$

Funcţia f este continuă şi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|=\frac{2\cdot|x|}{1+x^2}\leq 1,\quad \forall t\in[-a;a],\ \forall x\in\mathbb{R},$$

deci f este lipschitz pe $[-a;a]\times\mathbb{R}$ în raport cu x, constanta lipschitz fiind $L=1$. Aplicăm Teorema 2 şi deducem că problema Cauchy (8) are o unică soluţie în $C^1([-a;a])$ pentru orice $a>0$.

Exemplul 3. *Problema Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & =1+x(t) \\ x(0) & =0 \end{array}\right. \tag{9}$$

are o unică soluţie în $C^1([a;b])$ *pentru orice* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

În cazul acestei probleme Cauchy avem

$$\begin{gathered} f:[a;b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(t,x)=1+x \end{gathered}$$

Deci $f\in C([a;b]\times\mathbb{R})$ şi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|=1,\quad \forall t\in[a;b],\ \forall x\in\mathbb{R},$$

unde $L=1$ deci f este lipschitz pe $[a;b]\times\mathbb{R}$ în raport cu cea de a doua variabilă conform Propoziţiei 3. Astfel toate condiţiile Teoremei 2 sunt îndeplinite deci problema are soluţie unica.

Soluţie poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice funcţie continuă $x_0 \in C\left([a;b]\right)$. Şirul aproximaţiilor succesive se obţine pornind de la ecuaţia integrală Volterra echivalentă

$$x\left(t\right) = 0 + \int\limits_0^t (1 + x\left(s\right))ds = t + \int\limits_0^t x\left(s\right)ds, \quad x \in [a;b]$$

şi în acest caz este de forma

$$x_{n+1}\left(t\right) = t + \int\limits_0^t x_n\left(s\right)ds, \quad t \in [a;b].$$

În cazul în care alegem ca funcţie de start $x_0\left(t\right) \equiv 0$ vom avea

$$x_1\left(t\right) = t + \int\limits_0^t x_0\left(s\right)ds = t + \int\limits_0^t 0ds = t$$

$$x_2\left(t\right) = t + \int\limits_0^t x_1\left(s\right)ds = t + \int\limits_0^t t\left(s\right)ds = t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_3\left(t\right) = t + \int\limits_0^t x_2\left(s\right)ds = \int\limits_0^t (t + \frac{t^2}{2})\left(s\right)ds = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

obţinem următorul şir al aproximaţiilor succesive

$$x_n\left(t\right) = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}, \quad t \in [a;b],\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Stim ca seria Taylor

$$1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} \to e^t \tag{10}$$

Deci pentru $n \to +\infty$ avem

$$x_n\left(t\right) \to \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots\right) - 1 = e^t - 1 = x\left(t\right).$$

Calculand soluţia exactă a problemei Cauchy (9) avem

$$x\left(t\right) = e^t - 1, \quad t \in [a;b].$$

Se observă că şirul aproximaţiilor succesive converge către unica soluţie a problemei Cauchy.

Exerciţiul 1. *Se consideră următoarele probleme Cauchy* a)

$$\begin{cases} x'(t) & = x(t) \\ x(0) & = 1 \end{cases}$$

Sa se determine solutia problemei prin metoda aproximatiilor succesive.

b) *Sa se calculeze primele trei aproximatii pentru*

$$\begin{cases} x'(t) & = t + x(t)^3 \\ x(0) & = 0 \end{cases}$$

c) *Sa se calculeze primele trei aproximatii pentru*

$$\begin{cases} x'(t) & = \frac{1}{t}x(t) \\ x(1) & = 2 \end{cases}$$

1.2. **Problema bilocala.** Fie $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se cere să se determine soluţiile ecuaţiei

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

ce satisfac condiţiile

$$x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta.$$

Exerciţiul 2. *Sa se rezolve urmatoarele probleme:*

a)

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) & = 0 \\ x(0) & = 0 \\ x(\pi/2) & = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) & = e^t \\ x(0) & = 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x''(t) + x'(t) & = 1 \\ x(0) & = 0 \\ x(1) & = 1 \end{cases}$$