Tiberiu Trif

Teme de analiză matematică

pentru profesori

Cuprins

Capitolul 1

Mulţimi dense pe axa reală

1.1 Definiţii şi notaţii

1.1.1 Definiţie (vecinătăţi)**.** Fiind dat un punct $x \in \mathbb{R}$, o mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *vecinătate* a lui x dacă există un $r > 0$ aşa încât $(x - r, x + r) \subseteq V$. Familia tuturor vecinătăţilor punctului x va fi notată cu $\mathcal{V}(x)$. Evident, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$ avem $x \in V$.

1.1.2 Definiţie (puncte aderente, închiderea unei mulţimi)**.** Fie A o submulţime a lui $\mathbb{R}$. Un punct $x \in \mathbb{R}$ se numeşte *aderent* mulţimii A, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$ avem $V \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea tuturor punctelor aderente mulţimii A se numeşte *închiderea* sau *aderenţa* lui A şi va fi notată cu $\operatorname{cl} A$. Evident, are loc incluziunea $A \subseteq \operatorname{cl} A$. Submulţimile A ale lui $\mathbb{R}$, cu proprietatea că $A = \operatorname{cl} A$, se numesc *mulţimi închise*. Se constată imediat că

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{cl} A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, r > 0 \ : \ (x - r, x + r) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, r > 0 \ \exists\, a \in A \ : \ |x - a| < r. \end{aligned}$$

1.1.3 Exemplu. Lăsăm în seama cititorului să demonstreze că închiderile mulţimilor $A = (0, 1)$, $B = \mathbb{Q}$ şi $C = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right\}$ sunt $\operatorname{cl} A = [0, 1]$, $\operatorname{cl} B = \mathbb{R}$ şi respectiv $\operatorname{cl} C = C \cup \{0\}$.

1.1.4 Propoziţie (caracterizarea secvenţială a punctelor aderente)**.** *Fie mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ şi punctul $x \in \mathbb{R}$. Avem $x \in \operatorname{cl} A$ dacă şi numai dacă există un şir (x_n), de puncte din A, astfel ca $(x_n) \to x$.*

1.1.5 Definiţie (mulţimi dense)**.** Fie mulţimile $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se spune că A *este densă în* B dacă $B \subseteq \operatorname{cl} A$. Spre exemplu, mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este densă în $\mathbb{R}$.

1.1.6 Observaţie. Fie I un interval nedegenerat al axei reale (deschis, închis, semideschis) de capete $a_0, b_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $a_0 < b_0$. Se constată imediat că o mulțime A este densă în I dacă și numai dacă $A \cap (a,b) \neq \emptyset$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a_0 < a < b < b_0$. În particular, A este densă în $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $A \cap (a,b) \neq \emptyset$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1.2 Teoremele lui Dirichlet și Kronecker

1.2.1 Lemă. *Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci pentru orice $x \in [0,1]$, orice $r > 0$ și orice $n_0 \in \mathbb{N}$ există un număr natural $n \geq n_0$ astfel ca $\left|x - \{n\alpha\}\right| < r$.*

Demonstrație. Fie $x \in [0,1]$ și fie $r > 0$. Notăm

$$(a,b) := (0,1) \cap (x - r, x + r).$$

Evident, este suficient să dovedim că pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$ există un număr natural $n \geq n_0$ în așa fel încât $\{n\alpha\} \in (a,b)$.

Considerăm axa reală înfășurată pe un cerc de lungime 1. Fiecărui număr real îi corespunde un punct pe cerc. Numerelor reale x și y le corespunde același punct de pe cerc dacă și numai dacă $x - y \in \mathbb{Z}$.

Fie A și B punctele de pe cerc corespunzătoare numerelor a și b. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ notăm cu M_n punctul de pe cerc corespunzător numărului $n\alpha$. Deoarece $n\alpha - \{n\alpha\} = [n\alpha] \in \mathbb{Z}$, conform remarcii anterioare, punctul M_n corespunde și numărului $\{n\alpha\}$. Avem de arătat că pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$ există un număr natural $n \geq n_0$ așa încât punctul M_n să aparțină arcului de capete A și B. Fie ℓ lungimea acestui arc.

Considerăm punctele M_{n_0}, M_{n_0+1}, M_{n_0+2}, $\ldots$, care sunt distincte două câte două. În adevăr, dacă am avea $M_p = M_q$ cu $n_0 \leq p < q$, atunci am avea $p\alpha - q\alpha = r \in \mathbb{Z}$, de unde $\alpha = r/(p-q) \in \mathbb{Q}$, ceea ce ar fi absurd. Având o infinitate de puncte pe cerc, există cel puțin două, M_p și M_{p+q} (cu $p \geq n_0$ și $q \geq 1$) în așa fel încât distanța dintre ele să fie $\ell' < \ell$. Considerăm acum șirul de puncte

$$M_p, M_{p+q}, M_{p+2q}, M_{p+3q}, \ldots.$$

Distanța dintre oricare două puncte consecutive din acest șir este ℓ' deoarece $(p+q)\alpha - p\alpha = q\alpha$, $(p+2q)\alpha - (p+q)\alpha = q\alpha$ ș.a.m.d. Prin urmare, alegând $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k\ell' > 1$, cel puțin unul dintre punctele M_p, M_{p+q}, M_{p+2q}, $\ldots$, M_{p+kq} aparține arcului de cerc de capete A și B. □

1.2.2 Teoremă (P. G. L. Dirichlet)**.** *Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci mulțimea*

$$\big\{\, \{n\alpha\} \mid n = 1, 2, 3, \ldots \big\}$$

este densă în $[0,1]$.

Demonstrație. Fie A mulțimea din enunț și fie $x \in [0,1]$ arbitrar. Pentru orice $r > 0$ există, în baza lemei 1.2.1, un $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $\big|x - \{n\alpha\}\big| < r$. Conform definiției 1.1.2 avem atunci $x \in \operatorname{cl} A$. Cum $x \in [0,1]$ a fost arbitrar, trebuie să avem $[0,1] \subseteq \operatorname{cl} A$, adică A este densă în $[0,1]$. $\square$

1.2.3 Observații. 1° Teorema lui Dirichlet admite și următoarea reformulare prozaică: un pitic se plimbă pe un cerc de lungime 1, având pasul de lungime $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pe cerc este săpată o groapă. Indiferent cât de mică este groapa, dacă piticul se învârte pe cerc de suficient de multe ori, va sfârși prin a călca în ea.

2° Se poate demonstra ceva mai mult: dacă (x_n) este șirul de termen general $x_n = \{n\alpha\}$, cu $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $LIM(x_n) = [0,1]$.

În adevăr, cum $x_n \in [0,1)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, avem evident incluziunea $LIM(x_n) \subseteq [0,1]$. Pentru a dovedi incluziunea contrară, fie $x \in [0,1]$ fixat arbitrar. Lema 1.2.1 asigură existența unui șir strict crescător (n_k), de numere naturale cu proprietatea

$$|x - \{n_k\alpha\}| < \frac{1}{k} \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Atunci $\lim\limits_{k\to\infty} \{n_k\alpha\} = x$, deci $x \in LIM(x_n)$.

1.2.4 Teoremă (L. Kronecker)**.** *Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci mulțimea*

$$\big\{\, n\alpha + m \mid n, m \in \mathbb{Z} \,\big\}$$

este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie A mulțimea din enunț și fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci avem $x = [x] + x'$, cu $x' \in [0,1)$. Pentru orice $r > 0$ există, în baza lemei 1.2.1, un $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $\big|x' - \{n\alpha\}\big| < r$. Notăm $m := [x] - [n\alpha] \in \mathbb{Z}$. Atunci $n\alpha + m \in A$ și

$$\begin{aligned} \big|x - (n\alpha + m)\big| &= \big|[x] + x' - [n\alpha] - \{n\alpha\} - [x] + [n\alpha]\big| \\ &= \big|x' - \{n\alpha\}\big| < r. \end{aligned}$$

Conform definiției 1.1.2 avem $x \in \operatorname{cl} A$. Cum $x \in \mathbb{R}$ a fost arbitrar, deducem că $\mathbb{R} \subseteq \operatorname{cl} A$, adică A este densă în $\mathbb{R}$. $\square$

Rezultatul următor reprezintă o rafinare a teoremei lui Kronecker. El se dovedește a fi util în unele aplicații.

1.2.5 Teoremă. *Dacă $\alpha > 0$ este un număr irațional și $n_0 \in \mathbb{N}$, atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Mulțimea* $\{ n\alpha - m \mid n, m \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \}$ *este densă în* $\mathbb{R}$.
2° *Mulțimea* $\{ -m\alpha + n \mid n, m \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \}$ *este densă în* $\mathbb{R}$.

Demonstrație. 1° Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, $x = [x] + x'$, cu $x' \in [0,1)$. Fie apoi $r > 0$ oarecare. Notăm

$$n_0^* := \max \left\{ n_0,\ \left[\frac{x+1}{\alpha} \right] + 1 \right\}.$$

Conform lemei 1.2.1, există un număr natural $n \geq n_0^*$ astfel ca $\big| x' - \{n\alpha\} \big| < r$. Notăm $m := [n\alpha] - [x]$. Atunci $m \in \mathbb{N}$, deoarece $[n\alpha] > n\alpha - 1 > x \geq [x]$. Cum

$$\begin{aligned} \big| x - (n\alpha - m) \big| &= \big| [x] + x' - [n\alpha] - \{n\alpha\} + [n\alpha] - [x] \big| \\ &= \big| x' - \{n\alpha\} \big| < r, \end{aligned}$$

în baza definiției 1.1.2 deducem concluzia.

2° Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, $x = [x] + x'$, cu $x' \in [0,1)$. Fie apoi $r > 0$ oarecare. Notăm

$$n_0^* := \max \left\{ 1,\ \left[\frac{n_0 - x + 1}{\alpha} \right] + 1 \right\}.$$

Din lema 1.2.1 rezultă că există un număr natural $m \geq n_0^*$ astfel încât să avem $\big| x' - \{-m\alpha\} \big| < r$. Notăm $n := [x] - [-m\alpha]$. Atunci

$$n \geq [x] + m\alpha > x - 1 + m\alpha \geq n_0$$

și

$$\begin{aligned} \big| x - (-m\alpha + n) \big| &= \big| [x] + x' - [-m\alpha] - \{-m\alpha\} - [x] + [-m\alpha] \big| \\ &= \big| x' - \{-m\alpha\} \big| < r. \end{aligned}$$

În baza definiției 1.1.2, rezultă concluzia din enunț. □

1.2.6 Aplicație. Mulțimea $\{ \sin n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ este densă în $[-1,1]$.

Demonstrație. Fie $x \in [-1,1]$ arbitrar ales și fie $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ în așa fel încât $x = \sin t$. Fie apoi $r > 0$ oarecare. Din continuitatea funcției sin în punctul t rezultă că există un $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $t' \in \mathbb{R}$, cu $|t' - t| < \delta$, să avem $|\sin t' - \sin t| < r$. Din teorema 1.2.4 (a lui Kronecker) rezultă apoi existența numerelor $n, m \in \mathbb{Z}$ astfel ca $|2m\pi + n - t| < \delta$. Cum

$$|x - \sin n| = |\sin t - \sin(2m\pi + n)| < r,$$

în baza definiției 1.1.2 deducem concluzia din enunț. □

1.2.7 Observație. Se poate demonstra mai mult: dacă (x_n) este șirul de termen general $x_n = \sin n$, atunci $LIM(x_n) = [-1, 1]$.

În adevăr, cum $x_n \in [-1, 1]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, avem evident incluziunea $LIM(x_n) \subseteq [-1, 1]$. Pentru a dovedi incluziunea contrară, fie $x \in [-1, 1]$ fixat arbitrar și fie $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel ca $x = \sin t$. Afirmația 2° din teorema 1.2.5 asigură existența unui șir strict crescător (n_k), de numere naturale, precum și existența unui șir (m_k), de numere naturale, cu proprietatea că

$$|-2\pi m_k + n_k - t| < \frac{1}{k} \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Atunci $t = \lim\limits_{k\to\infty} (-2\pi m_k + n_k)$, deci

$$x = \sin t = \lim_{k\to\infty} \sin(-2\pi m_k + n_k) = \lim_{k\to\infty} \sin n_k.$$

Drept urmare, avem $x \in LIM(x_n)$.

1.3 Probleme

1. Fiind dată o combinație oarecare de cifre $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, să se demonstreze că există o putere a lui 2 care începe cu această combinație de cifre. În particular, există o putere a lui 2 care începe cu 2017.

2. Este mulțimea $\{\, 2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$ densă în $[0, \infty)$?

Concursul William Lowell Putnam 1963, problema B2

3. Este $\sqrt{2}$ limita unui șir de puncte ale mulțimii

$$A = \left\{ \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid n, m = 0, 1, 2, \dots \right\}?$$

Concursul William Lowell Putnam 1990, problema A2

4. Fie (x_n) șirul de termen general $x_n = \{\sqrt{n}\}$. Să se demonstreze că $LIM(x_n) = [0, 1]$.

T. Trif, Olimpiada județeană, clasa a XI-a, 2007

5. Să se arate că mulțimea $\{\sqrt[n]{m} \mid n, m \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$ este densă în $[1, \infty)$. Ce se poate spune despre mulțimea $\left\{ \sqrt[p]{q} \mid p, q \text{ numere prime} \right\}$?

Olimpiada studențească, Republica Moldova, 1997

6. Să se demonstreze că mulțimea $\left\{ \frac{m}{2^n} - \frac{n}{2^m} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$ este densă în mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Olimpiada studențească, Republica Moldova, 1997

7. Fie E o submulțime nevidă a intervalului $(0, \infty)$, care îndeplinește următoarele condiții:

(i) $\frac{x}{2} \in E$ oricare ar fi $x \in E$;

(ii) $\sqrt{x^2 + y^2} \in E$ oricare ar fi $x, y \in E$.

a) Să se dea un exemplu de mulțime $E \neq (0, \infty)$ care îndeplinește condițiile (i) și (ii).

b) Să se arate că $\operatorname{cl} E = [0, \infty)$ (adică E este densă în $[0, \infty)$).

Concursul studențesc Traian Lalescu, faza națională, 2008

8. (generalizarea problemei 3) Fie (x_n) un șir de numere reale cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Să se demonstreze că mulțimea $\{x_n - x_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\mathbb{R}$. În particular, mulțimea $\{H_n - H_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, unde

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

este al n-lea număr armonic, este densă în $\mathbb{R}$.

9. Fie A o submulțime a lui $[0, 1]$, cu următoarele proprietăți:

(i) A este nevidă;

(ii) dacă $x \in A$, atunci $x/2 \in A$ și $(x + 1)/2 \in A$.

a) Să se dea exemple de mulțimi A care satisfac (i) și (ii).

b) Să se demonstreze că orice mulțime A care satisface (i) și (ii) este densă în $[0, 1]$.

10. Să se determine toate funcțiile continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, soluții ale ecuației funcționale

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, 1].$$

11. Să se demonstreze că dacă o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite drept perioade pe 1 și un număr irațional α, atunci f este constantă.

12. Fie α un număr real și fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel ca

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{și} \quad f(x+\alpha) = f(x) + \alpha \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se demonstreze că dacă α este irațional, atunci există un număr real c așa încât $f(x) = x + c$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că afirmația de la a) nu rămâne adevărată dacă α este rațional.

Olimpiada studențească, Republica Moldova, 1999

13. Fiind dată o funcție continuă $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, să se demonstreze că:

a) Dacă $\displaystyle\int_0^1 f(\sin(x+\alpha))\,\mathrm{d}x = 0$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$.

b) Dacă $\displaystyle\int_0^1 f(\sin nx)\,\mathrm{d}x = 0$ oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$, atunci $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$.

D. Andrica și M. Piticari, Olimpiada națională, 2001/3

1.4 Soluții

1. Fie $N := \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. Trebuie să arătăm că există $n, m \in \mathbb{N}$ în așa fel încât

$$2^n \geq N \quad \text{și} \quad N \cdot 10^m \leq 2^n < (N+1) \cdot 10^m.$$

Cu alte cuvinte, trebuie să arătăm că există $n \geq [\log_2 N] + 1$ și există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\lg N \leq n \lg 2 - m < \lg(N+1).$$

Or, aceasta este o consecință imediată a afirmației 1° din teorema 1.2.5, aplicată pentru $n_0 := [\log_2 N] + 1$ și $\alpha := \lg 2 > 0$, care este număr irațional.

2. Răspunsul este da. Pentru a arăta că mulțimea $A := \{2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este densă în $[0, \infty)$, trebuie să dovedim că oricare ar fi numerele reale a și b, cu $0 < a < b$, avem $A \cap (a, b) \neq \emptyset$ (a se vedea observația 1.1.6). Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ arbitrar alese. Teorema lui Kronecker aplicată numărului irațional $\alpha := \log_2 3$ asigură existența a două numere întregi m și n în așa fel încât

$$\log_2 a < n\alpha + m = \log_2(2^m 3^n) < \log_2 b.$$

Prin urmare, avem $2^m 3^n \in A \cap (a,b)$.

3. Răspunsul este da. Considerăm mulțimea

$$B := \left\{ \sqrt[3]{2n^3} - \sqrt[3]{m^3} \mid n,m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ n\sqrt[3]{2} - m \mid n,m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Conform afirmației 1° din teorema 1.2.5, mulțimea B este densă în $\mathbb{R}$. Cum $B \subseteq A$, deducem că și A este densă în $\mathbb{R}$, deci $\sqrt{2} \in \operatorname{cl} A$. Aplicând propoziția 1.1.4, rezultă că există un șir de puncte din A care converge către $\sqrt{2}$.

4. Evident, avem $LIM(x_n) \subseteq [0,1]$. Pentru a dovedi incluziunea contrară, fie $x \in [0,1]$ arbitrar. Observăm că $x_{2n^2} = \{n\sqrt{2}\}$. Lema 1.2.1 asigură existența unui șir strict crescător (n_k), de numere naturale, cu proprietatea că $|x - \{n_k\sqrt{2}\}| < \frac{1}{k}$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Atunci $x = \lim\limits_{k\to\infty} \{n_k\sqrt{2}\} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2n_k^2}$, deci $x \in LIM(x_n)$.

5. Fie $A := \{ \sqrt[n]{m} \mid n,m \in \mathbb{N},\, n \geq 2\}$. Pentru a dovedi că A este densă în $[1,\infty)$, trebuie să arătăm că (a se vedea observația 1.1.6) $A \cap (a,b) \neq \emptyset$ pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$ cu $1 < a < b$. Fie așadar $a,b \in \mathbb{R}$, $1 < a < b$. Demonstrăm existența unui element al lui A care să aparțină intervalului (a,b) printr-o schemă în doi pași, aplicabilă și în alte situații.

Etapa I. „Coborârea”: găsim un element în A, strict mai mic decât a.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, există $n \geq 2$ număr natural suficient de mare, încât $\sqrt[n]{2} < a$ și $\sqrt[n]{2} < b/a$.

Etapa a II-a. „Ridicarea”: găsim un șir de puncte din A care tinde la ∞ și care are cel puțin un termen în (a,b). Pentru aceasta, este suficient ca diferența a doi termeni consecutivi să fie mai mică decât $b-a$, sau raportul a doi termeni consecutivi să fie mai mic decât b/a.

În cazul nostru considerăm șirul

$$\sqrt[n]{2},\ \sqrt[n]{2^2},\ \sqrt[n]{2^3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{2^k},\ \ldots.$$

Fie k cel mai mare număr natural cu proprietatea că $\sqrt[n]{2^k} \leq a$. Atunci $\sqrt[n]{2^{k+1}} \in (a,b)$. În adevăr, în caz contrar, am avea $\sqrt[n]{2^{k+1}} \geq b$, deci

$$\sqrt[n]{2} = \frac{\sqrt[n]{2^{k+1}}}{\sqrt[n]{2^k}} \geq \frac{b}{a},$$

ceea ce ar fi absurd. Prin urmare, $\sqrt[n]{2^{k+1}} \in A \cap (a,b)$.

Vom demonstra că și mulțimea $B := \left\{ \sqrt[p]{q} \mid p, q \text{ numere prime} \right\}$. Ca în cazul mulțimii A, avem de arătat că $B \cap (a,b) \neq \emptyset$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $1 < a < b$. Fie

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots, p_n, \ldots$$

mulțimea numerelor prime, care este, se știe, infinită. Fie apoi $a, b \in \mathbb{R}$ cu $1 < a < b$.

Etapa I. „Coborârea”: deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{2} = 1$, există $n \geq 1$ număr natural suficient de mare, încât $\sqrt[p_n]{2} < a$ și $\sqrt[p_n]{2} < b/a$.

Etapa a II-a. „Ridicarea”: notăm $p := p_n$ și considerăm șirul de puncte din B

$$\sqrt[p]{2},\ \sqrt[p]{3}, \ldots, \sqrt[p]{p_k}, \ldots.$$

Fie k cel mai mare număr natural cu proprietatea că $\sqrt[p]{p_k} \leq a$. Atunci are loc $\sqrt[p]{p_{k+1}} \in (a,b)$. În adevăr, în caz contrar, am avea $\sqrt[p]{p_{k+1}} \geq b$, deci

$$\sqrt[p]{\frac{p_{k+1}}{p_k}} \geq \frac{b}{a}\,.$$

Pe de altă parte, teorema lui Bertrand afirmă că pentru orice număr natural $m \geq 2$, între m și $2m$ există cel puțin un număr prim. Prin urmare, avem $p_{k+1} \leq 2p_k$, deci

$$\sqrt[p]{\frac{p_{k+1}}{p_k}} \leq \sqrt[p]{2} < \frac{b}{a}\,,$$

în contradicție cu inegalitatea de mai sus. Contradicția obținută arată că notând $q := p_{k+1}$, avem $\sqrt[p]{q} \in B \cap (a,b)$.

6. Fie $A := \{a_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, unde $a_{m,n} := \dfrac{m}{2^n} - \dfrac{n}{2^m}$. Observăm că $a_{n,m} = -a_{m,n}$, deci mulțimea A este simetrică față de origine ($x \in A \ \Rightarrow\ -x \in A$). Datorită acestei observații, este suficient să dovedim că A este densă în $[0,\infty)$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că $A \cap (a,b) \neq \emptyset$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a < b$.

Etapa I. „Coborârea”: deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \right) = 0,$$

există un număr natural $n \geq 1$, suficient de mare, încât $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{2^{n+1}} < b - a$.

Etapa a II-a. „Ridicarea”: considerăm șirul de puncte din A

$$a_{n,n}=0,\ a_{n+1,n}=\frac{n+1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},\ \ldots,\ a_{n+k,n}=\frac{n+k}{2^n}-\frac{n}{2^{n+k}},\ \ldots.$$

Deoarece $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k,n}=\infty$, există un număr întreg $k\geq 0$, cel mai mare cu proprietatea că $a_{n+k,n}\leq a$. Întrucât

$$\begin{aligned} a_{n+k+1,n}-a_{n+k,n} &= \left(\frac{n+k+1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+k+1}}\right)-\left(\frac{n+k}{2^n}-\frac{n}{2^{n+k}}\right)\\ &= \frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+k+1}}\leq \frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}<b-a, \end{aligned}$$

rezultă că $a_{n+k+1,n}\in A\cap(a,b)$.

7. a) Mulțimea

$$E:=\{\sqrt{q}\mid q\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)\}$$

este evident diferită de $(0,\infty)$ și îndeplinește condițiile (i) și (ii).

b) Pe baza lui (i) se demonstrează imediat (prin inducție) că E îndeplinește și condiția

(iii) $\dfrac{x}{2^n}\in E$ oricare ar fi $x\in E$ și oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

De asemenea, be baza lui (ii) se arată (tot prin inducție) că E îndeplinește și condiția

(iv) dacă $x\in E$ și $\alpha x\in E$ cu $\alpha>0$, atunci $\sqrt{1+k\alpha^2}\,x\in E$ pentru orice număr întreg $k\geq 0$.

Trecând la rezolvarea problemei, din $E\subseteq(0,\infty)$ rezultă că $\operatorname{cl}E\subseteq[0,\infty)$. Demonstrarea incluziunii contrare înseamnă stabilirea faptului că E este densă în $[0,\infty)$. Având în vedere observația 1.1.6, trebuie să arătăm că $E\cap(a,b)\neq\emptyset$ oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$, cu $0<a<b$.

Etapa I. „Coborârea”: fie $x\in E$ (mulțimea E este nevidă). Alegem $n\in\mathbb{N}$ suficient de mare, încât $\dfrac{x}{2^n}<a$ și $\dfrac{x}{2^{n+3}}<b-a$.

Etapa a II-a. „Ridicarea”: avem $\dfrac{x}{2^n}\in E$ și $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{2^n}\in E$. Din condiția (iv) scrisă pentru $\alpha:=1/2$ și x înlocuit cu $x/2^n$ rezultă că

$$\sqrt{1+\frac{k}{4}}\cdot\frac{x}{2^n}\in E\quad\text{pentru orice număr întreg } k\geq 0.$$

Fie $k \geq 0$ cel mai mare număr întreg cu proprietatea că

$$\sqrt{1+\frac{k}{4}} \cdot \frac{x}{2^n} \leq a.$$

Întrucât

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{k+1}{4}} \cdot \frac{x}{2^n} - \sqrt{1+\frac{k}{4}} \cdot \frac{x}{2^n} &= \frac{x}{2^n} \cdot \frac{1/4}{\sqrt{1+\frac{k+1}{4}}+\sqrt{1+\frac{k}{4}}} \\ &< \frac{x}{2^n} \cdot \frac{1/4}{2} = \frac{x}{2^{n+3}} < b-a,\end{aligned}$$

deducem că $\sqrt{1+\frac{k+1}{4}} \cdot \frac{x}{2^n} \in E \cap (a,b)$.

8. Fie $A := \{a_{n,m} \mid n,m \in \mathbb{N}\}$, unde $a_{n,m} := x_n - x_m$. Ținând seama că $a_{m,n} = -a_{n,m}$, rezultă că mulțimea A este simetrică față de origine. Drept urmare, este suficient să dovedim că A este densă în $[0,\infty)$, adică $A \cap (a,b) \neq \emptyset$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a < b$ (conform observației 1.1.6).

Etapa I. „Coborârea": deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ așa încât $x_{n+1} - x_n < b - a$ oricare ar fi $n \geq n_0$.

Etapa a II-a. „Ridicarea": considerăm șirul de puncte din A

$$a_{n_0,n_0} = 0,\ a_{n_0+1,n_0} = x_{n_0+1} - x_{n_0},\ \ldots,\ a_{n_0+k,n_0} = x_{n_0+k} - x_{n_0},\ \ldots.$$

Deoarece $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_0+k} - x_{n_0}) = \infty$, există un număr întreg $k \geq 0$, cel mai mare cu proprietatea $a_{n_0+k,n_0} \leq a$. Întrucât

$$a_{n_0+k+1,n_0} - a_{n_0+k,n_0} = x_{n_0+k+1} - x_{n_0+k} < b - a,$$

urmează că $a_{n_0+k+1,n_0} \in A \cap (a,b)$.

9. a) Exemple de mulțimi A, care satisfac condițiile (i) și (ii), sunt $A = [0,1]$, $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, precum și mulțimea numerelor diadice din $[0,1]$,

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ m = 0,1,\ldots,2^n \right\}.$$

b) Dovedim mai întâi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este adevărată propoziția

$P(n)$: „dacă $x \in A$, atunci $\frac{x+m}{2^n} \in A$ oricare ar fi $m \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$."

Întrucât $P(1)$ este chiar (ii), urmează că $P(1)$ este adevărată. Fie $n \geq 1$ un număr natural pentru care $P(n)$ este adevărată. Vom demonstra că și $P(n+1)$ este adevărată. Fie, în acest scop, $x \in A$ arbitrar ales. Deoarece $P(n)$ este adevărată, deducem că

$$\frac{x+m}{2^n} \in A \quad \text{oricare ar fi } m \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}. \tag{1}$$

Din (1), pe baza lui (ii) rezultă că

$$\frac{x+m}{2^{n+1}} \in A \quad \text{oricare ar fi } m \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\},$$

precum și că

$$\frac{\frac{x+m}{2^n} + 1}{2} = \frac{x + 2^n + m}{2^{n+1}} = \frac{x + m'}{2^{n+1}} \in A$$

oricare ar fi $m' \in \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. Altfel spus, avem

$$\frac{x+m}{2^{n+1}} \in A \quad \text{oricare ar fi } m \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\},$$

adică $P(n+1)$ este adevărată.

Pentru a dovedi că A este densă în $[0, 1]$, este suficient să demonstrăm că $A \cap (a, b) \neq \emptyset$ oricare ar fi $0 < a < b < 1$ (a se vedea observația 1.1.6).

Etapa I. „Coborârea": alegem un $x \in A$ (mulțimea A este nevidă) și alegem $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare, încât

$$\frac{x}{2^n} < a, \quad \frac{1}{2^n} < b - a \quad \text{și} \quad b < \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Etapa a II-a. „Ridicarea": are loc (1). Deoarece

$$\frac{x}{2^n} < a \quad \text{și} \quad \frac{x + 2^n - 1}{2^n} \geq \frac{2^n - 1}{2^n} > b,$$

rezultă că există un număr întreg unic m, astfel încât $0 \leq m < 2^n - 1$ și

$$\frac{x+m}{2^n} \leq a, \quad \text{dar} \quad \frac{x+m+1}{2^n} > a.$$

Avem $\dfrac{x+m+1}{2^n} < b$, deoarece, în caz contrar, am avea

$$b - a \leq \frac{x+m+1}{2^n} - \frac{x+m}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

în contradicție cu alegerea lui n. Prin urmare, $\dfrac{x+m+1}{2^n} \in A \cap (a,b)$.

10. Vom dovedi că singurele funcții continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu proprietatea

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1], \tag{1}$$

sunt cele constante. Evident, orice funcție constantă satisface (1). Reciproc, fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă care satisface (1). Notăm

$$M := \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{și} \quad A := \{x \in [a,b] \mid f(x) = M\}.$$

Conform teoremei lui Weierstrass, avem $M < \infty$ și $A \neq \emptyset$. Mai mult, din (1) rezultă imediat că mulțimea A are proprietățile (i) și (ii) din problema precedentă, deci A este densă în $[0,1]$.

Fie $x \in [0,1]$ arbitrar ales. Atunci $x \in \operatorname{cl} A$, deci există un șir (x_n), de puncte din A, astfel ca $(x_n) \to x$. Ținând seama de continuitatea lui f în punctul x, deducem că $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Cum x a fost un punct arbitrar din $[0,1]$, conchidem că $f(x) = M$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, adică f este constantă.

Observație. Propunem cititorului să încerce să demonstreze că singurele funcții integrabile Riemann $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu proprietatea (1), sunt de asemenea cele constante.

11. Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece f este continuă în x, există un $\delta > 0$ astfel încât $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ oricare ar fi $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Aplicând teorema lui Kronecker, deducem existența unor numere $m, n \in \mathbb{Z}$ în așa fel încât $n\alpha + m \in (x-\delta, x+\delta)$. Avem atunci $|f(n\alpha + m) - f(x)| < \varepsilon$. Dar $f(n\alpha + m) = f(m) = f(0)$, datorită periodicității lui f. Drept urmare, avem $|f(0) - f(x)| < \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă de aici că $f(x) = f(0)$. Am dovedit astfel că $f(x) = f(0)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică f este constantă.

12. a) Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) := f(x) - x$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $g(x+1) = f(x+1) - x - 1 = f(x) - x = g(x)$ și analog $g(x+\alpha) = g(x)$. Prin urmare, g admite drept perioade pe 1 și pe α. Cum g este continuă, problema **11** garantează că g este constantă.

b) Fie $\alpha := m/n$ un număr rațional arbitrar, cu $m \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$ și fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) := x + \sin(2n\pi x)$. Evident, f este continuă, satisface $f(x+1) = f(x) + 1$ și $f(x+\alpha) = f(x) + \alpha$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dar funcția $g(x) = f(x) - x = \sin(2n\pi x)$ nu este constantă.

13. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția continuă definită prin $g(t) := f(\sin t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui g.

a) Avem

$$0 = \int_0^1 f(\sin(x+\alpha))\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{\alpha+1} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = G(\alpha+1) - G(\alpha),$$

de unde $G(\alpha+1) = G(\alpha)$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$. Rezultă că G admite pe 1 drept perioadă, deci și g admite pe 1 drept perioadă. Pe de altă parte, g admite drept perioadă și numărul irațional 2π. Rezultatul problemei **11** asigură atunci că g este constantă, deci și f este constantă. Cum $\int_0^1 f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$, conchidem că $f = 0$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ avem

$$0 = \int_0^1 f(\sin nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^n f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{G(n) - G(0)}{n},$$

deci

$$G(n) = G(0) \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, cum

$$\Big(G(x+2\pi) - G(x)\Big)' = g(x+2\pi) - g(x) = 0 \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

deducem că există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$G(x+2\pi) - G(x) = c \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă imediat de aici că

$$G(x+2n\pi) - G(x) = nc \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și orice } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Deoarece funcția G este continuă în 0, există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (-\delta, \delta)$ să avem $|G(x) - G(0)| < 1$. Fie $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrar. Întrucât mulțimea $\{\, 2n\pi - m \mid n, m \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \,\}$ este densă în $\mathbb{R}$ (a se vedea teorema 1.2.5), există $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ în așa fel încât $2n\pi - m \in (-\delta, \delta)$. Ținând seama de (1) și (2), avem

$$1 > |G(2n\pi - m) - G(0)| = |nc + G(-m) - G(0)| = n|c| \geq n_0|c|,$$

de unde $|c| < 1/n_0$. Cum $n_0 \in \mathbb{N}$ a fost arbitrar, trebuie să avem $c = 0$. Drept urmare, G admite drept perioadă pe 2π. Rezultă atunci din (1) că

$$G(m + 2n\pi) = G(m) = G(0) \quad \text{oricare ar fi } m, n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece G este continuă în x, există un $\delta > 0$ astfel ca $|G(y) - G(x)| < \varepsilon$ pentru orice $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Aplicând teorema lui Kronecker, deducem existența unor numere $m, n \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $m + 2n\pi \in (x - \delta, x + \delta)$. În baza lui (3), rezultă că

$$|G(0) - G(x)| = |G(m + 2n\pi) - G(x)| < \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, conchidem că $G(x) = G(0)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică funcția G este constantă. Drept urmare, avem $g = 0$, de unde $f = 0$.

Capitolul 2

Mulţimi perfecte pe axa reală

2.1 Mulţimi perfecte

2.1.1 Definiţie (puncte de acumulare, puncte izolate)**.** Fie A o submulţime a lui $\mathbb{R}$. Un punct $x \in \mathbb{R}$ se numește *punct de acumulare* pentru A, dacă oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ avem $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Un punct $x \in A$ se numește *punct izolat* al mulțimii A, dacă există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \{x\}$. Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale lui A se notează cu A' și se numește *derivata* mulțimii A. Se arată ușor că

$$\begin{aligned} x \in A' \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, r > 0 \ :\ (x - r, x + r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, r > 0 \ \exists\, a \in A \setminus \{x\} \ :\ |x - a| < r. \end{aligned}$$

De asemenea, se constată imediat că dacă $x \in A'$, atunci mulțimea $V \cap A$ este infinită oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$.

2.1.2 Teoremă. *Fiind dată o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt adevărate:*
1° *Are loc egalitatea* $\operatorname{cl} A = A \cup A'$.
2° *A este închisă dacă și numai dacă $A' \subseteq A$.*

2.1.3 Definiţie (mulțimi perfecte)**.** O mulțime închisă și fără puncte izolate $A \subseteq \mathbb{R}$ (adică o mulțime cu proprietatea că $A = A'$) se numește *perfectă*.

2.1.4 Teoremă. *Orice submulțime perfectă nevidă a lui $\mathbb{R}$ este nenumărabilă.*

Demonstrație. Presupunem că există o mulțime perfectă nevidă numărabilă $A \subseteq \mathbb{R}$. Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ o enumerare a elementelor lui A. Notăm $n_1 := 1$ și $I_1 := \left(a_1 - \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{2}\right)$. Deoarece I_1 este vecinătate a punctului

$a_1 \in A = A'$, rezultă că mulțimea $I_1 \cap A$ este infinită. Fie $n_2 > n_1$ cel mai mic indice cu proprietatea că $a_{n_2} \in I_1$. Alegem un număr pozitiv $r_2 < 1/4$ astfel încât notând $I_2 := (a_{n_2} - r_2, a_{n_2} + r_2)$, să avem

$$\operatorname{cl} I_2 \subseteq I_1 \quad \text{și} \quad a_{n_1} \notin I_2.$$

Atunci avem

$$\ell(I_2) = 2r_2 < \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad a_n \notin I_2 \text{ pentru orice } n < n_2.$$

Deoarece I_2 este vecinătate a punctului $a_{n_2} \in A = A'$, rezultă că mulțimea $I_2 \cap A$ este infinită. Fie $n_3 > n_2$ cel mai mic indice cu proprietatea că $a_{n_3} \in I_2$. Alegem un număr pozitiv $r_3 < 1/6$ în așa fel încât notând $I_3 := (a_{n_3} - r_3, a_{n_3} + r_3)$, să avem

$$\operatorname{cl} I_3 \subseteq I_2 \quad \text{și} \quad a_{n_2} \notin I_3.$$

Atunci avem

$$\ell(I_3) = 2r_3 < \frac{1}{3} \quad \text{și} \quad a_n \notin I_3 \text{ pentru orice } n < n_3.$$

Continuând raționamentul, se construiește inductiv un șir strict crescător $(n_k)_{k \geq 1}$ de numere naturale, precum și un șir $(I_k)_{k \geq 1}$ de intervale cu următoarele proprietăți:

(i) $a_{n_k} \in I_k$, dar $a_n \notin I_k$ pentru orice $n < n_k$;

(ii) $\operatorname{cl} I_{k+1} \subseteq I_k$ și $\ell(I_k) < 1/k$ oricare ar fi $k \geq 1$.

Atunci $(\operatorname{cl} I_k)_{k \geq 1}$ este un șir descendent de intervale închise, cu șirul lungimilor tinzând către 0. Prin urmare, există un $a \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\bigcap_{k \geq 1} \big(\operatorname{cl} I_k\big) = \{a\}.$$

Atunci pentru orice $k \geq 1$ avem $a \in \operatorname{cl} I_k$ și $a_{n_k} \in I_k$, deci

$$|a_{n_k} - a| \leq \ell(\operatorname{cl} I_k) < 1/k.$$

Rezultă de aici că $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. Ținând seama de propoziția 1.1.4 și de afirmația 1° din teorema 2.1.2, deducem că $a \in \operatorname{cl} A = A$, deci există un $m \in \mathbb{N}$ pentru care $a = a_m$. Fie $k \geq 1$ un număr natural cu proprietatea $n_k > m$. Atunci, conform proprietății (i), avem $a = a_m \notin I_k$, deci $a \notin \operatorname{cl} I_k$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că mulțimea A este nenumărabilă. □

2.2 Mulțimea lui Cantor

Vom prezenta în continuare un exemplu celebru de mulțime perfectă, sursă a numeroase contraexemple în analiza matematică. Este vorba de mulțimea lui Georg Cantor (1845–1918). Se pornește de la intervalul închis $[0,1]$, care se împarte în trei subintervale egale și se elimină intervalul deschis $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ din mijloc. Se obține mulțimea

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Cu cele două intervale închise ale lui F_1 se procedează la fel: fiecare dintre ele se împarte în trei subintervale egale și se elimină intervalul deschis din mijloc. Se obține mulțimea

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Continuând acest procedeu, se obține un șir descendent de mulțimi

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots.$$

Din modul de construcție a mulțimilor $(F_n)_{n\geq 1}$ se deduce imediat că fiecare mulțime F_n este reuniunea a 2^n intervale închise disjuncte, fiecare astfel de interval având lungimea $1/3^n$. Prin urmare, fiecare mulțime F_n este închisă. *Mulțimea lui Cantor* va fi notată cu C și ea se definește prin

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Rezultă de aici că mulțimea C este închisă, fiind intersecția unei familii de mulțimi închise.

2.2.1 Teoremă. *Mulțimea C este egală cu mulțimea tuturor numerelor reale $x \in [0,1]$, cu proprietatea că există un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenii din mulțimea $\{0,2\}$, astfel ca $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.*

Altfel spus, mulțimea lui Cantor coincide cu mulțimea numerelor reale din $[0,1]$, a căror reprezentare în baza 3 conține doar cifrele 0 și 2. De exemplu, $7/9 \in C$ deoarece

$$\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 0,21_{(3)} = 0,20222\ldots_{(3)}.$$

În demonstrația teoremei 2.2.1 un rol esențial îl joacă următoarea lemă.

2.2.2 Lemă. *Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea*

$$F_n = \bigcup_{a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}} I_{a_1,a_2,\ldots,a_n},$$

unde $I_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ este intervalul $I_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}\right]$.

Demonstrație. Demonstrația este o simplă inducție matematică după $n \in \mathbb{N}$, bazată pe procedeul prin care se obține F_{n+1} din F_n. □

Demonstrația teoremei 2.2.1. Fie A mulțimea tuturor numerelor $x \in [0,1]$, cu proprietatea că există un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenii din mulțimea $\{0,2\}$, astfel ca $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Arătăm mai întâi că

$$C \subseteq A. \tag{1}$$

Fie $x \in C$ și fie $x = 0,a_1a_2\ldots_{(3)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ reprezentarea lui x în baza 3, cu $a_n \in \{0,1,2\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunând, prin absurd, că $x \notin A$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = 1$. Alegem $n \in \mathbb{N}$, **cel mai mic** număr natural cu proprietatea că $a_n = 1$. Atunci există cel puțin un $m > n$ astfel ca $a_m < 2$, deoarece, în caz contrar, am avea

$$x = 0,a_1\ldots a_{n-1}1222\ldots_{(3)} = 0,a_1\ldots a_{n-1}2_{(3)} \in A,$$

în contradicție cu presupunerea făcută.

Deoarece $x \in C$, trebuie să avem $x \in F_n$. Conform lemei 2.2.2, există $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0,2\}$ astfel ca $x \in I_{b_1,b_2,\ldots,b_n}$. Dovedim că $b_k = a_k$ oricare ar fi $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. Presupunând contrarul, fie $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ **cel mai mic** număr natural cu proprietatea $a_k \neq b_k$. Cum $a_k, b_k \in \{0,2\}$, rezultă că avem fie $a_k = 0$ și $b_k = 2$, fie $a_k = 2$ și $b_k = 0$. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a_k = 0$ și $b_k = 2$ (cazul $a_k = 2$ și $b_k = 0$ se tratează analog). Atunci avem

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{0}{3^k} + \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots \\ &< \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+2}} + \frac{2}{3^{k+3}} + \cdots \\ &= \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{1}{3^k}, \end{aligned}$$

deci
$$x < \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{2}{3^k} + \frac{b_{k+1}}{3^{k+1}} + \cdots + \frac{b_n}{3^n}.$$
Întrucât membrul drept al inegalității anterioare reprezintă tocmai capătul stâng al intervalului $I_{b_1,b_2,\ldots,b_n}$, deducem că $x \notin I_{b_1,b_2,\ldots,b_n}$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că $b_k = a_k$ pentru fiecare $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, deci $x \in I_{a_1,\ldots,a_{n-1}b_n}$.

Depinzând de b_n, avem două cazuri posibile: $b_n = 0$ sau $b_n = 2$. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $b_n = 2$ (cazul $b_n = 0$ se tratează similar). Atunci avem
$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{3^m} + \cdots \\ &< \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \cdots . \end{aligned}$$
Deoarece
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n},$$
deducem că
$$x < \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}.$$
Întrucât membrul drept al inegalității anterioare reprezintă tocmai capătul stâng al intervalului $I_{a_1,\ldots,a_{n-1}b_n}$, rezultă că $x \notin I_{a_1,\ldots,a_{n-1}b_n}$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că incluziunea (1) are loc.

Dovedim acum că
$$A \subseteq C. \tag{2}$$
Fie $x \in A$ arbitrar, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ cu $a_n \in \{0,2\}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru a arăta că $x \in C$ este suficient să demonstrăm că $x \in F_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $n \in \mathbb{N}$ arbitrar. Deoarece
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \le x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k},$$
rezultă că $x \in I_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$, deci $x \in F_n$ (conform lemei 2.2.2). Prin urmare, (2) are loc. Din (1) și (2) rezultă validitatea afirmației din enunț. $\square$

2.2.3 Teoremă. *Mulțimea lui Cantor este perfectă.*

Demonstrație. S-a văzut deja că mulțimea C este închisă. Rămâne să dovedim că ea nu are puncte izolate. Presupunând contrarul, ar exista $x \in C$ și $r > 0$ în așa fel încât $C \cap (x-r, x+r) = \{x\}$. Din teorema 2.2.1 rezultă că există un șir $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenii din mulțimea $\{0, 2\}$, în așa fel încât

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

Alegem $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $2/3^{n_0} < r$ și considerăm punctul $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{3^n}$, unde

$$\bar{a}_n = \begin{cases} a_n & \text{dacă } n \neq n_0 \\ 2 - a_n & \text{dacă } n = n_0. \end{cases}$$

Din teorema 2.2.1 deducem că $\bar{x} \in C$. Cum $|x - \bar{x}| = \frac{|a_{n_0} - \bar{a}_{n_0}|}{3^{n_0}} = \frac{2}{3^{n_0}} < r$, rezultă că $\bar{x} \in C \cap (x-r, x+r) \setminus \{x\}$, ceea ce este absurd. □

2.2.4 Observație. Din teoremele 2.2.3 și 2.1.4 rezultă că mulțimea lui Cantor este nenumărabilă. Acest fapt poate fi demonstrat și direct, cu ajutorul „metodei diagonale" inventate de Cantor. Presupunând, prin absurd, că mulțimea C este numărabilă, fie $C = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ o enumerare a elementelor sale. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un șir $\left(a_n^k\right)_{n\geq 1}$, cu termenii din mulțimea $\{0, 2\}$, astfel ca $x_k = 0, a_1^k a_2^k \ldots a_n^k \ldots_{(3)}$. Avem așadar șirul

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, \boxed{a_1^1}\, a_2^1 \ldots a_n^1 \ldots_{(3)} \\ x_2 & = & 0, a_1^2 \boxed{a_2^2} \ldots a_n^2 \ldots_{(3)} \\ \vdots & & \quad\quad \ddots \\ x_n & = & 0, a_1^n a_2^n \ldots \boxed{a_n^n} \ldots_{(3)} \\ \vdots & & \quad\quad\quad\quad \ddots \end{array}$$

Fie $\bar{x} := 0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \ldots_{(3)}$ numărul real având cifrele reprezentării în baza 3

$$\bar{a}_n := \begin{cases} 0 & \text{dacă } a_n^n = 2 \\ 2 & \text{dacă } a_n^n = 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

În baza teoremei 2.2.1, avem $\bar{x} \in C$. Pe de altă parte, nu putem avea $\bar{x} = x_1$ deoarece $|\bar{a}_1 - a_1^1| = 2$, nu putem avea $\bar{x} = x_2$ deoarece $|\bar{a}_2 - a_2^2| = 2$, ..., nu putem avea $\bar{x} = x_n$ deoarece $|\bar{a}_n - a_n^n| = 2$, ... Contradicția obținută arată că mulțimea C este nenumărabilă.

2.2.5 Observație. Se poate demonstra mai mult și anume că $|C| = \mathfrak{c}$, unde $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$. Într-adevăr, deoarece funcția $\forall\ x \in C \mapsto x \in [0,1]$ este injectivă, avem $|C| \leq |[0,1]| = \mathfrak{c}$. Pentru a construi o funcție injectivă de la $[0,1]$ la C, reprezentăm fiecare număr real $y \in [0,1]$ în baza 2: $y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots_{(2)}$, cu convenția că, în caz de ambiguitate, reprezentarea binară se încheie cu o infinitate de zerouri. Punem $a_n := 2b_n$ și definim

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots_{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} .$$

Atunci avem $x \in C$, conform teoremei 2.2.1. Am construit astfel o funcție injectivă de la $[0,1]$ la C. Drept urmare, avem $\mathfrak{c} = |[0,1]| \leq |C|$. Aplicând acum teorema lui Schröder–Bernstein, deducem că $|C| = \mathfrak{c}$.

2.3 Aplicație

În încheierea acestui capitol vom prezenta soluția unei probleme de la olimpiada de matematică a studenților din Republica Moldova, din anul 1998.

2.3.1 Aplicație. Poate fi reprezentat intervalul $[0,1]$ ca reuniune de intervale închise, disjuncte două câte două și de lungimi pozitive, mai mici decât 1 ?

Soluție. Răspunsul este NU.

Să presupunem, prin absurd, că $[0,1] = \bigcup\limits_{j \in J} [a_j, b_j]$, unde $\big([a_j, b_j]\big)_{j \in J}$ este o familie de intervale disjuncte două câte două, cu proprietatea $0 < b_j - a_j < 1$ oricare ar fi $j \in J$. Alegând pentru fiecare $j \in J$ un număr rațional $q_j \in [a_j, b_j]$, obținem o funcție injectivă

$$\forall\ j \in J \ \mapsto\ q_j \in \mathbb{Q} \cap [0,1],$$

deci $|J| \leq |\mathbb{Q} \cap [0,1]| = \aleph_0$. Cum, evident, mulțimea J nu poate fi finită, rezultă că J are cardinalul $\aleph_0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $J = \mathbb{N}$, deci $[0,1] = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$. De asemenea, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a_1 = 0$ și $b_2 = 1$. Considerăm mulțimea

$$A := \{b_1, a_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots\}.$$

Întrucât

$$A = \mathbb{R} \setminus \Big((-\infty, b_1) \cup (a_2, \infty) \cup (a_3, b_3) \cup (a_4, b_4) \cup \cdots \Big),$$

rezultă că mulțimea A este închisă. Arătăm că A nu are puncte izolate. Presupunând contrarul, ar exista un $a \in A$ și un $r > 0$ în așa fel încât să avem $A \cap (a - r, a + r) = \{a\}$. Sunt posibile două situații.

Cazul I. a este capătul stâng al unui interval $[a_n, b_n]$. Atunci intervalul $(a - r, a)$ nu are puncte comune cu nici un interval $[a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$, ceea ce este absurd.

Cazul II. a este capătul drept al unui interval $[a_n, b_n]$. Atunci intervalul $(a, a + r)$ nu are puncte comune cu nici un interval $[a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$, ceea ce este absurd.

În concluzie, A este o submulțime perfectă a lui $\mathbb{R}$. Cum $|A| = \aleph_0$, am obținut o contradicție cu teorema 2.1.4. $\square$

Capitolul 3

Șiruri și serii de funcții

3.1 Convergență punctuală vs convergență uniformă

Fiind date o mulțime nevidă A și un șir de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, există mai multe moduri în care poate fi înțeleasă afirmația „șirul (f_n) converge către o funcție f". Două dintre ele vor fi prezentate în continuare.

3.1.1 Definiție (convergența punctuală a unui șir de funcții)**.** Fie șirul de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, fie C mulțimea tuturor punctelor $x \in A$ pentru care șirul de numere reale $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este convergent și fie $f : C \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Mulțimea C se numește *mulțimea de convergență* a șirului (f_n), iar funcția f se numește *limita punctuală* a șirului (f_n). Se spune că șirul de funcții (f_n) *converge punctual către f pe C*. Acest fapt va fi notat prin

$$(f_n) \to f \text{ pe } C.$$

Așadar $(f_n) \to f$ pe C dacă și numai dacă $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ oricare ar fi $x \in C$, adică dacă și numai dacă

$$\forall\, x \in C \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0 \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

3.1.2 Observație. Din păcate, limita punctuală a unui șir de funcții nu conservă proprietățile de regularitate ale termenilor șirului. Să considerăm, de exemplu, șirul $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, $f_n(x) := x^n$. Mulțimea lui de convergență este $C := (-1, 1]$, iar limita punctuală este funcția

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-1,1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Deși toate funcțiile f_n sunt continue pe C, limita f este discontinuă în punctul $x = 1$. Acest inconvenient al convergenței punctuale a impus introducerea unui concept mai puternic, dar totodată mai restrictiv.

3.1.3 Definiție (convergența uniformă a unui șir de funcții)**.** Fie șirul de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ și fie C_0 o submulțime nevidă a lui A. Se spune că șirul (f_n) *converge uniform pe* C_0 către o funcție $f : C_0 \to \mathbb{R}$ dacă

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall\ n \geq n_0\ \ \forall\ x \in C_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Faptul că (f_n) converge uniform către f pe C_0 va fi notat prin

$$(f_n) \rightrightarrows f \text{ pe } C_0.$$

3.1.4 Observație (convergența punctuală vs convergența uniformă)**.** Comparând definițiile 3.1.1 și 3.1.3, observăm că:

1° Dacă $(f_n) \rightrightarrows f$ pe $C_0 \subseteq A \quad \Rightarrow \quad (f_n) \to f$ pe C_0.

2° Dacă $(f_n) \to f$ pe $C \subseteq A \quad \not\Rightarrow \quad (f_n) \rightrightarrows f$ pe C.

3° Rangul n_0 în definiția convergenței uniforme depinde numai de ε, în timp ce în definiția convergenței punctuale el depinde atât de ε, cât și de x. Drept urmare, conceptul de convergență uniformă este mai restrictiv decât cel de convergență punctuală.

3.1.5 Definiție (norma uniformă)**.** Fiind dată o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, elementul din $[0, \infty]$, definit prin $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$, se numește *norma uniformă* a lui f. Cu ajutorul normei uniforme putem reformula convergența uniformă a unui șir $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ către f astfel:

$$(f_n) \rightrightarrows f \text{ pe } A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

3.1.6 Observație. Următorul algoritm poate fi folosit pentru studiul convergenței unui șir de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$:

Pasul 1. Se determină mulțimea de convergență

$$C := \{x \in A \mid \text{șirul } (f_n(x)) \text{ este convergent}\}$$

și limita punctuală $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Atunci

$$(f_n) \to f \text{ pe } C.$$

Pasul 2. Pentru fiecare număr natural n se determină

$$a_n := \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in C} |f_n(x) - f(x)| \in [0, \infty].$$

Dacă $(a_n) \to 0$, atunci $(f_n) \rightrightarrows f$ pe C. În caz contrar, $(f_n) \not\rightrightarrows f$ pe C.

3.1.7 Definiție (serii de funcții și convergența punctuală a acestora)**.** Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții și fie $s_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul definit prin

$$s_n(x) := f_1(x) + \cdots + f_n(x), \quad x \in A, \ n \geq 1. \tag{1}$$

Perechea de șiruri $((f_n), (s_n))$ se numește *serie de funcții* de termen general f_n și va fi notată cu $\sum_{n\geq 1} f_n$. Fie C mulțimea tuturor punctelor $x \in A$ pentru care seria de numere reale $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este convergentă și fie $s : C \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Mulțimea C se numește *mulțimea de convergență* a seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$, iar funcția s se numește *suma* seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$. Se spune că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge punctual către s pe C.*

Observăm că mulțimea C, de convergență a seriei de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este tocmai mulțimea de convergență a șirului de funcții (s_n). Pe de altă parte, suma s este limita punctuală a șirului (s_n). Prin urmare,

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge punctual către } s \text{ pe } C \quad \Leftrightarrow \quad (s_n) \to s \text{ pe } C.$$

3.1.8 Definiție (converegența uniformă a unei serii de funcții)**.** Fie șirul de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ și fie $C_0 \subseteq A$. Se spune că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge uniform pe C_0* către o funcție $s : C_0 \to \mathbb{R}$ dacă șirul de funcții (s_n), definit prin (1), converge uniform către s pe C_0:

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniform către } s \text{ pe } C_0 \quad \Leftrightarrow \quad (s_n) \rightrightarrows s \text{ pe } C_0.$$

3.1.9 Observație. Mulțimea de convergență a unei serii de funcții poate avea o structură foarte complicată (a se vedea exemplul următor). În contrast cu acest fapt, vom vedea în secțiunea următoare că mulțimea de convergență a unei serii de puteri este întotdeauna un interval.

3.1.10 Exemplu. Fie C mulțimea de convergență a seriei de funcții

$$\sum_{n\geq 1} \sin^2(2\pi n! x). \tag{2}$$

Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1° $\mathbb{Q} \subset C$, dar $C \neq \mathbb{Q}$.

2° Există o submulțime densă A a lui $\mathbb{R}$ astfel încât $A \subseteq \mathbb{R} \setminus C$.

Demonstrație. 1° Dacă $x = p/q$ este un număr rațional arbitrar, cu $p, q \in \mathbb{Z}$ și $q \neq 0$, atunci pentru orice număr natural $n \geq |q|$ avem $\sin^2(2\pi n!x) = 0$, deci seria (2) converge. Prin urmare, incluziunea $\mathbb{Q} \subset C$ are loc. Pentru a dovedi că $C \neq \mathbb{Q}$, vom arăta că $e \in C$. Este binecunoscut faptul că pentru orice $n \geq 1$ există un punct $\theta_n \in (0,1)$ în așa fel încât

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}\,.$$

Deducem de aici că

$$\begin{aligned} 2\pi n!e &= 2\pi n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right) \\ &= 2\pi k_n + \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\,, \end{aligned}$$

unde $k_n := n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ este un număr natural, iar $\theta_{n+1} \in (0,1)$. Cum $\sin^2 x = O(x^2)$ când $x \to 0$, rezultă că

$$\begin{aligned} \sin^2(2\pi n!e) &= \sin^2\left(\frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right) = O\left(\left(\frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)^2\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{când } n \to \infty. \end{aligned}$$

În consecință, seria $\sum_{n\geq 1} \sin^2(2\pi n!e)$ are aceeași natură ca și seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, care este convergentă. Am dovedit astfel că $e \in C$.

2° Vom demonstra mai întâi că $e/3 \notin C$. În adevăr, pentru orice număr natural $n > 3$ există un $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca

$$\begin{aligned} 2\pi n!\,\frac{e}{3} &= 2\pi\,\frac{n!}{3}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-3)!}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}\right) \\ &= 2\pi m_n + \frac{2\pi}{3}\,(n(n-1) + n + 1) + \frac{2\pi\theta_n}{3n}\,, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} m_n &:= \frac{n!}{3}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-3)!}\right) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\,(n-3)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-3)!}\right) \end{aligned}$$

este număr natural. Drept urmare, avem

$$\sin^2\left(2\pi n!\,\frac{e}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\,(n^2+1) + \frac{2\pi\theta_n}{3n}\right).$$

Dacă $n \equiv 0 \pmod 3$, atunci $n^2+1 \equiv 1 \pmod 3$, deci

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\equiv 0 \pmod 3}} \sin^2\left(2\pi n!\,\frac{e}{3}\right) = \sin^2\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}\,.$$

În consecință, seria $\sum\limits_{n\geq 1}\sin^2\left(2\pi n!\,\dfrac{e}{3}\right)$ este divergentă, adică $e/3 \notin C$.

Considerăm mulțimea A, definită prin

$$A := \{e/3\} + \mathbb{Q} = \left\{\frac{e}{3} + x \;\middle|\; x \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Dacă $x = p/q$ este un număr rațional arbitrar, cu $p, q \in \mathbb{Z}$ și $q \neq 0$, atunci pentru orice număr natural $n \geq |q|$ avem

$$\sin^2\left(2\pi n!\left(\frac{e}{3} + x\right)\right) = \sin^2\left(2\pi n!\,\frac{e}{3}\right),$$

deci $\frac{e}{3} + x \notin C$. Rezultă că $A \subseteq \mathbb{R}\setminus C$, iar A este evident o submulțime densă a lui $\mathbb{R}$. $\square$

3.2 Criterii de convergență uniformă

3.2.1 Teoremă (criteriul de convergență uniformă al lui A. L. Cauchy)**.** *Fiind date un șir de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ și o mulțime nevidă $C_0 \subseteq A$, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Șirul de funcții (f_n) converge uniform pe C_0 dacă și numai dacă*

(1) $\quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *a.î.* $\forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in C_0\ :\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$

2° *Seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe C_0 dacă și numai dacă*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \textit{a.î.}\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in C_0\ : |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Demonstrație. 1° *Necesitatea.* Admitem că șirul (f_n) converge uniform pe C_0. Atunci există o funcție $f : C_0 \to \mathbb{R}$, cu următoarea proprietate:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \text{a.î.}\ \forall\, n \geq n_0\ \ \forall\, x \in C_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci pentru orice $n \geq n_0$, orice $p \geq 1$ și orice $x \in C_0$ avem

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suficiența. Admitem acum că (1) are loc. Atunci pentru orice $x \in C_0$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este fundamental, deci convergent. Fie $f : C_0 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Vom arăta că $(f_n) \rightrightarrows f$ pe C_0. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Din (1) rezultă că

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in C_0\ :\ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Făcând $p \to \infty$, deducem că

$$\forall\, n \geq n_0\ \forall\, x \in C_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

În consecință, $(f_n) \rightrightarrows f$ pe C_0.

2° Rezultă din afirmația 1°, aplicată șirului $s_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definit prin $s_n(x) := f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ oricare ar fi $x \in A$. □

3.2.2 Teoremă (criteriul de convergență uniformă al lui K. Weierstrass)**.** *Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții, Fie C_0 o submulțime nevidă a lui A, fie $f : C_0 \to \mathbb{R}$ o funcție și fie (a_n) un șir de numere reale. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *și există* $m_0 \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$\forall\, n \geq m_0\ \forall\, x \in C_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

atunci $(f_n) \rightrightarrows f$ pe C_0.

2° *Dacă seria de numere reale $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă și există $m_0 \in \mathbb{N}$ așa încât $|f_n(x)| \leq a_n$ pentru orice $n \geq m_0$ și orice $x \in C_0$, atunci seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe C_0.*

Demonstrație. 1° Această afirmație este evidentă.

2° Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Deoarece seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă, criteriul general de convergență al lui Cauchy garantează că există $n_0 \in \mathbb{N}$ (și fără a restrânge generalitatea putem presupune că $n_0 \geq m_0$) cu proprietatea că pentru orice $n \geq n_0$ și orice $p \geq 1$ avem $a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$. Atunci pentru orice $n \geq n_0$, orice $p \geq 1$ și orice $x \in C_0$ avem

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Aplicând partea de suficiență a criteriului lui Cauchy (teorema 3.2.1), conchidem că seria funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe C_0. □

3.2.3 Teoremă (criteriul de convergență uniformă al lui U. Dini)**.** *Fie a și b numere reale, $a < b$, fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții și fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție în așa fel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:*

(i) *pentru orice $n \in \mathbb{N}$ funcția f_n este continuă pe $[a, b]$;*

(ii) *pentru orice $x \in [a, b]$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este crescător;*

(iii) *f este continuă pe $[a, b]$;*

(iv) *$(f_n) \to f$ pe $[a, b]$.*

Atunci $(f_n) \rightrightarrows f$ pe $[a, b]$.

Demonstrație. Întrucât șirul $(f_n(x))$ este crescător și $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, rezultă că

$$f_n(x) \leq f(x) \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } x \in [a, b].$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ notăm $a_n := \|f_n - f\|_\infty$. Ținând seama de observația anterioară și de teorema lui Weierstrass, avem

$$a_n = \max_{x\in[a,b]} \big(f(x) - f_n(x)\big).$$

Cum $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [a, b]$, deducem că

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Avem de arătat că $(a_n) \to 0$. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru fiecare număr natural n alegem $x_n \in [a, b]$ astfel ca $a_n = f(x_n) - f_n(x_n)$. Conform teoremei lui Cesáro, șirul mărginit (x_n) posedă un subșir (x_{n_k}), convergent către un $x^* \in [a, b]$. Cum $\lim_{n\to\infty} f_n(x^*) = f(x^*)$, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$f(x^*) - f_n(x^*) = |f_n(x^*) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0.$$

În particular, avem $f(x^*) - f_{n_0}(x^*) < \varepsilon/2$. Deoarece funcția $f - f_{n_0}$ este continuă în punctul x^*, există un $\delta > 0$ așa încât pentru orice $x \in [a, b]$ cu $|x - x^*| < \delta$ să avem

$$\big|\big(f(x) - f_{n_0}(x)\big) - \big(f(x^*) - f_{n_0}(x^*)\big)\big| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Atunci oricare ar fi $x \in [a, b]$ cu $|x - x^*| < \delta$ avem

$$f(x) - f_{n_0}(x) < f(x^*) - f_{n_0}(x^*) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Întrucât $(x_{n_k}) \to x^*$, putem alege un număr natural k în așa fel încât să avem $n_k \geq n_0$ și $|x_{n_k} - x^*| < \delta$. Atunci

$$a_{n_k} = f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \leq f(x_{n_k}) - f_{n_0}(x_{n_k}) < \varepsilon.$$

Ținând seama că șirul (a_n) este descrescător, deducem că $0 \leq a_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_k$. Cum ε a fost arbitrar, conchidem că $(a_n) \to 0$. □

3.2.4 Definiție (șiruri de funcții mărginite uniform)**.** Se spune că un șir de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ este *mărginit uniform*, dacă există un număr real $M \geq 0$ astfel ca

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq M \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

3.2.5 Teoremă (criteriul de convergență uniformă al lui P. G. L. Dirichlet)**.** *Fie $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șiruri de funcții care îndeplinesc următoarele condiții:*

(i) *pentru fiecare $x \in A$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este monoton;*

(ii) $(f_n) \rightrightarrows 0$ *pe A;*

(iii) *șirul de funcții $\sigma_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definit prin*

$$\sigma_n(x) := g_1(x) + \cdots + g_n(x), \quad x \in A, \ n \geq 1.$$

este mărginit uniform.

Atunci seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n g_n$ converge uniform pe A.

Demonstrație. Din (iii) rezultă existența unui număr real $M > 0$ cu proprietatea că

$$(2) \qquad |\sigma_n(x)| \leq M \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } x \in A.$$

Vom dovedi convergența uniformă a seriei de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n g_n$ cu ajutorul teoremei 3.2.1 (criteriul de convergență uniformă al lui Cauchy). Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Din (ii) rezultă existența unui număr natural n_0 astfel ca

$$(3) \qquad |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{pentru orice } n \geq n_0 \text{ și orice } x \in A.$$

Fie acum $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $x \in A$ arbitrar alese. Avem

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + f_{n+2}(x)g_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\\
&\quad = f_{n+1}(x)\big(\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)\big) + f_{n+2}(x)\big(\sigma_{n+2}(x) - \sigma_{n+1}(x)\big) + \cdots\\
&\qquad + f_{n+p}(x)\big(\sigma_{n+p}(x) - \sigma_{n+p-1}(x)\big)\\
&\quad = \sigma_{n+1}(x)\big(f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)\big) + \sigma_{n+2}(x)\big(f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x)\big) + \cdots\\
&\qquad + \sigma_{n+p-1}(x)\big(f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)\big)\\
&\qquad + \sigma_{n+p}(x)f_{n+p}(x) - \sigma_n(x)f_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Ținând seama de (2), deducem că

$$\begin{aligned}
&\big|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\big|\\
&\quad \leq M\big(|f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)|\big)\\
&\qquad + M|f_{n+p}(x)| + M|f_{n+1}(x)|.
\end{aligned}$$

Din (i) rezultă că

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)| &= |f_{n+1}(x) - f_{n+p}(x)|\\
&\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+p}(x)|,
\end{aligned}$$

deci

$$\big|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\big| \leq 2M(|f_{n+1}(x)| + |f_{n+p}(x)|) < \varepsilon,$$

conform lui (3). Aplicând partea de suficiență a teoremei 3.2.1, conchidem că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n g_n$ converge uniform pe A. □

3.2.6 Consecință (criteriul de convergență uniformă al lui G. W. Leibniz). *Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *pentru fiecare $x \in A$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este monoton;*

(ii) $(f_n) \rightrightarrows 0$ *pe A.*

Atunci seria de funcții $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$ converge uniform pe A.

3.2.7 Teoremă (criteriul de convergență uniformă al lui N. H. Abel). *Fie șirurile de funcții $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, care îndeplinesc următoarele condiții:*

(i) *pentru fiecare $x \in A$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este monoton;*

(ii) *șirul (f_n) este mărginit uniform;*

(iii) *seria de funcții* $\sum_{n\geq 1} g_n$ *converge uniform pe* A.

Atunci seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n g_n$ *converge uniform pe* A.

Demonstrație. Din (ii) rezultă existența unui număr real $M > 0$ cu proprietatea că

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } x \in A. \tag{4}$$

Vom dovedi convergența uniformă a seriei de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n g_n$ cu ajutorul teoremei 3.2.1 (criteriul de convergență uniformă al lui Cauchy). Fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Pentru fiecare număr natural n definim funcția $\sigma_n : A \to \mathbb{R}$ prin

$$\sigma_n(x) := g_1(x) + \cdots + g_n(x).$$

Din (iii), în baza părții de necesitate a criteriului lui Cauchy, rezultă existența unui număr natural n_0 cu proprietatea că

$$|\sigma_{n+p}(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in A. \tag{5}$$

Fie acum $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $x \in A$ arbitrar alese. Avem

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + f_{n+2}(x)g_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\\
&\quad = f_{n+1}(x)\big(\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)\big) + f_{n+2}(x)\big(\sigma_{n+2}(x) - \sigma_{n+1}(x)\big) + \cdots\\
&\qquad + f_{n+p}(x)\big(\sigma_{n+p}(x) - \sigma_{n+p-1}(x)\big)\\
&\quad = \sigma_{n+1}(x)\big(f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)\big) + \sigma_{n+2}(x)\big(f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x)\big) + \cdots\\
&\qquad + \sigma_{n+p-1}(x)\big(f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)\big)\\
&\qquad + \sigma_{n+p}(x)f_{n+p}(x) - \sigma_n(x)f_{n+1}(x),
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\\
&\quad = \big(\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)\big)\big(f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)\big) + \cdots\\
&\qquad + \big(\sigma_{n+p-1}(x) - \sigma_n(x)\big)\big(f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)\big)\\
&\qquad + \big(\sigma_{n+p}(x) - \sigma_n(x)\big)f_{n+p}(x).
\end{aligned}$$

Ținând seama de (5), deducem că

$$\begin{aligned}
&\big|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\big|\\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{3M}\big(|f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x)|\big).
\end{aligned}$$

Din (i) rezultă că

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)| &= |f_{n+1}(x) - f_{n+p}(x)| \\ &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+p}(x)|, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \big|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)\big| &\leq \frac{\varepsilon}{3M}\big(|f_{n+1}(x)| + 2|f_{n+p}(x)|\big) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

conform lui (4). Aplicând partea de suficiență a teoremei 3.2.1, conchidem că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n g_n$ converge uniform pe A. □

3.3 Proprietăți ale limitei unui șir de funcții

3.3.1 Teoremă (continuitatea)**.** *Fie A o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$ și fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții care converge uniform pe A către funcția $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă toate funcțiile f_n $(n \geq 1)$ sunt continue pe A, atunci și f este continuă pe A.*

Demonstrație. Fie a un punct arbitrar al lui A. Pentru a dovedi continuitatea lui f în a, fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Cum $(f_n) \rightrightarrows f$ pe A, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ așa încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pentru orice } n \geq n_0 \text{ și orice } x \in A.$$

În particular, pentru $n = n_0$ avem

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{oricare ar fi } x \in A.$$

Deoarece funcția f_{n_0} este continuă în a, există un $\delta > 0$ astfel ca

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{oricare ar fi } x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta.$$

Atunci pentru orice $x \in A$ cu $|x - a| < \delta$, avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Drept urmare, f este continuă în a. □

3.3.2 Teoremă (derivabilitatea)**.** *Presupunem că $A \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, iar $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ este un șir de funcții care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *există un punct $a \in A$ cu proprietatea că șirul de numere reale $(f_n(a))$ este convergent;*

(ii) *f_n este derivabilă pe A pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) *șirul (f_n') converge uniform pe A.*

Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1° *Șirul (f_n) converge uniform pe orice interval mărginit inclus în A. În particular, (f_n) converge punctual pe A.*

2° *Limita punctuală $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ este derivabilă pe A și are loc egalitatea*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \textit{oricare ar fi } x \in A.$$

Demonstrație. 1° Fie $\varphi_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții definite prin

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\} \\[2ex] f_n'(a) & \text{dacă } x = a. \end{cases}$$

Întrucât toate funcțiile f_n sunt derivabile pe A, rezultă că toate funcțiile φ_n sunt continue pe A.

Etapa I. Demonstrăm că șirul (φ_n) converge uniform pe A.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Condiția (iii) și teorema 3.2.1 (criteriul de convergență uniformă al lui Cauchy) asigură existența unui număr $n_0 \in \mathbb{N}$ în așa fel încât

$$(1) \qquad |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in A.$$

Vom demonstra că

$$(2) \qquad |\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in A.$$

Pentru $x = a$, (2) se reduce la (1). Presupunem în continuare că $x \neq a$. Atunci pentru orice $n \geq n_0$, orice $p \geq 1$ și orice $x \in A$ avem

$$\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x) = \frac{\big(f_{n+p}(x) - f_n(x)\big) - \big(f_{n+p}(a) - f_n(a)\big)}{x - a}.$$

Aplicând teorema de medie funcției $f_{n+p} - f_n$, deducem existența unui punct c_x, situat între a și x, astfel ca

$$\frac{\big(f_{n+p}(x) - f_n(x)\big) - \big(f_{n+p}(a) - f_n(a)\big)}{x - a} = f'_{n+p}(c_x) - f'_n(c_x).$$

Ținând seama de (1), avem

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| = |f'_{n+p}(c_x) - f'_n(c_x)| < \varepsilon,$$

deci (2) are loc. Aplicând criteriul lui Cauchy, rezultă că șirul (φ_n) converge uniform pe A.

Etapa a II-a. Demonstrăm că șirul (f_n) converge uniform pe orice interval mărginit inclus în A.

Fie $I \subseteq A$ un interval mărginit și fie $\ell := \sup\{|x - a| \mid x \in I\}$. Fie apoi $\varepsilon > 0$. Cum șirul $(f_n(a))$ este convergent, el este fundamental, deci există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_{n+p}(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pentru orice } n \geq n_1 \text{ și orice } p \geq 1.$$

Deoarece șirul (φ_n) converge uniform pe I, există $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\ell + 1} \quad \forall\, n \geq n_2\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in I.$$

Notăm $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Atunci pentru orice $n \geq n_0$, orice $p \geq 1$ și orice $x \in I$ avem

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |(f_{n+p}(a) + (x-a)\varphi_{n+p}(x)) - (f_n(a) + (x-a)\varphi_n(x))| \\ &\leq |f_{n+p}(a) - f_n(a)| + |x - a|\,|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \ell\,\frac{\varepsilon}{2\ell+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Criteriul de convergență uniformă al lui Cauchy garantează că șirul (f_n) converge uniform pe I.

2° Fie $g := \lim_{n\to\infty} f'_n$. Trebuie să dovedim că f este derivabilă pe A și că $f' = g$. Este suficient să demonstrăm că f este derivabilă în a și că $f'(a) = g(a)$. Într-adevăr, dacă x este un alt punct al lui A, atunci șirul $(f_n(x))$ este convergent. Drept urmare, condițiile (i) – (iii) sunt satisfăcute cu a înlocuit cu x și este suficient să repetăm pentru x raționamentul pe care îl vom face în continuare pentru a.

Fie $\varphi := \lim_{n\to\infty} \varphi_n$. Întrucât toate funcțiile φ_n sunt continue pe A, iar șirul (φ_n) converge uniform pe A, în baza teoremei 3.3.1 rezultă că φ este continuă pe A, deci

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a).$$

Dar

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) = \lim_{n\to\infty} f_n'(a) = g(a),$$

iar

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

oricare ar fi $x \in A \setminus \{a\}$. Aceste egalități arată că există

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(a).$$

Cu alte cuvinte, f este derivabilă în a și $f'(a) = g(a)$. □

3.3.3 Observație. Egalitatea $\lim_{n\to\infty} f_n' = f'$ din concluzia teoremei 3.3.2 poate fi scrisă sub forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Această egalitate arată că în anumite condiții (și anume ipotezele teoremei 3.3.2) se poate trece la limită sub semnul operatorului de derivare.

3.3.4 Teoremă (integrabilitatea)**.** *Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *f_n este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *șirul (f_n) converge uniform pe $[a,b]$ către o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Atunci f este integrabilă Riemann, există limita $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ și are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Notăm $I_n := \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ $(n \geq 1)$. Demonstrăm mai întâi că șirul (I_n) este convergent. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din (ii) și teorema 3.2.1 (criteriul de convergență uniformă al lui Cauchy) rezultă existența unui $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\, n \geq n_0\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in [a,b].$$

Atunci pentru orice $n \geq n_0$ și orice $p \geq 1$ avem

$$\begin{aligned} |I_{n+p} - I_n| &= \left| \int_a^b \big(f_{n+p}(x) - f_n(x)\big)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prin urmare, șirul (I_n) este fundamental, deci convergent. Fie $I := \lim_{n\to\infty} I_n$.

Rămâne să arătăm că f este integrabilă Riemann și că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$. Pentru aceasta, fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Atunci există un $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pentru orice } n \geq n_1$$

și există un $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{pentru orice } n \geq n_2 \text{ și orice } x \in [a,b].$$

Alegem un număr natural $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Întrucât f_n este integrabilă Riemann și $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = I_n$, rezultă că există un $\delta > 0$ în așa fel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice sistem de puncte intermediare $\xi \in P(\Delta)$ să avem

$$|\sigma(f_n, \Delta, \xi) - I_n| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ o diviziune oarecare a lui $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și fie $\xi := (c_1, \ldots, c_k) \in P(\Delta)$. Avem

$$\begin{aligned} |\sigma(f,\Delta,\xi) - I| &\leq |\sigma(f,\Delta,\xi) - \sigma(f_n,\Delta,\xi)| + |\sigma(f_n,\Delta,\xi) - I_n| + |I_n - I| \\ &< \left| \sum_{j=1}^k \big(f(c_j) - f_n(c_j)\big)(x_j - x_{j-1}) \right| + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{j=1}^k \big|f(c_j) - f_n(c_j)\big|(x_j - x_{j-1}) + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

3.3.5 Observație. Egalitatea $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ din concluzia teoremei 3.3.4 poate fi scrisă sub forma

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Această egalitate arată că în anumite condiții (și anume ipotezele teoremei 3.3.4) se poate trece la limită sub semnul integralei. Problema validității acestei egalități (în ipoteze mai puțin restrictive decât convergența uniformă a șirului (f_n)) va fi reluată în capitolul **Teoreme de convergență în calculul integral**.

3.4 Proprietăți ale sumei unei serii de funcții

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții. Aplicând teoremele 3.3.1, 3.3.2 și 3.3.4 șirului de funcții $s_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin $s_n(x) := f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, se deduc rezultatele următoare.

3.4.1 Teoremă (continuitatea)**.** *Dacă toate funcțiile f_n $(n \geq 1)$ sunt continue pe A, iar seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe A către o funcție s, atunci s este continuă pe A.*

3.4.2 Teoremă (derivabilitatea)**.** *Presupunem că $A \subseteq \mathbb{R}$ este un interval și că funcțiile f_n îndeplinesc următoarele condiții:*

(i) *există un punct $a \in A$ așa încât seria de numere reale $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ este convergentă;*

(ii) *f_n este derivabilă pe A pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) *seria $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniform pe A.*

Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1° *Seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe orice interval mărginit inclus în A. În particular, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge punctual pe A.*

2° *Suma $s : A \to \mathbb{R}$, $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este derivabilă pe A și are loc egalitatea*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \textit{oricare ar fi } x \in A.$$

3.4.3 Observație. Egalitatea de mai sus poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x).$$

3.4.4 Teoremă (integrabilitatea)**.** *Fie* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ *un şir de funcţii care îndeplineşte următoarele condiţii:*

(i) f_n *este integrabilă Riemann pe* $[a, b]$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) *seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către o funcţie* $s : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Atunci s *este integrabilă Riemann, seria de numere reale* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă şi are loc egalitatea*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x.$$

3.4.5 Observaţie. Egalitatea de mai sus poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x.$$

3.5 Probleme

3.5.1 Şiruri de funcţii

1. Să se studieze convergenţa şirului de funcţii (f_n), dacă:

1) $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$;

2) $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$;

3) $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$;

4) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \dfrac{x}{x + n}$;

5) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$;

6) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^4}$;

7) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x \operatorname{arctg}(nx)$;

8) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1 + x^{2n})^n}$;

Concursul Traian Lalescu, 1986

9) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{|x^2-1| + |x+2|e^{nx}}{|x+3| + |x^2-3x+2|e^{nx}}$;

10) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4}$;

11) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$;

12) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = x^n - x^{2n}$;

13) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$;

14) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții de termen general $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. Se cere:

a) Să se determine mulțimea de convergență și limita punctuală f a șirului (f_n).

b) Să se studieze convergența uniformă a șirului (f_n).

c) Să se determine mulțimea de convergență și limita punctuală g a șirului (f_n').

d) Să se studieze convergența uniformă a șirului (f_n').

e) Să se compare f' cu g și să se explice rezultatul.

3. Același enunț pentru șirul $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, având termenul general

$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}.$$

4. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții de termen general

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Se cere:

a) Să se demonstreze că șirul (f_n) converge punctual pe $[0,1]$ și să se determine limita sa punctuală f.

b) Să se studieze convergența uniformă a șirului (f_n).

c) Să se compare $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ cu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ și să se explice rezultatul.

5. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții de termen general $f_n(x) = \frac{n^2 x}{x^2+n^2}$. Se cere:

a) Să se demonstreze că șirul (f_n) converge punctual pe $\mathbb{R}$ și să se determine limita sa punctuală f.

b) Să se arate că (f_n) nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

6. Fiind dată o mulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$, o funcție $f : A \to \mathbb{R}$ se numește *funcție Baire* dacă există un șir de funcții $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, continue pe A, care converge punctual către f pe A.

a) Demonstrați că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci derivata sa f' este funcție Baire.

b) Dați exemplu de funcție Baire care să nu fie derivata unei funcții.

Iran 1973

7. Fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții care îndeplinește următoarele condiții:

(i) toate funcțiile f_n sunt derivabile pe $[a, b]$;

(ii) șirul (f_n) converge punctual pe intervalul $[a, b]$ către o funcție derivabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;

(iii) șirul (f_n') converge punctual pe intervalul $[a, b]$ către o funcție continuă $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Demonstrați că $f'(x) = g(x)$ oricare ar fi $x \in [a, b]$.

Iran 1999

8. Fie $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $g(1) = 0$ și fie $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții definite prin $f_n(x) := x^n g(x)$ pentru orice $n \geq 1$ și orice $x \in [0, 1]$. Demonstrați că șirul (f_n) converge uniform pe $[0, 1]$.

Iran 1992

9. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă, iar $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții uniform continue, care converge uniform către funcția $f : A \to \mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este uniform continuă.

10. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții care converge uniform pe $\mathbb{R}$ către funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Presupunem că pentru fiecare $n \geq 1$ există $\ell_n = \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că există și sunt egale limitele $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Berkeley, 1999

11. Fie $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann, iar $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții definit recursiv prin

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{pentru orice } x \in [a,b] \text{ și orice } n \geq 1.$$

Să se demonstreze că șirul (f_n) converge uniform către funcția nulă pe $[a,b]$.

12. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul definit recursiv astfel: $f_1(x) = 0$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left[x - f_n^2(x)\right] \quad \text{pentru orice } x \in [0,1].$$

Să se demonstreze că șirul (f_n) converge uniform pe $[0,1]$ către funcția $f(x) = \sqrt{x}$.

13. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \underbrace{\sqrt{\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x}{2} + \cdots + \sqrt{\frac{x}{2} + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}}\, \mathrm{d}x.$

14. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se demonstreze că există un șir de funcții polinomiale $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, uniform convergent către f, dacă și numai dacă funcția f este polinomială.

15. Fie $m \in \mathbb{N}$ și $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții polinomiale de grad cel mult m, care converge punctual către funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este o funcție polinomială de grad cel mult m și că șirul (f_n) converge uniform către f pe $[0,1]$.

3.5.2 Serii de funcții

1. Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de funcții:

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\};$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1}\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\};$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n}{4n^2+1} \sin 2nx, \quad x \in \mathbb{R};$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right), \qquad x \in (0,\infty).$

2. Să se studieze convergența seriei de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$, dacă pentru fiecare $n \geq 1$ funcția $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ este definită prin $f_n(x) = \dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$.

Concursul William Lowell Putnam 1977, problema A4

3. Să se demonstreze că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{n^2}{x}$ $(x \in (0,\infty))$ este punctual convergentă, iar suma sa este o funcție derivabilă.

4. Să se demonstreze că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} e^{-nx} \sin nx$ $(x \in [1,\infty))$ este uniform convergentă, iar suma sa este o funcție derivabilă cu derivata continuă.

5. Să se demonstreze că seria de funcții

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \quad (x \in [0,\infty))$$

este uniform convergentă.

6. Să se demonstreze că mulțimea de convergență a seriei de funcții

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

este $[0,\infty)$. Considerând funcția $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2},$$

să se demonstreze că f este continuă pe $[0,\infty)$ și derivabilă pe $(0,\infty)$.

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

7. Fie $a > 0$, $f_1 : [0, a] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, iar $f_n : [0, a] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ șirul de funcții definit recursiv prin

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{pentru orice } x \in [0, a] \text{ și orice } n \geq 1.$$

Să se demonstreze că seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă și să se determine suma sa.

SEEMOUS 2010

8. Să se calculeze $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} \ln x \ln(1-x)\mathrm{d}x$.

9. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_{0+0}^{1} x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

Olimpiadă studențească, U.R.S.S.

10. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_{0+0}^{1} x^{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n}$.

Concursul William Lowell Putnam 1969, problema A4

11. Pentru calculul integralei improprii $I := \displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$, se poate folosi următoarea idee: oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ are loc egalitatea

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx},$$

deci

$$I = \int_{0+0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0+0}^{\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Identificați în lanțul de egalități de mai sus semnul "=" care necesită o justificare riguroasă. Indicați apoi o metodă riguroasă de calcul al integralei I, bazată pe ideea de mai sus.

Capitolul 4

Serii de puteri

4.1 Convergența seriilor de puteri

4.1.1 Definiție. Fiind dat un număr real c și un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$, considerăm șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$, definite prin

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n(x-c)^n & \text{dacă } n \geq 1 \\ a_0 & \text{dacă } n = 0. \end{cases}$$

Seria de funcții $\sum_{n\geq 0} f_n$ se numește *serie de puteri* de coeficienți a_n centrată în c și va fi notată cu $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$. Mulțimea de convergență C a acestei serii de funcții este nevidă, deoarece $c \in C$.

4.1.2 Lemă (lema lui N. H. Abel)**.** *Dacă seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ converge pentru $x = x_1$, atunci ea este absolut convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-c| < |x_1 - c|$.*

Dacă seria de puteri nu este convergentă pentru $x = x_2$, atunci ea nu este convergentă pentru niciun $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-c| > |x_2 - c|$.

Demonstrație. Deoarece seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} a_n(x_1 - c)^n$ converge, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n(x_1-c)^n = 0$, deci există un număr real $r > 0$ cu proprietatea că $|a_n(x_1-c)^n| \leq r$ oricare ar fi $n \geq 0$. Fie $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-c| < |x_1-c|$ și fie $\alpha := \dfrac{|x-c|}{|x_1-c|} < 1$. Întrucât

$$|a_n(x-c)^n| = |a_n(x_1-c)^n| \left(\frac{|x-c|}{|x_1-c|}\right)^n \leq r\alpha^n \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

iar seria geometrică $\sum_{n\geq 0} \alpha^n$ este convergentă, în baza criteriului comparației deducem că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n(x-c)^n|$ este convergentă. Drept urmare, seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este absolut convergentă.

Fie acum $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-c| > |x_2 - c|$. Admițând că seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este convergentă, în baza celor demonstrate mai sus ar rezulta că și seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x_2-c)^n$ este convergentă, ceea ce este absurd. $\square$

4.1.3 Definiție (raza de convergență a unei serii de puteri)**.** Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ și fie C mulțimea de convergență a acesteia. Cum $c \in C$, avem $C \neq \emptyset$. Elementul $r \in [0, \infty]$, definit prin

$$r := \sup_{x\in C} |x-c| = \sup \left\{ |x-c| \;\middle|\; \sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n \text{ converge} \right\}$$

se numește *raza de convergență* a seriei de puteri considerate. Raza de convergență joacă un rol cheie în teoria seriilor de puteri, după cum rezultă din observația de mai jos.

4.1.4 Observație. Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este absolut convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $|x-c| < r$ și este divergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $|x-c| > r$.

Demonstrație. Dacă $|x-c| < r$, atunci din definiția lui r rezultă că există $x_1 \in C$ în așa fel încât $|x-c| < |x_1 - c|$. Întrucât $x_1 \in C$, adică seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x_1-c)^n$ converge, din lema 4.1.2 rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este absolut convergentă.

Dacă $|x-c| > r$, atunci din definiția lui r rezultă că $x \notin C$, deci seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este divergentă. $\square$

Cele demonstrate mai sus arată că mulțimea de convergență a oricărei serii de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este un interval. Mai precis, este intervalul deschis $(c-r, c+r)$, la care se adaugă, eventual, capetele $c-r$ și $c+r$ ale acestuia, în care natura seriei de puteri trebuie studiată separat. Datorită acestui fapt, intervalul deschis $(c-r, c+r)$ se numește *intervalul de convergență* al seriei de puteri.

Rezultă astfel importanța obținerii unei formule care să dea raza de convergență a unei serii de puteri. O astfel de formulă există și ea este dată în teorema următoare.

4.1.5 Teoremă (A. L. Cauchy, J. Hadamard)**.** *Fie r raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ și fie $\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci are loc egalitatea $r = \dfrac{1}{\ell}$ (cu convenția $r = \infty$ dacă $\ell = 0$).*

Demonstrație. După valorile lui $\ell \in [0, \infty]$, distingem următoarele cazuri posibile.

Cazul 1. $\ell = 0$. Atunci avem

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Aplicând criteriul radical al lui Cauchy pentru serii de numere reale cu termeni pozitivi, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n(x-c)^n|$ este convergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Drept urmare, seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este convergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deci $C = \mathbb{R}$, de unde $r = \infty$.

Cazul 2. $\ell = \infty$. Atunci avem

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}.$$

Aplicând din nou criteriul radical al lui Cauchy pentru serii de numere reale cu termeni pozitivi, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n(x-c)^n|$ este divergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$. Ținând seama de lema 4.1.2, deducem că seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este divergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$. Deci $C = \{c\}$, de unde $r = 0$.

Cazul 3. $0 < \ell < \infty$. Atunci avem

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c|\,\ell \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $|x-c|\,\ell < 1$, adică dacă $|x-c| < \frac{1}{\ell}$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este absolut convergentă (conform criteriului radical al lui Cauchy), deci este convergentă. Prin urmare, avem

$$\left(c - \frac{1}{\ell}, c + \frac{1}{\ell}\right) \subseteq C. \tag{1}$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $|x-c| > \frac{1}{\ell}$, adică $|x-c|\,\ell > 1$, seria $\sum_{n\geq 0} |a_n(x-c)^n|$ este divergentă (conform criteriului radical al lui Cauchy). În baza lemei 4.1.2, deducem atunci că seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ este divergentă oricare ar fi x cu proprietatea $|x-c| > \frac{1}{\ell}$. Prin urmare, avem

$$C \subseteq \left[c - \frac{1}{\ell}, c + \frac{1}{\ell}\right]. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că $r = \sup_{x\in C} |x-c| = \frac{1}{\ell}$. □

4.1.6 Consecință. *Fie seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *și fie* r *raza ei de convergență. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă există* $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$, *atunci* $r = \frac{1}{\ell}$ *(cu convenția* $r = \infty$ *dacă* $\ell = 0$*).*

2° *Dacă* $a_n \neq 0$ *oricare ar fi* $n \geq 0$ *și există* $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0,\infty]$, *atunci* $r = \frac{1}{\ell}$ *(cu convenția* $r = \infty$ *dacă* $\ell = 0$*).*

4.1.7 Teoremă (N. H. Abel). *Dacă seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *converge pentru* $x = x_1$ *și pentru* $x = x_2$, *cu* $x_1 < x_2$, *atunci ea converge uniform pe intervalul* $[x_1, x_2]$.

Demonstrație. După poziția lui c în raport cu punctele x_1 și x_2, distingem următoarele cazuri posibile.

Cazul 1. $x_2 \leq c$. Atunci avem $a_n(x-c)^n = f_n(x)g_n(x)$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, unde $f_n(x) := \left(\frac{x-c}{x_1-c}\right)^n$, iar $g_n(x) := a_n(x_1-c)^n$. Observăm că:

(i) pentru fiecare $x \in [x_1, x_2]$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este descrescător;

(ii) $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$ și orice $x \in [x_1, x_2]$;

(iii) seria de funcții $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge uniform pe $[x_1, x_2]$.

Aplicând teorema 3.2.7 (criteriul de convergență uniformă al lui Abel), deducem că seria de funcții $\sum_{n\geq 0} f_n(x)g_n(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ converge uniform pe $[x_1, x_2]$.

Cazul 2. $c \leq x_1$. Se procedează exact ca în cazul anterior, dar se utilizează reprezentarea $a_n(x-c)^n = f_n(x)g_n(x)$, unde $f_n(x) := \left(\frac{x-c}{x_2-c}\right)^n$ și respectiv $g_n(x) := a_n(x_2-c)^n$.

Cazul 3. $x_1 < c < x_2$. Din cele demonstrate în cazurile 1 și 2 rezultă că seria de puteri converge uniform pe intervalele $[x_1, c]$ și respectiv $[c, x_2]$, deci ea converge uniform pe $[x_1, x_2]$. □

4.1.8 Observație. Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ și fie r raza ei de convergență. Din teorema lui Abel rezultă că seria de puteri converge uniform pe orice interval compact $[a, b]$, inclus în intervalul de convergență $(c-r, c+r)$ al acesteia. De asemenea, dacă $r \in (0,\infty)$ și seria de puteri converge pentru $x = c+r$ (respectiv pentru $x = c-r$), atunci ea converge uniform pe $[c, c+r]$ (respectiv pe $[c-r, c]$).

4.2 Proprietăți ale sumei unei serii de puteri

4.2.1 Teoremă (continuitatea sumei unei serii de puteri)**.** *Dacă seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *are raza de convergență* $r > 0$*, atunci suma sa este continuă pe intervalul de convergență* $(c-r, c+r)$*.*

Demonstrație. Fie x_0 un punct oarecare din $(c-r, c+r)$. Alegem $a, b \in \mathbb{R}$ în așa fel încât $c - r < a < x_0 < b < c + r$. Conform observației 4.1.8, seria de puteri converge uniform pe $[a, b]$, deci suma ei s este continuă pe $[a, b]$, în baza teoremei 3.4.1. În particular, s este continuă în punctul x_0. □

4.2.2 Teoremă (N. H. Abel)**.** *Dacă seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *are raza de convergență* $r \in (0, \infty)$ *și seria converge pentru* $x = c + r$ *(respectiv pentru* $x = c - r$*), atunci suma ei este continuă în* $c + r$ *(respectiv în* $c - r$*), adică*

$$\lim_{x\nearrow c+r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

$$\left(\textit{respectiv} \quad \lim_{x\searrow c-r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n\right).$$

Demonstrație. Rezultă din observația 4.1.8 și teorema 3.4.1. □

4.2.3 Definiție (derivata unei serii de puteri)**.** Considerăm seriile de puteri

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n \tag{1}$$

și

$$\sum_{n\geq 1} n a_n(x-c)^{n-1}. \tag{2}$$

Seria de puteri (2) se numește *derivata* seriei de puteri (1). Fie

$$\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Întrucât $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, avem $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|na_n|} = \ell$. Conform teoremei lui Cauchy-Hadamard, rezultă că seriile de puteri (1) și (2) au aceeași rază de convergență.

4.2.4 Teoremă (derivabilitatea sumei unei serii de puteri)**.** *Dacă seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *are raza de convergență* $r > 0$*, atunci suma sa*

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

este derivabilă pe intervalul de convergență $(c-r, c+r)$ *și*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \quad \textit{oricare ar fi } x \in (c-r, c+r).$$

Demonstrație. Fie x_0 un punct oarecare din $(c-r, c+r)$. Alegem $a, b \in \mathbb{R}$ în așa fel încât $c-r < a < x_0 < b < c+r$. Conform observației 4.1.8, seriile de puteri (1) și (2) converg uniform pe $[a, b]$. Aplicând teorema 3.4.2, deducem că s este derivabilă pe $[a, b]$, deci și în x_0 și $s'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x_0-c)^{n-1}$. □

Aplicând inductiv teorema precedentă, obținem următorul rezultat.

4.2.5 Consecință. *Dacă seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *are raza de convergență* $r > 0$*, atunci suma sa* $s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *posedă derivate de orice ordin* $k \geq 1$ *pe intervalul de convergență* $(c-r, c+r)$ *și oricare ar fi* $x \in (c-r, c+r)$ *avem*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}.$$

În particular, $s^{(k)}(c) = k!\, a_k$ *pentru orice* $k \geq 0$.

4.2.6 Consecință (unicitatea dezvoltării în serie de puteri)**.** *Dacă sumele seriilor de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *și* $\sum_{n\geq 0} b_n(x-c)^n$ *coincid pe un interval* $(c-\rho, c+\rho)$ *cu* $\rho > 0$*, atunci* $a_n = b_n$ *oricare ar fi* $n \geq 0$.

Demonstrație. Fie $s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ pentru orice $x \in (c-\rho, c+\rho)$. În baza consecinței 4.2.5 avem $s^{(k)}(c) = k!\, a_k = k!\, b_k$, deci $a_k = b_k$ oricare ar fi $k \geq 0$. □

4.2.7 Teoremă. *Dacă seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$ *are raza de convergență* $r > 0$ *și suma* $s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$*, atunci pentru orice* $x \in (c-r, c+r)$ *are loc egalitatea*

$$\int_c^x s(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}.$$

Demonstrație. Rezultă din observația 4.1.8 și teorema 3.4.4. □

4.2.8 Exemplu. Vom ilustra aplicabilitatea rezultatelor teoretice din această secțiune demonstrând că

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

În acest scop, considerăm seria de puteri

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}, \tag{3}$$

ai cărei coeficienți sunt $a_{2n} = 0$ și respectiv $a_{2n+1} = (-1)^n/(2n+1)$ $(n \geq 0)$. Avem

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1.$$

În baza teoremei lui Cauchy-Hadamard, deducem că seria de puteri (3) are raza de convergență $r = 1$, deci intervalul de convergență $(-1, 1)$. Cum seria (3) converge pentru $x = -1$ și pentru $x = 1$ (conform criteriului lui Leibniz pentru serii alternate de numere reale), mulțimea de convergență a acesteia este $C := [-1, 1]$. Fie $s : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $s(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$ suma seriei (3). Conform teoremei 4.2.4, funcția s este derivabilă pe $(-1, 1)$ și pentru orice $x \in (-1, 1)$ avem

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Urmează de aici că există o constantă $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $s(x) = \alpha + \operatorname{arctg} x$ oricare ar fi $x \in (-1, 1)$. Cum $s(0) = 0$, rezultă că $\alpha = 0$, deci $s(x) = \operatorname{arctg} x$ oricare ar fi $x \in (-1, 1)$. Aplicând acum consecința 4.2.2, deducem că

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = s(1) = \lim_{x\nearrow 1} s(x) = \lim_{x\nearrow 1} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}\,.$$

4.3 Dezvoltarea funcțiilor în serii de puteri

4.3.1 Definiție. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, fie $c \in A$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție. Se spune că f *poate fi dezvoltată în serie de puteri centrată în* c *pe* A

dacă există un șir $(a_n)_{n\geq 0}$, de numere reale, în așa fel încât să avem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{oricare ar fi } x \in A. \tag{1}$$

4.3.2 Teoremă (o condiție necesară și suficientă de dezvoltabilitate)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $c \in A$. O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ poate fi dezvoltată în serie de puteri centrată în c pe A dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:*

(i) *f posedă derivate de orice ordin $k \geq 1$ în punctul c;*

(ii) *pentru orice $x \in A$ are loc egalitatea* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$

Demonstrație. Necesitatea. Admitem că f poate fi dezvoltată în serie de puteri centrată în c pe A. Atunci există un șir $(a_n)_{n\geq 0}$, de numere reale, astfel încât să aibă loc (1). Fie r raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$. Cum seria de puteri converge pentru orice $x \in A$, rezultă că $r > 0$. Conform consecinței 4.2.5, f posedă derivate de orice ordin $k \geq 1$ în punctul c și

$$f^{(k)}(c) = k!\, a_k \quad \text{oricare ar fi } k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că (ii) are loc.

Suficiența. Este evidentă. □

4.3.3 Definiție. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $c \in A$. Fiind dată o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, care posedă derivate de orice ordin $n \geq 1$ în punctul c, putem considera seria de puteri

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{3}$$

Aceasta se numește *seria Taylor* centrată în c asociată funcției f. În cazul particular $c = 0$, seria de puteri de mai sus devine

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Aceasta se numește *seria Maclaurin* asociată funcției f. Dacă pentru orice $x \in A$ are loc egalitatea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad \left(\text{respectiv } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right),$$

atunci se spune că f a fost dezvoltată în serie Taylor centrată în c (respectiv în serie Maclaurin) pe A.

4.3.4 Observaţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $c \in A$. Fiind dată o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, care posedă derivate de orice ordin $n \geq 1$ în punctul c, putem considera seria Taylor (3), centrată în c, asociată lui f. Este important de notat faptul că seria de puteri (3) are o mulțime de convergență C, care poate să coincidă sau nu cu intervalul deschis A. De asemenea, suma seriei de puteri (3) poate să coincidă sau nu pe mulțimea $C \cap A$ cu funcția f care a generat-o.

În vederea ilustrării afirmațiilor de mai sus, să considerăm mai întâi exemplul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{arctg} x$, care posedă derivate de orice ordin în punctul $c := 0$. Mai mult, se poate demonstra că $f^{(2n)}(0) = 0$ și $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!$ pentru orice $n \geq 0$. Prin urmare, seria Maclaurin asociată funcției f este

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}.$$

Or, s-a văzut în exemplul 4.2.8 că mulțimea de convergență a acestei serii de puteri este $C = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$.

Să considerăm acum exemplul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Se poate demonstra că f posedă derivate de orice ordin în punctul $c := 0$ și că $f^{(n)}(0) = 0$ pentru orice $n \geq 0$. Prin urmare, seria Maclaurin asociată lui f are mulțimea de convergență $C = \mathbb{R}$ și suma $s(x) := 0 \neq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.3.5 Teoremă (o condiție suficientă de dezvoltabilitate)**.** *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, fie $c \in A$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție care posedă derivate de orice ordin $n \geq 1$ pe A. Dacă șirul de funcții $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ este mărginit uniform pe A, atunci f poate fi dezvoltată în serie Taylor centrată în c pe A.*

Demonstrație. Fie $M > 0$ astfel încât $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pentru orice $n \geq 1$ și orice $x \in A$. Fie apoi $x \neq c$ un punct oarecare al lui A. În baza formulei lui Taylor cu restul în forma lui Lagrange, pentru orice $n \geq 1$ există un punct ξ_n, cuprins între c și x, în așa fel încât

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1},$$

deci

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!}\,|x-c|^{n+1} \le \frac{M|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, rezultă că

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k.$$

Prin urmare, f poate fi dezvoltată în serie Taylor centrată în c pe A. $\square$

4.3.6 Seriile Maclaurin asociate unor funcţii elementare.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n \qquad x \in (-1, 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1} \qquad x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\,x^{2n+1} \qquad x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in (-1,1)$$

$$\text{unde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

4.4 Metoda funcției generatoare

Metoda funcției generatoare permite determinarea termenului general al unor șiruri definite prin unele formule de recurență. Prezentăm mai jos o scurtă descriere informală a metodei, menționând totodată că ea nu este aplicabilă tuturor tipurilor de recurențe. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere, definit cu ajutorul unei relații de recurență. Asociem șirului funcția definită prin

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

numită *funcția generatoare* a șirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Prin diverse tehnici se deduce din formula de recurență pe care o verifică termenii șirului $(a_n)_{n\geq 0}$ o ecuație (aceasta putând fi algebrică, diferențială, funcțional-diferențială etc.) pe care o verifică funcția generatoare f. Se rezolvă această ecuație, determinându-se explicit f. Se dezvoltă apoi f în serie Maclaurin (a se vedea 4.3.6) și se determină a_n prin identificarea coeficienților.

4.4.1 Exemplu (funcția generatoare a șirului armonic)**.** În cazul șirului armonic, de termen general $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, avem $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$, deci

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(H_{n-1} + \frac{1}{n}\right) x^n \\ &= x \sum_{n=2}^{\infty} H_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x f(x) - \ln(1-x). \end{aligned}$$

La utimul semn de egalitate s-a folosit faptul că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (a se vedea 4.3.6). Drept urmare, funcția generatoare a șirului armonic $(H_n)_{n\geq 1}$ este $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

În continuare sunt ilustrate câteva aplicații concrete ale metodei funcției generatoare.

4.4.2 Aplicație. Să se determine numărul arborilor binari cu n noduri.

Rezolvare. Noțiunea de arbore binar poate fi definită recursiv astfel: un arbore binar fie este vid, fie constă dintr-un nod rădăcină, un arbore binar, numit subarborele stâng și un arbore binar, numit subarborele drept. Notând cu b_n numărul cerut al arborilor binari cu n noduri, să observăm că $b_0 = 1$ (singurul arbore binar cu 0 noduri este cel vid) și că șirul (b_n) satisface pentru orice $n \geq 1$ recurența

$$b_n = b_{n-1}b_0 + b_{n-2}b_1 + \cdots + b_1 b_{n-2} + b_0 b_{n-1}.$$

Fie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$ funcția generatoare a șirului (b_n). Avem

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots) \\ &= b_0^2 + (b_1 b_0 + b_0 b_1)x + (b_2 b_0 + b_1^2 + b_0 b_2)x^2 + \cdots \\ &\qquad + (b_n b_0 + b_{n-1} b_1 + \cdots + b_0 b_n)x^n + \cdots \\ &= b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_{n+1} x^n + \cdots , \end{aligned}$$

deci

$$x f^2(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots = f(x) - 1.$$

Prin urmare, funcția generatoare f a șirului (b_n) satisface ecuația algebrică

$$x f^2(x) - f(x) + 1 = 0,$$

cu soluțiile $f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Cum $f(0) = b_0 = 1$, convine doar soluția

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1 - (1-4x)^{1/2}\right).$$

Folosind seria binomială (a se vedea 4.3.6), în urma unor calcule elementare pe care nu le reproducem aici, se obține

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - 2x - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n,$$

deci $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$. Deducem de aici că $b_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ oricare ar fi $n \geq 0$.

În combinatorică, $C_n := \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ $(n \geq 0)$ se numește *cel de-al n-lea număr al lui Catalan*. Uzual el se definește a fi numărul de moduri în care pot fi puse paranteze într-un produs neasociativ cu $n+1$ factori. Am dovedit așadar că $b_n = C_n$ oricare ar fi $n \geq 0$. $\square$

4.4.3 Aplicație. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ șirul definit recursiv prin $a_0 = 1$ și

$$a_n + \frac{1}{1!}\, a_{n-1} + \frac{1}{2!}\, a_{n-2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\, a_1 + \frac{1}{n!}\, a_0 = 1 \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent și să se determine limita sa.

E. Deutsch, Amer. Math. Monthly, problema E 3159 [1986, p. 565]

Rezolvare. Fie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funcția generatoare a șirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Avem

$$\begin{aligned} e^x f(x) &= \left(1 + \frac{1}{1!}\, x + \cdots + \frac{1}{n!}\, x^n + \cdots\right)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots) \\ &= a_0 + \left(\frac{1}{1!}\, a_0 + a_1\right) x + \left(\frac{1}{2!}\, a_0 + \frac{1}{1!}\, a_1 + a_2\right) x^2 + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n!}\, a_0 + \frac{1}{(n-1)!}\, a_1 + \cdots + a_n\right) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Ținând seama de relația de recurență din enunț obținem

$$e^x f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}\frac{1}{1-x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{1!}\, x + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n + \cdots\right)(1 + x + \cdots + x^n + \cdots) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{1!}\right) x + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \cdots \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Deducem de aici că $a_n = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$ oricare ar fi $n \geq 0$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/e$. $\square$

4.4.4 Aplicaţie. Să se rezolve recurenţa $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ în funcţie de primul termen a_0.

J. G. Rey, Math. Mag., problema 1533

Rezolvare. Recurenţa dată se poate rescrie sub forma

$$(n+1)\,\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\,.$$

Notând $b_n := a_n/n!$ $(n \geq 0)$, avem

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \quad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

Fie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ funcţia generatoare a şirului $(b_n)_{n\geq 0}$. Procedând ca în aplicaţia 4.4.2, găsim că

$$\begin{aligned} f^2(x) &= b_0^2 + (b_1 b_0 + b_0 b_1)x + (b_2 b_0 + b_1^2 + b_0 b_2)x^2 + \cdots \\ &\qquad + (b_n b_0 + b_{n-1} b_1 + \cdots + b_0 b_n)x^n + \cdots \\ &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots + (n+1)b_{n+1} x^n + \cdots \\ &= f'(x), \end{aligned}$$

deci $\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)' = 1$. Urmează de aici că există o constantă $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem $-\dfrac{1}{f(x)} = x + \alpha$, adică $f(x) = -1/(x+\alpha)$. Cum $f(0) = b_0 = a_0$, trebuie ca $\alpha = -1/a_0$, de unde

$$f(x) = \frac{a_0}{1 - a_0 x} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{n+1} x^n.$$

Deducem de aici că $b_n = a_0^{n+1}$, adică $a_n = n! a_0^{n+1}$ oricare ar fi $n \geq 0$. □

4.4.5 Aplicaţie. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şirul definit recursiv prin $a_0 = 1$ şi

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \quad \text{pentru } n \geq 0.$$

Să se determine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

IMC 2003

Rezolvare. Fie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funcția generatoare a șirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Problema cere determinarea lui $f(1/2)$. Prin inducție se arată imediat că $0 < a_n \leq 1$ oricare ar fi $n \geq 0$, deci raza de convergență a seriei de puteri care definește pe f este cel puțin 1 (conform teoremei lui Cauchy-Hadamard). Avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_0}{n+2}+\frac{a_1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n}{2}\right)x^n \\ &= (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x+\cdots+\frac{1}{n+2}x^n+\cdots\right). \end{aligned}$$

Drept urmare,

$$f'(x) = f(x)g(x) \quad \text{pentru orice } x \in (-1,1), \tag{1}$$

unde $g(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$. Întrucât

$$x^2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} \quad \text{oricare ar fi } x \in (-1,1),$$

avem

$$\Big(x^2 g(x)\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \quad \text{oricare ar fi } x \in (-1,1).$$

Prin integrare, rezultă existența unei constante $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x^2 g(x) = -x - \ln(1-x) + \alpha \quad \text{oricare ar fi } x \in (-1,1).$$

Făcând $x = 0$, găsim $\alpha = 0$, deci

$$g(x) = \frac{-x-\ln(1-x)}{x^2} \quad \text{oricare ar fi } x \in (-1,1)\setminus\{0\}.$$

Din (1) rezultă că

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1-x) \quad \text{oricare ar fi } x \in (0,1).$$

Prin integrare se obține

$$\ln f(x) = \frac{\ln(1-x) - x\ln(1-x)}{x} + \beta \quad \text{oricare ar fi } x \in (0,1),$$

unde $\beta \in \mathbb{R}$ este o constantă. Făcând $x \searrow 0$ și ținând seama că f este continuă în 0 și că $f(0) = 1$, se găsește $\beta = 1$. Acum din

$$\ln f(x) = 1 - \ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) \quad \text{oricare ar fi } x \in (0,1),$$

găsim $f(x) = \dfrac{e}{1-x}(1-x)^{1/x}$, deci $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e}{2}$. □

4.5 Probleme

1. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x+1)^n, \quad a>0$;

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^n$;

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}(x-3)^n$;

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{a^n n!}(x+2)^n, \quad a>0$;

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{n^2} x^n$.

2. Fie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri având raza de convergenţă $r > 0$ şi fie $\lambda > r$. Există o serie de puteri $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ astfel încât

a) seria $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ are raza de convergenţă r, iar

b) seria $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ are raza de convergenţă λ ?

S. Zheng şi Y. Song, The College Math. J. [1998, 153]

3. Să se determine seria Maclaurin asociată funcţiei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4. Să se determine seria Maclaurin asociată funcţiei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \arcsin x$. Să se determine apoi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri obţinute.

5. Este seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ uniform convergentă pe $\mathbb{R}$?

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

6. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n.$$

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

7. Să se calculeze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n + 1)2^n}$.

8. Se consideră dezvoltarea în serie de puteri

$$\frac{1}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Să se demonstreze că pentru orice număr întreg $n \geq 0$ există un număr întreg $m \geq 0$ astfel ca $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m$.

Concursul William Lowell Putnam 1999, problema A3

9. Să se calculeze

$$\int_0^1 C(-y - 1) \left(\frac{1}{y + 1} + \frac{1}{y + 2} + \cdots + \frac{1}{y + 1992} \right) \mathrm{d}y,$$

dacă $C(\alpha)$ reprezintă coeficientul lui x^{1992} din dezvoltarea în serie Maclaurin a lui $(1+x)^{\alpha}$.

Concursul William Lowell Putnam 1992, problema A2

10. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Concursul William Lowell Putnam 1951, problema A3

11. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}+\cdots=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}\ln 3.$$

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

12. Să se calculezeze $\displaystyle\int_{0+0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

13. Să se calculeze $\displaystyle\int\limits_{0+0}^{1-0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$.

14. Să se calculeze $\displaystyle\int\limits_{0+0}^{\ln 2}\frac{xe^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$.

15. Se consideră şirul de termen general $a_n=\displaystyle\int_0^n\ln(1+e^{-x})\,\mathrm{d}x$ $(n\geq 1)$. Să se arate că şirul (a_n) este convergent, iar limita sa aparţine intervalului $\left[\frac{3}{4},1\right]$.

M. Chiriţă, Olimpiada judeţeană, clasa a XII-a, Bucureşti, 1994

16. Să se demonstreze că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)\cdots(m+n)}=\int_{0+0}^{1}\frac{e^x-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

17. (Generalizarea problemei precedente) Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$\sum_{n_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_0=1}^{\infty} \frac{1}{n_0(n_0+1)\cdots(n_0+n_1+\cdots+n_m)}$$
$$= (-1)^{m-1} \left(\int_{0+0}^{1} \frac{e^x - 1}{x} \, \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \left(1 - e \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(-1)^i}{i!} \right) \right).$$

N. Anghel, Amer. Math. Monthly [1996, 426]

Capitolul 5

Criterii de integrabilitate Riemann

5.1 Funcții integrabile Riemann

5.1.1 Definiție (diviziuni)**.** Fie $[a, b]$ un interval compact al axei reale. Orice șir finit $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$, cu proprietatea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, se numește *diviziune* a lui $[a, b]$. Mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$ va fi notată cu $\operatorname{Div}[a, b]$. Numărul real pozitiv, definit prin

$$\|\Delta\| := \max_{1 \le j \le k} \bigl(x_j - x_{j-1}\bigr)$$

se numește *norma* diviziunii Δ.

Fie $\Delta' := (x'_0, x'_1, \ldots, x'_k)$ și $\Delta'' := (x''_0, x''_1, \ldots, x''_\ell)$ două diviziuni ale lui $[a, b]$. Aranjând în ordine strict crescătoare elementele mulțimii

$$\{x'_0, x'_1, \ldots, x'_k\} \cup \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_\ell\}$$

se obține o nouă diviziune a lui $[a, b]$. Ea se numește *reuniunea diviziunilor* Δ' și Δ'' și va fi notată cu $\Delta' \cup \Delta''$. Dacă $\{x'_0, x'_1, \ldots, x'_k\} \subseteq \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_\ell\}$, atunci se spune că Δ'' *este mai fină decât* Δ'. Notăm acest fapt prin $\Delta' \subseteq \Delta''$. Evident, avem $\Delta' \subseteq \Delta' \cup \Delta''$ și $\Delta'' \subseteq \Delta' \cup \Delta''$.

5.1.2 Definiție (sisteme de puncte intermediare)**.** Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Un șir finit $\xi := (c_1, \ldots, c_k)$, cu proprietatea că $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, k\}$, se numește *sistem de puncte intermediare* asociat diviziunii Δ. Mulțimea tuturor sistemelor de puncte intermediare asociate lui Δ va fi notată cu $P(\Delta)$.

5.1.3 Definiţie (sume Riemann)**.** Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, fie

$$\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$$

şi fie $\xi := (c_1, \ldots, c_k) \in P(\Delta)$. Numărul real, definit prin

$$\sigma(f, \Delta, \xi) := \sum_{j=1}^{k} f(c_j)\big(x_j - x_{j-1}\big),$$

se numeşte *suma Riemann* asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ.

5.1.4 Definiţie (integrala Riemann)**.** O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă Riemann* pe intervalul $[a, b]$, dacă există un număr real I cu următoarea proprietate:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ a.î. } \forall\ \Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b] \text{ cu } \|\Delta\| < \delta \text{ şi } \forall\ \xi \in P(\Delta)\ :\\ |\sigma(f, \Delta, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Dacă f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci se constată imediat că numărul I din definiţia de mai sus este unic. El se numeşte *integrala Riemann* a lui f pe $[a, b]$ şi se notează cu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ sau cu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

5.1.5 Teoremă (mărginirea funcţiilor integrabile Riemann)**.** *Orice funcţie integrabilă Riemann $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită.*

Demonstraţie. Notăm $I := \int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Pentru $\varepsilon = 1$, din definiţia integralei Riemann rezultă existenţa unui $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi orice $\xi \in P(\Delta)$ să avem $|\sigma(f, \Delta, \xi) - I| < 1$. Fixăm acum o diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ în aşa fel încât $\|\Delta\| < \delta$. Atunci avem

$$(1) \qquad |\sigma(f, \Delta, \xi) - I| < 1 \quad \text{oricare ar fi } \xi \in P(\Delta).$$

Pentru a dovedi mărginirea lui f, este suficient să arătăm că f este mărginită pe toate intervalele $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Fixăm aşadar $i \in \{1, \ldots, k\}$ şi pentru fiecare punct $x \in [x_{i-1}, x_i]$ notăm

$$\xi_x := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k).$$

Atunci $\xi_x \in P(\Delta)$ și

$$\sigma(f,\Delta,\xi_x) = f(x)\big(x_i - x_{i-1}\big) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} f(x_j)\big(x_j - x_{j-1}\big).$$

Notând $\alpha := \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} f(x_j)\big(x_j - x_{j-1}\big)$, avem

$$f(x)\big(x_i - x_{i-1}\big) = \sigma(f,\Delta,\xi_x) - \alpha.$$

Ținând seama de (1), rezultă că pentru fiecare $x \in [x_{i-1}, x_i]$ avem

$$\begin{aligned} |f(x)|\,\big(x_i - x_{i-1}\big) &= |\sigma(f,\Delta,\xi_x) - I + I - \alpha| \\ &\leq |\sigma(f,\Delta,\xi_x) - I| + |I| + |\alpha| \\ &< 1 + |I| + |\alpha|, \end{aligned}$$

deci

$$|f(x)| < \frac{1 + |I| + |\alpha|}{x_i - x_{i-1}} \quad \text{oricare ar fi } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Prin urmare, f este mărginită pe $[x_{i-1}, x_i]$, întrucât membrul drept al inegalității de mai sus nu depinde de x. $\square$

5.1.6 Teoremă (criteriul de integrabilitate al lui H. E. Heine)**.** *Fiind dată o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și un număr real I, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ și $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = I$.*

2° *Pentru orice șir (Δ_n) de diviziuni ale lui $[a,b]$, cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și pentru orice șir (ξ_n), de sisteme de puncte intermediare cu proprietatea că $\xi_n \in P(\Delta_n)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea $\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta_n,\xi_n) = I$.*

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Fie (Δ_n) un șir arbitrar de diviziuni ale lui $[a,b]$, cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ și fie (ξ_n) un șir arbitrar de sisteme de puncte intermediare cu proprietatea că $\xi_n \in P(\Delta_n)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru a dovedi că $\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta_n,\xi_n) = I$, fie $\varepsilon > 0$ oarecare. Ipoteza 1° asigură existența unui $\delta > 0$, în așa fel încât pentru orice $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice $\xi \in P(\Delta)$ să avem $|\sigma(f,\Delta,\xi) - I| < \varepsilon$. Cum $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\|\Delta_n\| < \delta$. Avem atunci

$$|\sigma(f,\Delta_n,\xi_n) - I| < \varepsilon \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, conchidem că $\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi_n) = I$.

$2° \Rightarrow 1°$ Presupunem că $2°$ are loc, dar $1°$ nu. Atunci există un $\varepsilon > 0$ cu următoarea proprietate: oricare ar fi $\delta > 0$ există $\Delta \in \operatorname{Div}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și există $\xi \in P(\Delta)$ așa încât $|\sigma(f, \Delta, \xi) - I| \geq \varepsilon$. In particular, alegând $\delta := 1/n$, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o diviziune $\Delta_n \in \operatorname{Div}[a, b]$ cu $\|\Delta_n\| < 1/n$ și există $\xi_n \in P(\Delta_n)$ așa încât $|\sigma(f, \Delta_n, \xi_n) - I| \geq \varepsilon$. Atunci avem $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, dar șirul $\big(\sigma(f, \Delta_n, \xi_n)\big)$ nu converge către I, în contradicție cu ipoteza $2°$. □

5.2 Criteriul lui Darboux

Pe tot parcursul acestei secțiuni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ va fi o funcție mărginită (în caz că nu se va specifica altceva). Notăm

$$\alpha := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{și} \quad \beta := \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

5.2.1 Definiție (sume Darboux)**.** Fiind dată o diviziune

$$\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a, b],$$

notăm

$$\alpha_j := \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \quad \text{și} \quad \beta_j := \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Numerele reale, definite prin

$$s(f, \Delta) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x_j - x_{j-1}), \quad S(f, \Delta) := \sum_{j=1}^{k} \beta_j (x_j - x_{j-1}),$$

se numesc *suma Darboux inferioară*, respectiv *suma Darboux superioară* asociate funcției f și diviziunii Δ.

5.2.2 Definiție (integralele Darboux inferioară și superioară)**.** Pentru orice $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a, b]$ și orice $\xi := (c_1, \ldots, c_k) \in P(\Delta)$ avem

$$\alpha \leq \alpha_j \leq f(c_j) \leq \beta_j \leq \beta \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Înmulțind acest lanț de inegalități cu $x_j - x_{j-1} > 0$, iar apoi sumând inegalitățile obținute pentru $j = 1, \ldots, k$, găsim

$$\alpha(b - a) \leq s(f, \Delta) \leq \sigma(f, \Delta, \xi) \leq S(f, \Delta) \leq \beta(b - a). \tag{1}$$

Din (1) rezultă că mulțimea

$$\{\, s(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b] \,\}$$

este majorată de $\beta(b-a)$, iar mulțimea

$$\{\, S(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b] \,\}$$

este minorată de $\alpha(b-a)$. Drept urmare, putem introduce numerele reale, definite prin

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x := \sup_{\Delta\in\mathrm{Div}\,[a,b]} s(f,\Delta), \qquad \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x := \inf_{\Delta\in\mathrm{Div}\,[a,b]} S(f,\Delta).$$

Ele se numesc *integrala Darboux inferioară*, respectiv *integrala Darboux superioară*, ale funcției f pe $[a,b]$.

5.2.3 Propoziție (monotonia sumelor Darboux în raport cu diviziunea)**.** *Dacă Δ și Δ' sunt diviziuni ale lui $[a,b]$ și $\Delta \subseteq \Delta'$, atunci*

$$s(f,\Delta) \le s(f,\Delta') \quad \textit{și} \quad S(f,\Delta') \le S(f,\Delta).$$

Demonstrație. Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Este suficient să examinăm doar situația când Δ' se obține din Δ prin adăugarea unui singur punct, adică există un $i \in \{1,\ldots,k\}$ și există un punct $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel ca

$$\Delta' = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x', x_i, \ldots, x_k).$$

Notăm

$$\alpha_i' := \inf_{x\in[x_{i-1},x']} f(x) \quad \text{și} \quad \alpha_i'' := \inf_{x\in[x',x_i]} f(x).$$

Intrucât $\alpha_i' \ge \alpha_i$ și $\alpha_i'' \ge \alpha_i$, avem

$$\begin{aligned} s(f,\Delta') &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \alpha_j(x_j - x_{j-1}) + \alpha_i'(x' - x_{i-1}) + \alpha_i''(x_i - x') \\ &\ge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \alpha_j(x_j - x_{j-1}) + \alpha_i(x' - x_{i-1}) + \alpha_i(x_i - x') \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= s(f,\Delta). \end{aligned}$$

Inegalitatea $S(f,\Delta') \le S(f,\Delta)$ se demonstrează analog. $\square$

5.2.4 Observație. Fie Δ și Δ' două diviziuni arbitrare ale lui $[a,b]$. Cum $\Delta \subseteq \Delta \cup \Delta'$ și $\Delta' \subseteq \Delta \cup \Delta'$, din propoziția 5.2.3 rezultă că

$$s(f,\Delta) \le s(f,\Delta\cup\Delta') \le S(f,\Delta\cup\Delta') \le S(f,\Delta').$$

Deducem de aici că

$$s(f,\Delta) \le S(f,\Delta') \quad \text{oricare ar fi } \Delta,\Delta' \in \operatorname{Div}[a,b].$$

Luând supremumul membrului stâng când $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$, obținem

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \le S(f,\Delta') \quad \text{oricare ar fi } \Delta' \in \operatorname{Div}[a,b].$$

Luând acum infimumul membrului drept când $\Delta' \in \operatorname{Div}[a,b]$, obținem

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x.$$

In consecință, pentru orice $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$ avem

$$s(f,\Delta) \le \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \le S(f,\Delta). \tag{2}$$

5.2.5 Propoziție (sumele Darboux vs. sumele Riemann)**.** *Pentru orice diviziune* $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$ *au loc următoarele egalități:*

$$s(f,\Delta) = \inf_{\xi\in P(\Delta)} \sigma(f,\Delta,\xi), \quad S(f,\Delta) = \sup_{\xi\in P(\Delta)} \sigma(f,\Delta,\xi).$$

Demonstrație. Dovedim doar egalitatea referitoare la suma Darboux superioară (egalitatea referitoare la suma Darboux inferioară se demonstrează analog). In baza lui (1) avem

$$\sigma(f,\Delta,\xi) \le S(f,\Delta) \quad \text{oricare ar fi } \xi \in P(\Delta).$$

Pentru a dovedi cea de-a doua egalitate din enunț mai rămâne să demonstrăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\xi \in P(\Delta)$ astfel ca $S(f,\Delta) - \varepsilon < \sigma(f,\Delta,\xi)$.

Fie așadar $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$, fie

$$\beta_j := \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x), \quad j = 1,\ldots,k,$$

și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din definiția supremumului rezultă că pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, k\}$ există un punct $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ în așa fel încât $\beta_j - \varepsilon' < f(c_j)$, unde $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$. Atunci $\xi := (c_1, \ldots, c_k) \in P(\Delta)$ și

$$\begin{aligned}\sigma(f,g,\Delta,\xi) &= \sum_{j=1}^{k} f(c_j)(x_j - x_{j-1}) \geq \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - \varepsilon')(x_j - x_{j-1}) \\ &= S(f,g,\Delta) - \varepsilon'(b-a) > S(f,g,\Delta) - \varepsilon.\end{aligned}$$

□

5.2.6 Teoremă (criteriul de integrabilitate al lui G. Darboux)**.** *Fiind dată o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.*

2° *f este mărginită și oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o diviziune $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ astfel ca $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$.*

3° *f este mărginită și oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$.*

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2° Presupunând că f este integrabilă Riemann, notăm $I := \int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Conform teoremei 5.1.5, f este mărginită. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci există un $\delta > 0$ astfel ca pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice $\xi \in P(\Delta)$ să avem

$$|\sigma(f,\Delta,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \Leftrightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(f,\Delta,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Alegem o diviziune $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$, cu proprietatea $\|\Delta\| < \delta$. Atunci avem

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(f,\Delta,\xi) \quad \text{oricare ar fi } \xi \in P(\Delta).$$

Ținând seama de propoziția 5.2.5, deducem că

$$I - \frac{\varepsilon}{4} \leq \inf_{\xi \in P(\Delta)} \sigma(f,\Delta,\xi) = s(f,\Delta).$$

Analog se obține și inegalitatea

$$S(f,\Delta) \leq I + \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Avem așadar

$$I - \frac{\varepsilon}{4} \leq s(f,\Delta) \leq S(f,\Delta) \leq I + \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

de unde $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. În baza ipotezei 2°, există o diviziune

$$\Delta^* := (x_0^*, x_1^*, \ldots, x_p^*) \in \operatorname{Div}[a,b]$$

cu proprietatea că $S(f,\Delta^*) - s(f,\Delta^*) < \varepsilon/2$. Notăm $\delta := \frac{\varepsilon}{4pM+1}$, unde $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ o diviziune oarecare a lui $[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta$. Pentru fiecare $i \in \{1,\ldots,k\}$ notăm

$$I_i := [x_{i-1}, x_i], \qquad \alpha_i := \inf_{x\in I_i} f(x), \qquad \beta_i := \sup_{x\in I_i} f(x).$$

De asemenea, pentru fiecare $j \in \{1,\ldots,p\}$ notăm

$$J_j^* := [x_{j-1}^*, x_j^*], \qquad \alpha_j^* := \inf_{x\in J_j^*} f(x), \qquad \beta_j^* := \sup_{x\in J_j^*} f(x).$$

Notăm

$$\mathcal{I}' := \bigl\{\, i \in \{1,\ldots,k\} \bigm| \operatorname{int} I_i \cap \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_p^*\} \ne \emptyset \bigr\}$$

și respectiv $\mathcal{I}'' := \{1,\ldots,k\} \setminus \mathcal{I}'$. Pentru fiecare $j \in \{1,\ldots,p\}$ notăm

$$\mathcal{I}_j'' := \{ i \in \mathcal{I}'' \mid I_i \subseteq J_j^* \}.$$

Avem

$$S(f,\Delta) - s(f,\Delta) = \Sigma'(f,\Delta) + \Sigma''(f,\Delta), \tag{3}$$

unde

$$\Sigma'(f,\Delta) := \sum_{i\in\mathcal{I}'} (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \Sigma''(f,\Delta) := \sum_{j=1}^{p} \sum_{i\in\mathcal{I}_j''} (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pentru orice $i \in \mathcal{I}'$ avem $\beta_i - \alpha_i \le 2M$ și $x_i - x_{i-1} \le \|\Delta\| < \delta = \frac{\varepsilon}{4pM+1}$. Cum $|\mathcal{I}'| \le p$, deducem că

$$\Sigma'(f,\Delta) \le p \cdot 2M \, \frac{\varepsilon}{4pM+1} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4}$$

Pentru orice $i \in \mathcal{I}_j''$ avem $\beta_i - \alpha_i \le \beta_j^* - \alpha_j^*$, deci

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_j''} (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1}) \le (\beta_j^* - \alpha_j^*) \sum_{i\in\mathcal{I}_j''} (x_i - x_{i-1}) \le (\beta_j^* - \alpha_j^*)(x_j^* - x_{j-1}^*).$$

Derept urmare, avem

$$\Sigma''(f,\Delta) \leq \sum_{j=1}^{p} (\beta_j^* - \alpha_j^*)(x_j^* - x_{j-1}^*) = S(f,\Delta^*) - s(f,\Delta^*) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5}$$

Din (3), (4) și (5) rezultă că $S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Din ipoteza 3° și lanțul de inegalități (2) deducem că

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x < \varepsilon \quad \text{oricare ar fi } \varepsilon > 0,$$

deci $\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x =: I$. Fie acum $\varepsilon > 0$ și fie $\delta > 0$ numărul a cărui existență este asigurată de 3°. Pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ avem

$$s(f,\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = I = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \leq S(f,\Delta).$$

De asemenea, pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ și orice $\xi \in P(\Delta)$ avem

$$s(f,\Delta) \leq \sigma(f,\Delta,\xi) \leq S(f,\Delta).$$

Din precedentele două inegalități deducem că

$$|\sigma(f,\Delta,\xi) - I| \leq S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$$

pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ și orice $\xi \in P(\Delta)$. Rezultă de aici, în baza lui 3°, că $|\sigma(f,\Delta,\xi) - I| < \varepsilon$ pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice $\xi \in P(\Delta)$. In consecință, f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ și $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = I$. □

5.3 Criteriul lui Lebesgue

5.3.1 Definiție (mulțimi neglijabile Lebesgue)**.** O submulțime A a lui $\mathbb{R}$ se numește *neglijabilă Lebesgue* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un șir $(I_n)_{n\geq 1}$, de intervale deschise cu proprietatea

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon,$$

unde cu $\ell(I)$ s-a notat lungimea unui interval arbitrar $I \subseteq \mathbb{R}$. Evident, dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este neglijabilă Lebesgue, iar $B \subseteq A$, atunci și B este neglijabilă Lebesgue.

5.3.2 Exemple. a) Orice mulțime cel mult numărabilă $A \subset \mathbb{R}$ este neglijabilă Lebesgue.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Dacă $A := \{x_1, \dots, x_N\}$ este finită, atunci definim

$$a_n := \begin{cases} x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} & \text{dacă } n \leq N \\ -\frac{\varepsilon}{2^{n+2}} & \text{dacă } n > N, \end{cases} \qquad b_n := \begin{cases} x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} & \text{dacă } n \leq N \\ \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} & \text{dacă } n > N, \end{cases}$$

iar apoi notăm $I_n := (a_n, b_n)$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Avem evident

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dacă $A := \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ este infinită, atunci definim $I_n := (a_n, b_n)$, unde $a_n := x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ și $b_n := x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Ca mai sus, avem $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. □

b) Dacă $(A_k)_{k \geq 1}$ este un șir de submulțimi neglijabile Lebesgue ale lui $\mathbb{R}$, atunci și mulțimea $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ este neglijabilă Lebesgue.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum A_k este neglijabilă Lebesgue, rezultă că pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un șir $(I_{k,n})_{n \geq 1}$, de intervale deschise cu proprietatea

$$A_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n} \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{k,n}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Avem atunci

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n} \quad \text{și} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{k,n}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Cum $\{I_{k,n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ este o familie numărabilă de intervale deschise, elementele sale pot fi enumerate într-un șir. Drept urmare, mulțimea A este neglijabilă Lebesgue. □

c) Există și mulțimi nenumărabile care sunt neglijabile Lebesgue. Un astfel de exemplu este mulțimea C a lui Cantor (a se vedea secțiunea 2.2).

Demonstrație. Pentru a dovedi că mulțimea C este neglijabilă Lebesgue, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Alegem $n \in \mathbb{N}$ în așa fel încât $(2/3)^n < \varepsilon/4$. Fie F_n mulțimea care intervine la pasul n în construcția mulțimii lui Cantor (a se vedea secțiunea 2.2). Aceasta este reuniunea a 2^n intervale închise disjuncte, fiecare interval având lungimea $1/3^n$. Numerotăm aceste intervale și le notăm $J_1, \ldots, J_{2^n}$. Pentru fiecare $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ alegem un interval deschis I_k în așa fel încât $J_k \subset I_k$ și

$$\sum_{k=1}^{2^n} \ell(I_k) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{2^n} \ell(J_k).$$

Pentru fiecare $k > 2^n$ definim $I_k := \Big(-\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\Big)$. Atunci avem

$$C \subseteq F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_k \subset \bigcup_{k=1}^{2^n} I_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

și

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) &= \sum_{k=1}^{2^n} \ell(I_k) + \sum_{k=2^n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{2^n} \ell(J_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + 2^n \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că mulțimea C este neglijabilă Lebesgue. □

d) Orice interval compact nedegenerat $[a, b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, nu este mulțime neglijabilă Lebesgue.

Demonstrație. Presupunând contrarul, pentru $\varepsilon := b - a$ ar rezulta existența unui șir $(I_n)_{n \geq 1}$, de intervale deschise cu proprietatea

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < b - a.$$

Întrucât $[a, b]$ este mulțime compactă, din acoperirea deschisă $(I_n)_{n \geq 1}$ a sa se poate extrage o subacoperire finită. Există așadar numerele naturale $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ încât $[a, b] \subseteq I_{n_1} \cup I_{n_2} \cup \cdots \cup I_{n_k}$. Rezultă de aici că

$$b - a \leq \ell(I_{n_1}) + \ell(I_{n_2}) + \cdots + \ell(I_{n_k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < b - a,$$

ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că $[a, b]$ nu este o mulțime neglijabilă Lebesgue. □

5.3.3 Definiţie (oscilaţia unei funcţii)**.** Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie şi fie B o submulţime a lui A. Elementul intervalului $[0, \infty]$, definit prin

$$\omega_f(B) := \sup_{x,x' \in B} |f(x) - f(x')|,$$

se numeşte *oscilaţia funcţiei f pe mulţimea B*. Dacă x este un punct arbitrar al lui A, atunci *oscilaţia lui f în punctul x* se defineşte prin

$$\omega_f(x) := \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \omega_f(V \cap A).$$

Se demonstrează uşor că

$$\boxed{f \text{ este continuă într-un punct } x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \omega_f(x) = 0.}$$

5.3.4 Lemă. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci pentru orice număr real $\alpha > 0$ mulţimea $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) < \alpha\}$ este deschisă în $[a, b]$, iar mulţimea $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\}$ este închisă în $[a, b]$, deci şi în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Fie $\alpha > 0$, fie $G := \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) < \alpha\}$ şi fie x_0 un punct arbitrar al lui G. Atunci avem $\omega_f(x_0) < \alpha$. În baza definiţiei deducem existenţa unui număr real $r > 0$ astfel încât notând $V := (x_0 - r, x_0 + r)$ să avem $\omega_f(V \cap [a, b]) < \alpha$. Fie $x \in V \cap [a, b]$ arbitrar ales şi fie U o vecinătate a lui x inclusă în V. Avem $\omega_f(U \cap [a, b]) \leq \omega_f(V \cap [a, b]) < \alpha$, deci $\omega_f(x) < \alpha$ şi prin urmare $x \in G$. Cum x a fost un punct arbitrar din $V \cap [a, b]$, conchidem că $V \cap [a, b] \subseteq G$. Am dovedit aşadar că pentru orice punct $x_0 \in G$ există o vecinătate deschisă V a lui x_0 în aşa fel încât $V \cap [a, b] \subseteq G$. Aceasta demonstrează că mulţimea G este deschisă în $[a, b]$.

Cum $[a, b]$ este mulţime închisă, iar mulţimea G este deschisă în $[a, b]$, rezultă că mulţimea $\{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\} = [a, b] \setminus G$ este închisă atât în $[a, b]$ cât şi în $\mathbb{R}$. $\square$

5.3.5 Teoremă (criteriul de integrabilitate al lui H. Lebesgue)**.** *Fiind dată o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.*

2° *f este mărginită şi mulţimea* $\operatorname{disc} f$*, a tuturor punctelor de discontinuitate ale lui f, este neglijabilă Lebesgue.*

Demonstraţie. 1° $\Rightarrow$ 2° Presupunând că f este integrabilă Riemann, în baza teoremei 5.1.5 rezultă că f este mărginită. Avem $\operatorname{disc} f = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}(f)$, unde s-a notat pentru fiecare $\alpha \in (0, \infty)$

$$E_\alpha(f) := \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \alpha\}.$$

Pentru a dovedi că $\operatorname{disc} f$ este neglijabilă Lebesgue, este suficient să arătăm că $E_\alpha(f)$ este neglijabilă Lebesgue oricare ar fi $\alpha > 0$.

Fie $\alpha > 0$ și $\varepsilon > 0$ arbitrar alese. În baza implicației $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ din criteriul lui Darboux (teorema 5.2.6), putem alege o diviziune $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ a intervalului $[a, b]$ în așa fel încât

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{k} \omega_f\big([x_{j-1}, x_j]\big)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\alpha\varepsilon}{2}\,.$$

Fie $J := \big\{j \in \{1, \ldots, k\} \mid E_\alpha(f) \cap (x_{j-1}, x_j) \neq \emptyset\big\}$. Atunci $\omega_f\big([x_{j-1}, x_j]\big) \geq \alpha$ pentru orice $j \in J$. Drept urmare, avem

$$\alpha \sum_{j\in J}(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j\in J} \omega_f\big([x_{j-1}, x_j]\big)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\alpha\varepsilon}{2}\,,$$

deci suma lungimilor intervalelor (x_{j-1}, x_j) $(j \in J)$ este mai mică decât $\varepsilon/2$. Aceste intervale acoperă $E_\alpha(f)$, cu excepția eventual a punctelor $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Dar aceste puncte pot fi evident acoperite cu un număr finit de intervale deschise, având suma lungimilor mai mică decât $\varepsilon/2$. În consecință, $E_\alpha(f)$ poate fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise, având suma lungimilor mai mică decât ε. Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, conchidem că mulțimea $E_\alpha(f)$ este neglijabilă Lebesgue.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Admitem acum că f este mărginită, iar $\operatorname{disc} f$ este neglijabilă Lebesgue. Fie $M > 0$ așa încât $|f(x)| \leq M$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. Pentru a demonstra integrabilitatea Riemann a lui f, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece

$$E := \left\{x \in [a, b] \;\middle|\; \omega_f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$$

este o submulțime a lui $\operatorname{disc} f$, rezultă că E este neglijabilă Lebesgue, deci E poate fi acoperită cu un șir de intervale deschise, având suma lungimilor mai mică decât $\frac{\varepsilon}{2M}$. Cum E este compactă (a se vedea lema 5.3.4), există un număr finit de astfel de intervale care să acopere pe E. Fie $U_1, \ldots, U_m$ aceste intervale și fie

$$I_j := [a, b] \cap \operatorname{cl} U_j \quad \text{pentru fiecare } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că intervalele I_j sunt disjuncte două câte două (în caz contrar, înlocuim fiecare pereche de intervale care se intersectează cu reuniunea acestora).

Mulțimea $K := [a,b]\setminus\bigcup_{j=1}^{m} U_j$ este reuniunea unui număr finit de intervale compacte, deci este compactă. În plus, avem $\omega_f(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ oricare ar fi $x \in K$. Drept urmare, pentru orice $x \in K$ există un interval închis J_x în așa fel încât $x \in \operatorname{int} J_x$ și $\omega_f([a,b]\cap J_x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Compactitatea lui K implică existența unui număr finit de puncte $x_1, \ldots, x_k$ astfel încât

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{int} J_{x_i}.$$

Notând $J_i := J_{x_i} \cap K$, avem $K = \bigcup_{i=1}^{k} J_i$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că oricare două dintre intervalele J_i nu au puncte interioare comune. Atunci familiile de intervale $\{I_1, \ldots, I_m\}$ și $\{J_1, \ldots, J_k\}$ generează o diviziune $\Delta \in \operatorname{Div}[a,b]$. Avem

$$\begin{aligned}
S(f,\Delta) - s(f,\Delta) &= \sum_{j=1}^{m} \omega_f(I_j)\ell(I_j) + \sum_{i=1}^{k} \omega_f(J_i)\ell(J_i) \\
&< \sum_{j=1}^{m} 2M\ell(I_j) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\ell(J_i) \\
&= 2M\sum_{j=1}^{m} \ell(I_j) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{k} \ell(J_i) \\
&< 2M\,\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, în baza implicației $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ din criteriul lui Darboux deducem că f este integrabilă Riemann. $\square$

5.3.6 Consecință. *Dacă $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ este o funcție integrabilă Riemann, iar $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci funcția $f \circ \varphi$ este integrabilă Riemann.*

5.4 Probleme

1. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k^{\frac{n+1}{n}}}$.

Olimpiada locală București, 1994

2. a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x\sin\left(\pi x^2\right)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\sin\left(\pi x^2\right)\mathrm{d}x$.

F. Stănescu, Olimpiada județeană, 2015/2

3. Fie $f:[0,1]\to(0,\infty)$ o funcție continuă.

a) Să se demonstreze că pentru orice număr întreg $n\geq 1$ există o unică diviziune $(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\operatorname{Div}[0,1]$ astfel încât

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\quad\text{oricare ar fi } k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.$$

b) Pentru fiecare număr întreg $n\geq 1$ definim $\bar{a}_n=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, unde $\Delta=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ este unica diviziune cu proprietatea de la a). Să se arate că șirul $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se determine limita sa.

Olimpiada națională, 2007/2

4. Fie $f:[0,1]\to(0,\infty)$ o funcție continuă. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ se consideră diviziunea $(t_0,t_1,\ldots,t_n)\in\operatorname{Div}[0,1]$ cu proprietatea că

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t=\cdots=\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Să se determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{f(t_1)}+\frac{1}{f(t_2)}+\cdots+\frac{1}{f(t_n)}}$.

V. Vâjâitu, Olimpiada națională, 2011/2

5. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata integrabilă Riemann. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ notăm

$$\begin{aligned} A_n &:= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right),\\ B_n &:= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(A_n-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{b-a}{2}\left[f(a)-f(b)\right]$$

și

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right].$$

6. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2\right)$.

7. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție crescătoare, de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă pe $[0,1]$ și fie (A_n) și (B_n) șirurile definite prin

$$A_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{și respectiv} \quad B_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Intervalul $[A_n, B_n]$ se împarte în trei segmente egale. Demonstrați că pentru n suficient de mare, numărul $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ aparține segmentului din mijloc.

SEEMOUS 2011/4

8. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă și fie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Să se demonstreze că șirul $(s_{n+1}-s_n)_{n\geq 1}$ converge către $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Olimpiada județeană, 2014/2

9. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții cu proprietatea că există $\alpha \geq 0$ și $p \geq 1$ în așa fel încât să avem $\left|f(x)-f(x')\right| \leq \alpha\left|g(x)-g(x')\right|^p$ pentru orice $x, x' \in [a,b]$. Să se demonstreze că dacă g este integrabilă Riemann, atunci și f este integrabilă Riemann.

S. Rădulescu, Olimpiada județeană, 1983/4

10. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann și fie $p \geq 1$. Să se demonstreze că există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f\left(\frac{j-1}{n}\right)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|^p$$

și să se determine valoarea acesteia.

S. Rădulescu, Olimpiada națională, 1981/4

11. (funcția lui Riemann[1]) Să se demonstreze că funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = 0 \\ 1/q & \text{dacă } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q},\ x = p/q, \text{unde } p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1 \\ 0 & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

este integrabilă Riemann.

12. Să se demonstreze că dacă funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ are limită finită în orice punct din $[a,b]$, atunci ea este mărginită.

13. Să se demonstreze că mulțimea punctelor de discontinuitate de speța întâi ale unei funcții $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, este cel mult numărabilă.

14. Să se demonstreze că dacă funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ are limită finită în fiecare punct din $[a,b]$, atunci ea este integrabilă Riemann.

Olimpiada județeană, 1989/4

15. Să se demonstreze că dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann, atunci și funcția $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f(x^2)$, este integrabilă Riemann.

S. Rădulescu, Olimpiada națională, 1986/1

16. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann cu proprietatea că $0 < \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq 1$. Să se demonstreze că există $x_1, x_2 \in [0,1]$ astfel încât $x_1 \neq x_2$ și $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = (x_1 - x_2)^{2002}$.

R. Gologan, Olimpiada națională, 2002/2

5.5 Soluții

1. Notăm $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k\frac{n+1}{n}}$ pentru orice $n \geq 1$. Avem

$$a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}}\,.$$

[1] Această funcție este cunoscută în literatura matematică și sub alte denumiri precum funcția lui Thomae, funcția popcorn, funcția picăturilor de ploaie etc.

Considerăm funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, precum și șirul de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[0,1]$, unde $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Pentru orice $n \geq 1$ și orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ avem $\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} < \frac{k+1}{n}$. Drept urmare, notând $c_n^k := \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și $\xi_n := (c_n^0, c_n^1, \ldots, c_n^{n-1})$, avem $\xi_n \in P(\Delta_n)$. Mai mult, are loc egalitatea

$$a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \sigma(f, \Delta_n, \xi_n)$$

pentru orice $n \geq 1$. Aplicând teorema 5.1.6 (criteriul lui Heine), deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2.$

2. a) Cu schimbarea de variabilă $\pi x^2 = t$ obținem

$$\int_0^1 x \sin\left(\pi x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin t \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\,.$$

b) Fie

$$a_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin\left(\pi x^2\right) \mathrm{d}x$$

și fie F o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției continue $f(x) := \sin\left(\pi x^2\right)$. Avem

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Un calcul simplu conduce la

$$a_n = F(1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right),$$

de unde

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= F(1) - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - \int_0^1 (x)' F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(1) - F(1) + \int_0^1 x F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sin\left(\pi x^2\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\pi}\,.$

3. Considerăm funcția $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Deoarece f este continuă, rezultă că F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Cum $\operatorname{Im} f \subset (0,\infty)$, deducem că $F'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, deci F este strict crescătoare și prin urmare injectivă. Notând $I := \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, avem $I > 0$, iar $F : [0,1] \to [0,I]$ este o bijecție.

a) Pentru fiecare $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ avem $\frac{kI}{n} \in [0,I]$, deci există un unic $a_k \in [0,1]$ în așa fel încât $F(a_k) = \frac{kI}{n}$. Folosind faptul că F este bijectivă și strict crescătoare, se constată imediat că $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ este unica diviziune a intervalului $[0,1]$ cu proprietatea din enunț.

b) Conform observației de mai sus, avem $a_k = F^{-1}\left(\frac{kI}{n}\right)$, deci

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{kI}{n}\right) = \frac{1}{I}\cdot\frac{I}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{kI}{n}\right) = \frac{1}{I}\,\sigma(F^{-1},\Delta_n,\xi_n),$$

unde $\Delta_n := \left(0, \dfrac{I}{n}, \dfrac{2I}{n}, \ldots, I\right) \in \operatorname{Div}[0,I]$ și $\xi_n := \left(\dfrac{I}{n}, \dfrac{2I}{n}, \ldots, I\right) \in P(\Delta_n)$. Întrucât F^{-1} este continuă, deci integrabilă Riemann, în baza teoremei 5.1.6 (criteriul lui Heine), deducem că șirul $(\bar{a}_n)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \frac{1}{I}\int_0^I F^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Făcând schimbarea de variabilă $y = F(x)$, avem $\mathrm{d}y = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$, deci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$.

4. Funcția $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ este derivabilă, cu derivata $F' = f$ continuă și strict pozitivă, deci F este strict crescătoare. Avem $F(0) = 0$ și $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t =: I$, deci pentru fiecare $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ există un unic punct $t_k \in [0,1]$ în așa fel încât $F(t_k) = \frac{kI}{n}$. Prin urmare, nodurile $t_0, t_1, \ldots, t_n$ sunt date de $t_k = F^{-1}\left(\frac{kI}{n}\right)$. Fie

$$\begin{aligned} s_n &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(t_k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f\left(F^{-1}\left(\frac{kI}{n}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{I}\cdot\frac{I}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f\left(F^{-1}\left(\frac{kI}{n}\right)\right)} = \frac{1}{I}\,\sigma\left(\frac{1}{f\circ F^{-1}}, \Delta_n, \xi_n\right), \end{aligned}$$

unde $\Delta_n := \left(0, \frac{I}{n}, \frac{2I}{n}, \ldots, I\right) \in \operatorname{Div}[0, I]$ și $\xi_n := \left(\frac{I}{n}, \frac{2I}{n}, \ldots, I\right) \in P(\Delta_n)$. Întrucât f și F^{-1} sunt continue, în baza teoremei 5.1.6 (criteriul lui Heine), deducem că

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{I}\int_0^I \frac{1}{f(F^{-1}(x))}\,\mathrm{d}x.$$

Făcând schimbarea de variabilă $F^{-1}(x) = t$, avem $x = F(t)$, deci $\mathrm{d}x = f(t)\,\mathrm{d}t$ și prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{I}\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{I}.$$

De aici rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(t_k)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n} = I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

5. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar. Notăm $x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\Delta_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Div}[a, b], \quad \xi_n := (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in P(\Delta_n),$$

$$\alpha_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f'(x), \quad \beta_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f'(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Avem

$$\begin{aligned} A_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\big[f(x_{k-1}) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pentru orice indice $k \in \{1, \dots, n\}$ și orice $x \in (x_{k-1}, x_k]$ există un punct $c_{k,x} \in (x_{k-1}, x)$ astfel ca

$$f(x_{k-1}) - f(x) = f'(c_{k,x})(x_{k-1} - x).$$

Drept urmare, avem

$$\begin{aligned} A_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(c_{k,x})(x_{k-1} - x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x_{k-1})(x_{k-1} - x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big[f'(c_{k,x}) - f'(x_{k-1})\big](x_{k-1} - x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Cum

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_{k-1} - x)\,\mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

și

$$-(\beta_k - \alpha_k) \le f'(c_{k,x}) - f'(x_{k-1}) \le \beta_k - \alpha_k$$

pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$ și orice $x \in (x_{k-1}, x_k]$, deducem că

$$\begin{aligned} &-\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^n f'(x_{k-1}) - \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) \\ &\quad \le A_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \le -\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^n f'(x_{k-1}) + \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k). \end{aligned}$$

Înmulțind acest lanț de inegalități cu n, obținem

$$\begin{aligned} (1) \qquad &-\frac{b-a}{2}\,\sigma(f', \Delta_n, \xi_n) - \frac{b-a}{2}\big[S(f', \Delta_n) - s(f', \Delta_n)\big] \\ &\quad \le n\left(A_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &\qquad \le -\frac{b-a}{2}\,\sigma(f', \Delta_n, \xi_n) + \frac{b-a}{2}\big[S(f', \Delta_n) - s(f', \Delta_n)\big]. \end{aligned}$$

Întrucât f' este integrabilă Riemann și $\|\Delta_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0$ pentru $n \to \infty$, în baza criteriului lui Heine (teorema 5.1.6) avem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f', \Delta_n, \xi_n) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{2}$$

Pe de altă parte, în baza criteriului lui Darboux, avem

$$\lim_{n\to\infty} \big[S(f', \Delta_n) - s(f', \Delta_n)\big] = 0. \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(A_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{b-a}{2}\big[f(a) - f(b)\big].$$

Cealaltă egalitate din enunț rezultă imediat din cea de mai sus, ținând seama că $B_n = A_n + \dfrac{b-a}{n}\big[f(b) - f(a)\big]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

6. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n&\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

în baza rezultatului din problema precedentă, aplicat funcției $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) := \frac{1}{1+x}$.

7. Segmentul din mijloc al intervalului $[A_n, B_n]$ are capătul stâng

$$A_n + \frac{B_n - A_n}{3} = A_n + \frac{f(1) - f(0)}{3n}$$

și capătul drept $A_n + \frac{2\big[f(1)-f(0)\big]}{3n}$. Apartenența lui I la acest segment este echivalentă cu

$$A_n + \frac{f(1) - f(0)}{3n} \le I \le A_n + \frac{2\big[f(1) - f(0)\big]}{3n},$$

adică cu

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(1)-f(0)}{3} \le n(I - A_n) \le \frac{2\big[f(1)-f(0)\big]}{3}.$$

Așadar, problema cere să arătăm că pentru n suficient de mare are loc inegalitatea (1). Or, aceasta este o consecință imediată a faptului că

$$\lim_{n\to\infty} n(I - A_n) = \frac{f(1)-f(0)}{2} \in \left[\frac{f(1)-f(0)}{3}, \frac{2\big[f(1)-f(0)\big]}{3}\right].$$

(În cazul în care f este constantă, avem $A_n = I = B_n$ oricare ar fi $n \ge 1$.)

8. Pentru fiecare număr natural n notăm $B_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Avem

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (n+1)B_{n+1} - nB_n \\ &= (n+1)(B_{n+1} - I) - n(B_n - I) + I, \end{aligned}$$

unde $I := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Întrucât $\lim_{n\to\infty} n(B_n - I) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$, rezultă că există $\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = I$.

9. Demonstrăm mai întâi că f este mărginită. Întrucât funcția g este integrabilă Riemann, ea este mărginită, deci există un $M > 0$ în așa fel încât să avem $|g(x)| \le M$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. În baza inegalității din enunț, avem

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + \alpha|g(x) - g(a)|^p \\ &\le |f(a)| + \alpha\big(|g(x)| + |g(a)|\big)^p, \end{aligned}$$

deci

$$|f(x)| \le |f(a)| + \alpha\big(2M\big)^p \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b].$$

Cum membrul drept al inegalității de mai sus nu depinde de x, rezultă că f este mărginită.

Demonstrăm în continuare că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ astfel ca $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Integrabilitatea Riemann a lui g împreună cu implicația $1° \Rightarrow 2°$ din criteriul lui Darboux (teorema 5.2.6) asigură existența unei diviziuni $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ așa încât să avem

$$S(g, \Delta) - s(g, \Delta) < \frac{\varepsilon}{1 + \alpha\big(2M\big)^{p-1}}.$$

Pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, k\}$ notăm

$$\alpha_j := \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \qquad \beta_j := \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

și respectiv

$$\alpha'_j := \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} g(x), \qquad \beta'_j := \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} g(x).$$

Fie acum $j \in \{1, \ldots, k\}$ fixat arbitrar și fie (u_n), (v_n) șiruri de puncte din $[x_{j-1}, x_j]$ cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \alpha_j$ și $\lim_{n\to\infty} f(v_n) = \beta_j$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} |f(v_n) - f(u_n)| &\leq \alpha |g(v_n) - g(u_n)|^p = \alpha |g(v_n) - g(u_n)|\, |g(v_n) - g(u_n)|^{p-1} \\ &\leq \alpha(\beta'_j - \alpha'_j)(|g(v_n)| + |g(u_n)|)^{p-1} \\ &\leq \alpha\big(2M\big)^{p-1}(\beta'_j - \alpha'_j). \end{aligned}$$

Făcând $n \to \infty$, deducem că

$$\beta_j - \alpha_j \leq \alpha\big(2M\big)^{p-1}(\beta'_j - \alpha'_j) \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu $x_j - x_{j-1} > 0$ și apoi sumând pentru $j = 1, \ldots, k$, obținem

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \leq \alpha\big(2M\big)^{p-1}\big(S(f, \Delta) - s(f, \Delta)\big) < \varepsilon.$$

Conform implicației $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ din criteriul lui Darboux (teorema 5.2.6), conchidem că f este integrabilă Riemann.

10. Pentru fiecare număr natural n notăm

$$a_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right|^p.$$

Vom dovedi că șirul (a_n) este convergent către 0. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum funcția f este integrabilă Riemann, ea este mărginită. Fie $M := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Conform implicației $1^\circ \Rightarrow 3^\circ$ din criteriul lui Darboux (teorema 5.2.6), există un număr real $\delta > 0$ în așa fel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathrm{Div}\,[0,1]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{1 + (2M)^{p-1}}$. Notăm $n_0 := [1/\delta] + 1$. Fie $n \geq n_0$ arbitrar și fie

$$\Delta_n := \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right) \in \mathrm{Div}\,[0,1].$$

Avem

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \cdot \left|f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right|^{p-1}.$$

Întrucât $\left|f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right|^{p-1} \leq (2M)^{p-1}$ oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, n\}$, deducem că

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &\leq (2M)^{p-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \\ &\leq (2M)^{p-1}\big(S(f,\Delta_n) - s(f,\Delta_n)\big) < \varepsilon \end{aligned}$$

deoarece $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$. Am demonstrat așadar că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n_0$ să avem $0 \leq a_n < \varepsilon$. Drept urmare, avem $(a_n) \to 0$.

11. Din definiția funcției f rezultă că $0 \leq f(x) \leq 1$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, deci f este mărginită. Vom demonstra că $\operatorname{disc} f = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Fie $a \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ arbitrar și fie (x_n) un șir de numere iraționale din $[0,1]$, convergent către a. Cum $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(a)$, rezultă că f este discontinuă în a. Prin urmare, avem $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \operatorname{disc} f$. Pentru a dovedi incluziunea contrară, vom demonstra că f este continuă pe $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Fie $a \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$ și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Alegem $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $1/n_0 < \varepsilon$. În intervalul $(0,1)$ există un număr finit de fracții ireductibile având numitorul mai mic sau egal cu n_0 (mai precis, numărul acestor fracții ireductibile este $\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n_0)$, unde φ este inducatorul lui Euler: $\varphi(n)$ reprezintă numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu n și relativ prime cu n). Fie δ cea mai mică distanță de la numărul irațional a la una dintre aceste fracții ireductibile. Dacă $x \in [0,1]$ și $|x-a| < \delta$, atunci fie x este irațional, fie x este rațional de forma $x = p/q$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$ și $q > n_0$. În prima situație avem $|f(x) - f(a)| = 0$, iar în cea de-a doua situație avem $|f(x) - f(a)| = 1/q < 1/n_0 < \varepsilon$. Cum ε a fost arbitrar, deducem că f este continuă în a. Am dovedit astfel că $\operatorname{disc} f = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, deci mulțimea $\operatorname{disc} f$ este numărabilă. Exemplul 5.3.2 a) arată că $\operatorname{disc} f$ este neglijabilă Lebesgue. Aplicând acum criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann (teorema 5.3.5), deducem că f este integrabilă Riemann.

Observație. Funcția lui Riemann este, așa cum rezultă din rezolvarea de mai sus, continuă în toate punctele iraționale din $[0,1]$ și discontinuă în toate punctele raționale din $[0,1]$. Este interesant de notat faptul că nu există nicio funcție care să fie continuă în toate punctele raționale dintr-un interval și discontinuă în toate punctele iraționale din acel interval (a se vedea în acest sens S. Rădulescu și M. Rădulescu [12, problema 1.107]).

12. Presupunem, prin absurd, că funcția f nu este mărginită. Atunci pentru fiecare număr natural n există un punct $x_n \in [a,b]$ astfel ca $|f(x_n)| > n$. Șirul mărginit (x_n) posedă un subșir (x_{n_k}), convergent către un punct $x_0 \in [a,b]$. Fie $L := \lim_{x\to x_0} f(x)$. Pentru $\varepsilon = 1$ rezultă existența unui $\delta > 0$ așa încât oricare ar fi $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - L| < 1$. Prin urmare, pentru orice $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, cu $|x - x_0| < \delta$, avem

$$|f(x)| \le |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|. \tag{1}$$

Deoarece $(x_{n_k}) \to x_0$ și $(n_k) \to \infty$, există un număr natural k_0 în așa fel încât oricare ar fi $k \ge k_0$ să avem $|x_{n_k} - x_0| < \delta$ și $n_k > \max\{|f(x_0)|, 1+|L|\}$. Atunci pentru orice $k \ge k_0$ avem $x_{n_k} \ne x_0$ (altfel $|f(x_0)| = |f(x_{n_k})| > n_k > |f(x_0)|$, ceea ce ar fi absurd). Deci pentru orice $k \ge k_0$ avem $x_{n_k} \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ și $|x_{n_k} - x_0| < \delta$. În baza lui (1) deducem că $|f(x_{n_k})| < 1+|L|$. Pe de altă parte, pentru $k \ge k_0$ avem $|f(x_{n_k})| > n_k > 1 + |L|$. Contradicția obținută arată că f este mărginită.

13. Fie $\mathrm{disc}_1 f$ mulțimea tuturor punctelor de discontinuitate de speța întâi ale lui f. Evident, avem $\mathrm{disc}_1 f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n(f)$, unde

$$E_n(f) := \{x \in \mathrm{disc}_1 f \mid \omega_f(x) \ge 1/n\}.$$

Pentru a dovedi că $\mathrm{disc}_1 f$ este cel mult numărabilă este suficient să arătăm că $E_n(f)$ este cel mult numărabilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Fixăm un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar și demonstrăm mai întâi că mulțimea $E_n(f)$ este formată doar din puncte izolate. Presupunem contrarul, adică există un $x \in E_n(f)$ care este punct de acumulare pentru $E_n(f)$. Atunci există un șir (x_k), de puncte din $E_n(f) \setminus \{x\}$, astfel ca $(x_k) \to x$. Trecând eventual la un subșir, putem presupune că toți termenii șirului (x_k) sunt fie mai mici, fie mai mari ca x. Admitem, fără a restrânge generalitatea, că $x_k < x$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Trecând eventual la un subșir, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, și că șirul (x_k) este strict crescător. Fiecărui număr natural $k \ge 2$ îi atașăm mulțimea

$$V_k := \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \in \mathcal{V}(x_k).$$

Cum $x_k \in E_n(f)$, avem

$$\frac{1}{n} \leq \omega_f(x_k) \leq \omega_f(V_k \cap I) = \sup_{u,v \in V_k \cap I} |f(u) - f(v)|.$$

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există puncte $u_k, v_k \in V_k \cap I$ astfel ca

$$|f(u_k) - f(v_k)| \geq \frac{1}{2n}\,. \tag{1}$$

Deoarece pentru orice $k \geq 2$ avem

$$\frac{x_{k-1} + x_k}{2} < u_k < \frac{x_k + x_{k+1}}{2} < x$$

și $(x_k) \to x$, rezultă că (u_k) este un șir din $I \cap (-\infty, x)$, convergent către x. Analog se arată că și (v_k) este un șir din $I \cap (-\infty, x)$, convergent către x. Cum $x \in E_n(f) \subseteq \mathrm{disc}_1 f$, trebuie să avem

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) = \lim_{k\to\infty} f(u_k) = f(x-0).$$

Dar aceste egalități sunt în contradicție cu (1). Această contradicție arată că toate punctele lui $E_n(f)$ sunt izolate.

Fixăm un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar și demonstrăm acum că mulțimea $E_n(f)$ este cel mult numărabilă. Cum toate punctele acestei mulțimi sunt izolate, rezultă că pentru orice $x \in E_n(f)$ există un $r_x > 0$ astfel ca

$$E_n(f) \cap (x - r_x, x + r_x) = \{x\}.$$

Pentru fiecare $x \in E_n(f)$ notăm

$$v_x := \inf\{y \in E_n(f) \mid y > x\}, \quad u_x := \sup\{y \in E_n(f) \mid y < x\},$$

cu convenția $\inf \emptyset = \infty$ și $\sup \emptyset = -\infty$. Atunci avem $u_x \leq x - r_x$ și $v_x \geq x + r_x$. Notând $a_x := \dfrac{x + u_x}{2}$ și $b_x := \dfrac{x + v_x}{2}$, avem

$$E_n(f) \cap (a_x, b_x) = \{x\} \quad \text{oricare ar fi } x \in E_n(f)$$

și

$$(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset \quad \text{oricare ar fi } x, y \in E_n(f),\ x \neq y.$$

Pentru fiecare $x \in E_n(f)$ alegem un punct $q_x \in \mathbb{Q} \cap (a_x, b_x)$. Atunci funcția

$$\forall\, x \in E_n(f) \ \mapsto\ q_x \in \mathbb{Q}$$

este injectivă, deci $|E_n(f)| \le |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Cu alte cuvinte, mulțimea $E_n(f)$ este cel mult numărabilă.

14. Conform celor două probleme anterioare, funcția f este mărginită, iar mulțimea $\operatorname{disc} f = \operatorname{disc}_1 f$ este cel mult numărabilă, deci este neglijabilă Lebesgue. Aplicând criteriul lui Lebesgue (teorema 5.3.5), rezultă că f este integrabilă Riemann.

15. Deoarece f este integrabilă Riemann, rezultă că f este mărginită, iar mulțimea $\operatorname{disc} f$ este neglijabilă Lebesgue. Evident, mărginirea lui f implică faptul că și g este mărginită. Pentru a încheia rezolvarea, rămâne să dovedim că $\operatorname{disc} g$ este mulțime neglijabilă Lebesgue. Observăm că

$$x \in \operatorname{disc} g \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \in \operatorname{disc} f,$$

deci

$$\operatorname{disc} g = \{\sqrt{x} \mid x \in \operatorname{disc} f\}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Evident, avem

$$\operatorname{disc} g = \left(\operatorname{disc} g \cap \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \cup \left(\operatorname{disc} g \cap \left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]\right).$$

Deoarece $\operatorname{disc} f$ este o mulțime neglijabilă Lebesgue, rezultă că și mulțimea $\operatorname{disc} f \cap \left(\frac{\varepsilon^2}{4}, 1\right]$ este neglijabilă Lebesgue. Drept urmare, există un șir de intervale deschise $((a_n, b_n))_{n\ge1}$, în așa fel încât $a_n \ge \varepsilon^2/4$ oricare ar fi $n \ge 1$,

$$\operatorname{disc} f \cap \left(\frac{\varepsilon^2}{4}, 1\right] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \qquad \text{și} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ notăm $a_n^* := \sqrt{a_n}$ și $b_n^* := \sqrt{b_n}$. Avem

$$\operatorname{disc} g \cap \left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right] = \left\{\sqrt{x} \;\middle|\; x \in \operatorname{disc} f \cap \left(\frac{\varepsilon^2}{4}, 1\right]\right\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^*, b_n^*)$$

și

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^* - a_n^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Notând $a_0^* := -\varepsilon/8$ și $b_0^* = 5\varepsilon/8$, avem $\operatorname{disc} g \cap \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq (a_0^*, b_0^*)$, deci

$$\operatorname{disc} g \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (a_n^*, b_n^*) \qquad \text{și} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^* - a_n^*) < b_0^* - a_0^* + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, conchidem că mulțimea $\operatorname{disc} g$ este neglijabilă Lebesgue.

16. ***Rezolvarea 1***. Dacă $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, atunci putem alege $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$, iar dacă $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$, atunci putem alege $x_1 = 1$ și $x_2 = 0$. Presupunem în continuare că $0 < \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 1$.

Cazul I. $0 < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 1$.

Atunci există cel puțin un punct de continuitate $x_0 \in (0,1)$ al lui f cu proprietatea că $f(x_0) > 0$. Presupunând contrarul, am avea $f(x) \le 0$ pentru orice punct de continuitate $x \in (0,1)$ al lui f. Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[0,1]$. Cum mulțimea $\operatorname{disc} f$, a tuturor punctelor de discontinuitate ale lui f, este neglijabilă Lebesgue și orice interval compact nedegenerat nu este mulțime neglijabilă Lebesgue, deducem că pentru orice $j \in \{1, \ldots, k\}$ există cel puțin un punct $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ în care f este continuă. Notând $\xi := (c_1, \ldots, c_k)$ și ținând seama că $f(c_j) \le 0$, rezultă că $\sigma(f, \Delta, \xi) \le 0$. Am dovedit astfel că pentru orice $\Delta \in \operatorname{Div}[0,1]$ există $\xi \in P(\Delta)$ astfel ca $\sigma(f, \Delta, \xi) \le 0$. Combinând acest rezultat cu criteriul lui Heine (teorema 5.1.6), se ajunge imediat la concluzia că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le 0$, ceea ce este absurd.

Fie așadar $x_0 \in (0,1)$ un punct în care f este continuă, cu proprietatea că $a := f(x_0) > 0$. Considerăm funcția $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(t) := \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x - t^{2002}.$$

Atunci F este continuă (întrucât f este integrabilă) și $F(1) < 0$. Dacă există un punct $t \in (0,1)$ în așa fel încât $F(t) = 0$, atunci putem alege $x_1 = 0$ și $x_2 = t$. În caz contrar, trebuie să avem $F(t) < 0$ pentru orice $t \in (0,1)$. În particular, avem $F(x_0) < 0$, adică

$$\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x < x_0^{2002}.$$

Considerăm acum funcția $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$G(t) := \int_t^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_0 - t)^{2002}.$$

Atunci avem $G(0) < 0$. Ținând seama că f este continuă în x_0, rezultă că există un punct $t_0 \in (0, x_0)$ astfel ca

$$f(x) \geq \frac{a}{2} \text{ oricare ar fi } x \in [t_0, x_0] \quad \text{și} \quad (x_0 - t_0)^{2001} < \frac{a}{2}\,.$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} G(t_0) &= \int_{t_0}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_0 - t_0)^{2002} \\ &\geq \frac{a}{2}\,(x_0 - t_0) - (x_0 - t_0)^{2002} > 0. \end{aligned}$$

Cum $G(0) < 0$ și $G(t_0) > 0$, deducem că există un punct $x_1 \in (0, x_0)$ cu proprietatea că $G(x_1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = (x_0 - x_1)^{2002}$, deci putem alege $x_2 = x_0$.

Cazul II. $-1 < \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.

Atunci avem $0 < \displaystyle\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x < 1$. În baza celor demonstrate la cazul I, există puncte $x_1, x_2 \in [0,1]$, cu $x_1 \neq x_2$, astfel încât

$$\int_{x_1}^{x_2} -f(x)\,\mathrm{d}x = (x_1 - x_2)^{2002},$$

de unde

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (x_1 - x_2)^{2002} = (x_2 - x_1)^{2002}.$$

Rezolvarea 2. Ca în prima rezolvare, ne putem restrânge la situația când $0 < \left| \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| < 1$.

Cazul I. $0 < \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 1$.

Presupunem, prin absurd, că

$$(1) \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \neq (x_2 - x_1)^{2002} \quad \text{oricare ar fi } x_1, x_2 \in [0,1],\; x_1 \neq x_2.$$

Vom demonstra atunci că fie

$$\text{(2)} \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x < (x_2 - x_1)^{2002} \quad \text{oricare ar fi } x_1, x_2 \in [0,1],\ x_1 < x_2,$$

fie

$$\text{(3)} \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x > (x_2 - x_1)^{2002} \quad \text{oricare ar fi } x_1, x_2 \in [0,1],\ x_1 < x_2.$$

Presupunem că nu are loc nici (2), nici (3). Ținând seama de (1), rezultă că există perechile $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in [0,1]^2$, cu $x_1 < x_2$ și $x_1' < x_2'$, astfel ca

$$\text{(4)} \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x < (x_2 - x_1)^{2002} \quad \text{și} \quad \int_{x_1'}^{x_2'} f(x)\,\mathrm{d}x > (x_2' - x_1')^{2002}.$$

Considerăm funcția $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$G(t) := \int_{(1-t)x_1 + tx_1'}^{(1-t)x_2 + tx_2'} f(x)\,\mathrm{d}x - \left[(1-t)x_2 + tx_2' - (1-t)x_1 - tx_1'\right]^{2002}.$$

Întrucât f este integrabilă pe $[0,1]$, rezultă că G este continuă pe $[0,1]$. Mai mult, din (4) rezultă că $G(0) < 0$ și $G(1) > 0$. Există așadar un $t_0 \in (0,1)$ așa încât $G(t_0) = 0$. Notând $x_1^* := (1-t_0)x_1 + t_0 x_1'$ și $x_2^* := (1-t_0)x_2 + t_0 x_2'$, avem $x_1^* < x_2^*$ și

$$G(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_1^*}^{x_2^*} f(x)\,\mathrm{d}x = (x_2^* - x_1^*)^{2002},$$

în contradicție cu (1). Contradicția obținută arată că trebuie să aibă loc fie (2), fie (3).

Presupunem mai întâi că are loc (2). Fie $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(t) := \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$. Se știe că dacă f este continuă într-un punct x_0, atunci F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$. Fie $x_0 \in (0,1)$ un punct în care f este continuă. Din (2) rezultă că

$$F(x_2) - F(x_0) < (x_2 - x_0)^{2002} \quad \text{oricare ar fi } x_2 \in (x_0, 1],$$

deci

$$\frac{F(x_2) - F(x_0)}{x_2 - x_0} < (x_2 - x_0)^{2001} \quad \text{oricare ar fi } x_2 \in (x_0, 1].$$

Făcând $x_2 \searrow x_0$, deducem că $f(x_0) \leq 0$ pentru orice punct $x_0 \in (0,1)$ în care f este continuă.

Presupunem acum că are loc (3). Fie $x_0 \in (0,1)$ un punct în care f este continuă. Din (3) rezultă că

$$F(x_0) - F(x_1) < (x_0 - x_1)^{2002} \quad \text{oricare ar fi } x_1 \in [0, x_0),$$

deci

$$\frac{F(x_0) - F(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} < (x_0 - x_1)^{2001} \quad \text{oricare ar fi } x_1 \in [0, x_0).$$

Făcând $x_1 \nearrow x_0$, deducem că $f(x_0) \leq 0$ pentru orice punct $x_0 \in (0,1)$ în care f este continuă.

În concluzie, în ambele situații posibile, (2) sau (3), trebuie ca $f(x) \leq 0$ pentru orice punct $x \in (0,1)$ în care f este continuă. Combinând această observație cu criteriile lui Lebesgue și respectiv Heine de integrabilitate Riemann, se ajunge la concluzia (a se vedea și Rezolvarea 1) că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că presupunerea (1) este falsă.

Cazul II. $-1 < \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.

Se raționează ca în Rezolvarea 1.

Capitolul 6

Inegalități integrale

6.1 Inegalitatea lui Cebîșev

6.1.1 Teoremă (inegalitatea lui P. L. Cebîșev)**.** *Fiind date funcțiile monotone $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f și g sunt ambele crescătoare sau ambele descrescătoare, atunci*

$$(1) \qquad (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

2° *Dacă una dintre funcțiile f și g este crescătoare, iar cealaltă descrescătoare, atunci*

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Demonstrația 1. 1° Precum orice altă inegalitate integrală, și inegalitatea (1) poate fi demonstrată prin *discretizare*. Mai precis, pentru a demonstra (1) este suficient să dovedim că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$(2) \qquad (b-a)\,\sigma(fg, \Delta_n, \xi_n) \geq \sigma(f, \Delta_n, \xi_n)\,\sigma(g, \Delta_n, \xi_n),$$

unde $\Delta_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ este diviziunea echidistantă a lui $[a,b]$, în care $x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, iar $\xi_n := (x_1, \ldots, x_n) \in P(\Delta_n)$. În adevăr, de îndată ce validitatea lui (2) a fost stabilită pentru orice $n \in \mathbb{N}$, făcând $n \to \infty$ și ținând seama de criteriul lui Heine (teorema 5.1.6), din (2) rezultă (1).

Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar. Notând $a_k := f(x_k)$ și respectiv $b_k := g(x_k)$ pentru $k = 1, \ldots, n$, se constată imediat că inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$(3) \qquad \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n},$$

în ipoteza că

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \quad \text{și} \quad b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$$

sau

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \quad \text{și} \quad b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n.$$

Or, (3) este binecunoscuta inegalitate discretă a lui Cebîșev. Prezentăm în continuare o demonstrație a acestei inegalități. Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avem $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0$, de unde, prin însumare

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i - a_ib_j - a_jb_i + a_jb_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_jb_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_jb_j \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right). \end{aligned}$$

Împărțind ambii membri cu $2n^2$, obținem (3).

2° Această afirmație se demonstrează analog. □

Demonstrația 2. 1° Pentru orice $x, y \in [a, b]$ avem

$$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \ge 0,$$

deci

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_a^b\int_a^b \big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\qquad - \int_a^b\int_a^b f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y - 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

de unde rezultă (1).

2° Demonstrația este similară cu demonstrația afirmației 1°. □

6.1.2 Observaţie. În ipoteza că funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt monotone și continue, în cele două inegalități din enunțul teoremei 6.1.1 avem egalitate dacă și numai dacă una dintre funcțiile f sau g este constantă.

În adevăr, să presupunem că în (1) avem egalitate. Analiza demonstrației 2 arată că egalitatea în (1) este echivalentă cu

$$\int_a^b \int_a^b F(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{4}$$

unde $F : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$F(x, y) := \big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big).$$

Continuitatea funcțiilor f și g atrage după sine continuitatea lui F. Cum $F(x, y) \geq 0$ oricare ar fi $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$, egalitatea (4) are loc dacă și numai dacă $F(x, y) = 0$ oricare ar fi $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$, iar aceasta se întâmplă dacă și numai dacă una dintre funcțiile f sau g este constantă. În adevăr, dacă nici f nici g nu este constantă, atunci avem

$$F(a, b) = \big(f(a) - f(b)\big)\big(g(a) - g(b)\big) > 0,$$

contradicție.

6.2 Inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

6.2.1 Teoremă (inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** *Fiind date funcțiile integrabile Riemann $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, are loc inegalitatea*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{1}$$

Demonstrația 1. Prin discretizare (a se vedea demonstrația 1 a teoremei 6.1.1), pentru a demonstra (1) este suficient să dovedim că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$\sigma(fg, \Delta_n, \xi_n)^2 \leq \sigma(f^2, \Delta_n, \xi_n)\, \sigma(g^2, \Delta_n, \xi_n), \tag{2}$$

unde $\Delta_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ este diviziunea echidistantă a lui $[a, b]$, în care $x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, iar $\xi_n := (x_1, \ldots, x_n) \in P(\Delta_n)$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar. Notând $a_k := f(x_k)$ și respectiv $b_k := g(x_k)$ pentru $k = 1, \ldots, n$, se constată imediat că inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$\big(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n\big)^2 \leq \big(a_1^2 + \cdots + a_n^2\big)\big(b_1^2 + \cdots + b_n^2\big). \tag{3}$$

Or, (3) este binecunoscuta inegalitate discretă a lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. Lăsăm demonstrația acestei inegalități în seama cititorului. (O demonstrație posibilă a lui (3) folosește ideea din cea de-a doua demonstrație a teoremei 6.2.1, prezentată mai jos.) □

Demonstrația 2. Presupunem, în plus, că una dintre funcțiile f sau g este continuă. Admitem, pentru fixarea ideilor, că f este continuă. Considerăm funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\begin{aligned} \varphi(t) \ &:= \ \int_a^b \big(tf(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x \\ &= \ t^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2t \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dacă $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci inegalitatea (1) are loc cu egalitate. Dacă f nu este identic nulă pe $[a, b]$, atunci φ este o funcție polinomială de gradul al doilea cu proprietatea că $\varphi(t) \geq 0$ oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Drept urmare, discriminantul lui φ trebuie să fie ≤ 0, adică

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq 0,$$

ceea ce demonstrează validitatea lui (1). □

6.2.2 Observație. Presupunând că funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt continue, inegalitatea (1) are loc cu egalitate dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, în așa fel încât

$$\alpha f(x) = \beta g(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b]. \tag{4}$$

Demonstrație. Necesitatea. Admitem că inegalitatea (1) are loc cu egalitate. Dacă $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci (4) are loc de îndată ce alegem $\alpha = 1$ și $\beta = 0$. Dacă f nu este identic nulă, atunci din demonstrația 2 a teoremei 6.2.1 rezultă că funcția de gradul al doilea φ are discriminantul nul, deci are o rădăcină dublă $t_0 \in \mathbb{R}$. Cum

$$0 = \varphi(t_0) = \int_a^b \big(t_0 f(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x,$$

iar f și g sunt continue, rezultă că $g(x) = t_0 f(x)$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. Drept urmare, alegând $\alpha := t_0$ și $\beta := 1$, (4) are loc.

Suficiența. Admitem acum că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, în așa fel încât (4) să aibă loc. Atunci sau

$$f(x) = tg(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b],$$

sau

$$g(x) = tf(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b],$$

unde $t = \beta/\alpha$ sau $t = \alpha/\beta$, după cum $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. În ambele situații se constată că (1) are loc cu egalitate. □

6.3 Inegalitățile lui Young, Hölder și Minkowski

6.3.1 Teoremă (inegalitatea lui W. H. Young)**.** *Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcție continuă, strict crescătoare, cu proprietatea că $f(0) = 0$. Atunci pentru orice $a \in [0, \infty)$ și orice $b \in f([0, \infty))$ are loc inegalitatea*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $b = f(a)$.

Demonstrație. Fie $a \in [0, \infty)$ și $b \in f([0, \infty))$ arbitrare. Dăm o justificare geometrică inegalității (1). Considerăm mulțimile de puncte din plan, definite prin (a se vedea figura 6.3.1)

$$A := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

și respectiv

$$B := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq x \leq f^{-1}(y)\}.$$

Evident, avem $ab \leq \operatorname{aria} A + \operatorname{aria} B$, adică (1), deoarece

$$\operatorname{aria} A = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{și} \quad \operatorname{aria} B = \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

De asemenea, este evident că egalitatea în (1) are loc atunci și numai atunci când $b = f(a)$. □

6.3.2 Consecință. *Fie $p, q \in (1, \infty)$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci pentru orice $a, b \in [0, \infty)$ are loc inegalitatea*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{2}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $b = a^{p-1}$.

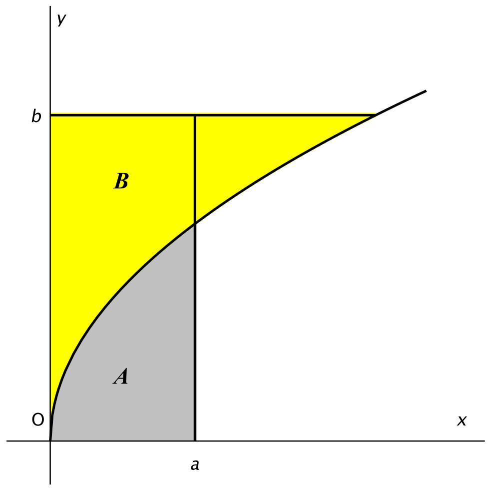

Figura 6.3.1: Justificarea geometrică a inegalității lui Young.

Demonstrație. Se aplică teorema 6.3.1 funcției $f(x) := x^{p-1}$. Se obține

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} \mathrm{d}x + \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}y = \frac{a^p}{p} + \frac{p-1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

deoarece $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, deci $\frac{p}{p-1} = q$. □

6.3.3 Teoremă (inegalitatea lui O. Hölder)**.** *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile Riemann și fie $p, q \in (1, \infty)$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci are loc inegalitatea*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q}. \tag{3}$$

Demonstrație. Vom stabili inegalitatea (3) prin discretizare. Este suficient să arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$\sigma\big(|fg|, \Delta_n, \xi_n\big) \leq \sigma\big(|f|^p, \Delta_n, \xi_n\big)^{1/p} \sigma\big(|g|^q, \Delta_n, \xi_n\big)^{1/q}, \tag{4}$$

unde $\Delta_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ este diviziunea echidistantă a lui $[a, b]$, în care $x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, iar $\xi_n := (x_1, \ldots, x_n) \in P(\Delta_n)$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar. Notând $a_k := |f(x_k)|$ și respectiv $b_k := |g(x_k)|$ pentru $k = 1, \ldots, n$, avem $a_k, b_k \in [0, \infty)$. Se constată imediat că inegalitatea (4) este echivalentă cu

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} \, (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}. \tag{5}$$

Or, (5) este tocmai inegalitatea discretă a lui Hölder, pe care o vom demonstra în cele ce urmează. Notăm

$$A := (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} \quad \text{și} \quad B := (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}.$$

Dacă $A = 0$ sau $B = 0$, atunci $a_1 = \cdots = a_n = 0$ sau $b_1 = \cdots = b_n = 0$ și în acest caz (5) are loc cu egalitate. Presupunem în continuare că $A > 0$ și $B > 0$. Aplicând inegalitatea (2) a lui Young numerelor $a := a_k/A$ și respectiv $b := b_k/B$, găsim

$$\frac{a_k b_k}{AB} \le \frac{a_k^p}{pA^p} + \frac{b_k^q}{qB^q}.$$

Însumând aceste inegalități pentru $k = 1, \ldots, n$, obținem

$$\frac{1}{AB} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \frac{1}{pA^p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right) + \frac{1}{qB^q} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

deci $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le AB$, adică tocmai inegalitatea (5). □

6.3.4 Observații. 1° În cazul particular când $p = q = 2$, inegalitatea lui Hölder se reduce la inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

2° Presupunând că funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt continue, inegalitatea (3) are loc cu egalitate dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, în așa fel încât $\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^q$ oricare ar fi $x \in [a, b]$ (a se vedea D. S. Mitrinović [11, Theorem 7, p. 54]).

6.3.5 Teoremă (inegalitatea lui H. Minkowski)**.** *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile Riemann și fie $p \ge 1$. Atunci are loc inegalitatea*

$$(6) \quad \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Demonstrație. Procedăm prin discretizare, ca în cazul inegalității lui Hölder. Lăsăm în seama cititorului să arate că (6) este demonstrată de îndată ce este stabilită inegalitatea discretă a lui Minkowski: pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice numere $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$(7) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}.$$

Dacă $p = 1$, atunci (7) are loc cu egalitate. Presupunem în continuare că $p > 1$. Alegem $q > 1$ în așa fel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Notăm

$$A := \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p.$$

Dacă $A = 0$, atunci $a_k = b_k = 0$ oricare ar fi $k = 1, \ldots, n$ și atunci (7) are loc cu egalitate. Presupunem în continuare că $A > 0$. Avem

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Aplicând fiecăreia dintre cele două sume inegalitatea discretă (5) a lui Hölder, găsim

$$\begin{aligned} A \quad \leq \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ & + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Din relația $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ rezultă imediat că $(p-1)q = p$, deci

$$A \leq A^{1/q} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \right).$$

Împărțind ambii membri cu $A^{1/q}$, obținem (7). □

6.4 Inegalitățile lui Jensen și Hermite-Hadamard

6.4.1 Teoremă (inegalitatea lui J. L. W. V. Jensen)**.** *Dacă $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ este o funcție integrabilă Riemann, iar $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă continuă, atunci are loc inegalitatea*

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \big(f \circ \varphi\big)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Demonstrație. Demonstrăm inegalitatea (1) prin discretizare. Întrucât funcția $f\circ\varphi$ este integrabilă Riemann, este suficient să dovedim că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$f\left(\frac{1}{b-a}\,\sigma\big(\varphi,\Delta_n,\xi_n\big)\right)\le\frac{1}{b-a}\,\sigma\big(f\circ\varphi,\Delta_n,\xi_n\big), \tag{2}$$

unde $\Delta_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ este diviziunea echidistantă a lui $[a,b]$, în care $x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$, iar $\xi_n := (x_1,\ldots,x_n)\in P(\Delta_n)$.

Fie $n\in\mathbb{N}$ fixat arbitrar. Notând $a_k := \varphi(x_k)$ pentru $k = 1,\ldots,n$, avem $a_k\in[\alpha,\beta]$, iar inegalitatea (2) se scrie

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\le\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n},$$

care este binecunoscuta inegalitate discretă a lui Jensen. □

6.4.2 Teoremă (inegalitatea lui Hermite-Hadamard)**.** *Dacă $I\subseteq\mathbb{R}$ este un interval, iar $f: I\to\mathbb{R}$ este o funcție convexă, atunci pentru orice $a,b\in I$, cu $a<b$, are loc inegalitatea*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3}$$

Demonstrație. Dacă funcția f este continuă pe $[a,b]$, atunci inegalitatea stângă din (3) se obține din (1), alegând $\varphi(x) := x$ oricare ar fi $x\in[a,b]$. În caz contrar, f este continuă pe (a,b) și posedă limită la dreapta finită în a, precum și limită la stânga finită în b (a se vedea [2, Corollary 3.2.5, pp. 98–100]). Considerând funcția $f^*: [a,b]\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f^*(x) := \begin{cases} f(a+0) & \text{dacă } x = a\\ f(x) & \text{dacă } x\in(a,b)\\ f(b-0) & \text{dacă } x = b,\end{cases}$$

aceasta este continuă pe $[a,b]$. Conform observației de mai sus, avem

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f^*\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Deci și în acest caz inegalitatea stângă din (3) are loc.

Pentru a dovedi inegalitatea dreaptă din (3), facem schimbarea de variabilă $x = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$. Ținând seama de convexitatea lui f, obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^1 \big((1-t)f(a)+tf(b)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a)\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

□

6.5 Probleme

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și fie $n \ge 1$ un număr întreg. Să se demonstreze că

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Să se precizeze toate funcțiile crescătoare continue f pentru care are loc egalitatea.

SEEMOUS 2011

2. Fie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă descrescătoare. Să se demonstreze că

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru ce funcții f cele două inegalități au loc cu egalitate?

SEEMOUS 2016

3. Să se determine funcțiile continue descrescătoare $f : [0,1] \to [0,\infty)$, care satisfac simultan următoarele condiții:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le 1 \quad \text{și} \quad \int_0^1 f(x^3)\,\mathrm{d}x \le 3\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

I. V. Maftei, Olimpiada națională, 1984/4

4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și fie $M \geq 0$ astfel ca $|f'(x)| \leq M$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Să se demonstreze că

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{M^2}{12}\,.$$

R. Ropotă, problema L.38*, RMT nr. 2/1990

5. Fie $f_1, \ldots, f_n : [0,1] \to (0,\infty)$ funcții continue și fie σ o permutare a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$. Să se demonstreze că

$$\prod_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}\,\mathrm{d}x \geq \prod_{i=1}^{n} \int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Olimpiada județeană, 2006/1

6. Să se demonstreze că pentru orice funcție continuă $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Pentru ce funcții f are loc egalitatea?

D. Popa, Olimpiada națională, 1997/2

7. a) Fiind date funcțiile continue $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$, demonstrați inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$\left(\int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 v^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

b) Fie $\mathcal{C}$ mulțimea tuturor funcțiilor derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu derivata f' continuă pe $[0,1]$ și cu proprietatea $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Determinați

$$\min_{f \in \mathcal{C}} \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\big(f'(x)\big)^2 \mathrm{d}x,$$

precum și toate funcțiile $f \in \mathcal{C}$ pentru care acest minim este atins.

Olimpiada națională, 2007/1

8. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel ca

$$\int_0^n f(x) f(n-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

pentru orice număr natural $n \geq 1$. Să se demonstreze că f este periodică.

M. Piticari, D. Crăciun, Olimpiada națională, 2012/1

9. (inegalitatea lui W. Wirtinger) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$, cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Să se demonstreze că

$$\int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x.$$

10. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 4.$

I. Rașa, Olimpiada națională, 2004/3

11. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea tuturor funcțiilor continue $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$\int_0^\pi f(x) \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x) \cos x\,\mathrm{d}x = 1.$$

Să se determine $\displaystyle\min_{f \in \mathcal{M}} \int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$

Olimpiada națională, 1995/4

12. Fie $p > 1$ un număr real și fie $f : [a,b] \to [0, \infty)$ o funcție continuă. Să se demonstreze că

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)^p \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x.$$

13. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Să se demonstreze că funcția $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(r) := \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^r\,\mathrm{d}x \right)^{1/r}$$

este crescătoare.

14. Fie $p > 1$ un număr real. Pentru orice funcție continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se notează

$$I(f) := \int_0^1 x^p |f(x)| \, \mathrm{d}x - \int_0^1 x|f(x)|^p \, \mathrm{d}x.$$

Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $I(f)$.

Generalizarea problemei B5, Concursul William Lowell Putnam 2006

15. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ și $g : [0,1] \to (0,\infty)$ funcții continue, dintre care f este crescătoare. Să se demonstreze că pentru orice $t \in [0,1]$ are loc inegalitatea

$$\int_0^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Olimpiada județeană, 2007/2

16. Fie $f : [0,1] \to [0,\infty)$ o funcție descrescătoare. Să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Concursul William Lowell Putnam 1957, problema B3

17. Să se demonstreze că dacă $f : [0,1] \to [0,\infty)$ este o funcție integrabilă Riemann, atunci are loc inegalitatea

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

L. Panaitopol, Olimpiada locală București, 2005/2

18. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile Riemann, așa încât $m \le f(x) \le M$ pentru orice $x \in [a,b]$ și $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Să se demonstreze că

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M-m}{2}\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

D. Andrica, RMT nr. 1-2/1988, problema 6381

19. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se demonstreze că dacă $f(0) = 0$ și $0 < f'(x) \leq 1$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, atunci are loc inegalitatea

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dați un exemplu de funcție f pentru care are loc egalitatea.

Concursul William Lowell Putnam 1973, problema B4

20. a) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se demonstreze că dacă există $a \in [0,1]$ astfel ca $f(a) \leq 0$, atunci

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

b) Fie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se demonstreze că pentru orice $x \in [0,1]$ are loc inegalitatea

$$\int_0^1 \big(g(t) - |g'(t)|\big)\,\mathrm{d}t \leq g(x) \leq \int_0^1 \big(g(t) + |g'(t)|\big)\,\mathrm{d}t.$$

S. Rădulescu, P. Alexandrescu, Olimp. județeană București, 1998/4

21. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se demonstreze că dacă $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, atunci pentru orice $\alpha \in (0,1)$ are loc inegalitatea

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{8} \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Concursul William Lowell Putnam 2007, problema B2

22. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu proprietatea că există un $a \in (0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Notând $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$, să se demostreze că:

a) Are loc inegalitatea $\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M(1-a)$.

b) Are loc inegalitatea $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq 2|f(0)| - M$.

M. Chiriță, Olimpiada națională, 1992/1

23. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(0) = f(1) = 0$ și $|f'(x)| \le 1$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Demonstrați că $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{4}$.

N. Bourbăcuț, Olimpiada județeană, 2012/4

24. Fie $M > 0$ un număr real și fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă pe $[a,b]$, cu proprietatea că $|f''(x)| \le M$ oricare ar fi $x \in [a,b]$. Să se demonstreze că

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le M\,\frac{(b-a)^2}{24}.$$

25. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$ și de două ori derivabilă cu derivata a doua mărginită pe (a,b), astfel ca $f(a) = f(b) = 0$. Să se demonstreze că

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le M\,\frac{(b-a)^3}{12},$$

unde $M := \sup\{\,|f''(x)| \mid x \in (a,b)\,\}$.

Iran 1986

26. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcție de trei ori derivabilă cu derivata a treia continuă pe $[-1,1]$, astfel încât $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Să se demonstreze că

$$\int_{-1}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{12}\max_{x\in[-1,1]} |f'''(x)|.$$

27. (inegalitatea lui A. Beurling) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă pe $[a,b]$. Să se demonstreze că dacă $f(a) = f(b) = 0$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}x \ge \frac{4}{b-a}\max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

28. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se demonstreze că dacă $f(0) = f(1) = -\frac{1}{6}$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\mathrm{d}x \ge 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}.$$

R. Gologan, C. Lupu, Math. Mag., problema 1852

29. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se determine f, știind că $f(1) = -\frac{1}{6}$ și

$$\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2 \mathrm{d}x \le 2 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Olimpiada națională, 2006/1

30. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$. Să se demonstreze că dacă $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2 \mathrm{d}x \ge 12 \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

C. Lupu, Olimpiada națională, 2008/2

31. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[a,b]$. Să se demonstreze că dacă $f(a) = 0$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \le (b-a)^2 \int_a^b f'(x)^2 \mathrm{d}x.$$

32. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă pe $[-1,1]$. Să se demonstreze că dacă $f(0) = 0$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_{-1}^1 \big(f''(x)\big)^2 \mathrm{d}x \ge 10 \left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

C. Lupu, T. Lupu, Amer. Math. Monthly, problema 11548 [2011, p. 85]

33. Fie $n \ge 0$ un număr întreg și fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcție de $2n+2$ ori derivabilă cu derivata de ordinul $2n+2$ continuă pe $[-1,1]$. Să se demonstreze că dacă $f(0) = f''(0) = \cdots = f^{(2n)}(0) = 0$, atunci are loc inegalitatea

$$\int_{-1}^1 \left(f^{(2n+2)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \ge \frac{(2n+2)!^2(4n+5)}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

P. Perfetti, Amer. Math. Monthly, problema 11756 [2014, p. 170]

34. Să se demonstreze că dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n+1}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)\right].$$

35. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, de două ori derivabilă pe $(-1, 1)$, cu proprietatea că

$$2f'(x) + xf''(x) \geq 1 \quad \text{oricare ar fi } x \in (-1, 1).$$

Să se demonstreze că $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}$.

IMC 2019/3

36. Fie $a \in [0, 1]$. Să se determine toate intervalele închise $I \subset [0, 1]$, cu proprietatea că pentru orice funcție convexă derivabilă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\int_0^1 \max\{f(a), f(x)\}\,\mathrm{d}x \geq \max_{x\in I} f(x).$$

I. Rașa, Olimpiada națională, 1992/2

6.6 Soluții

1. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev (teorema 6.1.1) funcțiilor crescătoare f și respectiv $g(x) := x^n$, $x \in [0, 1]$. Întrucât g nu este constantă, inegalitatea din enunț are loc cu egalitate dacă și numai dacă funcția f este constantă (a se vedea observația 6.1.2).

2. Vom demonstra inegalitatea stângă cu ajutorul inegalității lui Cebîșev (teorema 6.1.1). În adevăr, funcțiile f și cos fiind descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avem

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Este suficient să mai demonstrăm că

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \pi\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\pi - 2)\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ultima inegalitate are loc deoarece, f fiind descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avem

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) f\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = (\pi-2) f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

și

$$(\pi-2)\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\pi-2) f\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sin x = t$ și ținând seama că f este descrescătoare și că $\arcsin t > t$ oricare ar fi $t \in (0,1]$, deducem că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(\arcsin t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Prin urmare, și inegalitatea dreaptă din enunț are loc.

Pentru a avea egalitate în cele două inegalități din enunț este necesar să avem egalitate în (1) și (2). Acest lucru se întâmplă doar dacă funcția f este constantă (a se vedea observația 6.1.2). Reciproc, se constată imediat că dacă f este constantă, atunci ambele inegalități din enunț au loc cu egalitate.

3. Vom demonstra că singura funcție care îndeplinește condițiile din enunț este cea nulă. Presupunem, prin absurd, că există o funcție continuă, descrescătoare, nenulă $f : [0,1] \to [0,\infty)$, care satisface

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 1 \tag{1}$$

și

$$\int_0^1 f(x^3)\,\mathrm{d}x \leq 3\left(\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{2}$$

Aplicând inegalitatea lui Cebîșev, obținem

$$\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

de unde

$$3\left(\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{3}$$

Deoarece $x^3 \le x$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, iar f este descrescătoare, avem

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x^3)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Din (2), (3) și (4) rezultă că

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Cum $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ (funcția continuă $f : [0,1] \to [0,\infty)$ a fost presupusă nenulă), deducem că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{4}{3}$, în contradicție cu (1).

4. Deoarece $-M \le f'(x) \le M$ pentru orice $x \in [0,1]$, rezultă că funcția

$$\forall\ x \in [0,1] \ \mapsto\ f(x) + Mx$$

este crescătoare, în timp ce funcția

$$\forall\ x \in [0,1] \ \mapsto\ f(x) - Mx$$

este descrescătoare. Aplicând inegalitatea lui Cebîșev acestor două funcții, deducem că

$$\int_0^1 \big(f(x) - Mx\big)\big(f(x) + Mx\big)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \big(f(x) - Mx\big)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \big(f(x) + Mx\big)\,\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \frac{M^2}{3} \le \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{M}{2}\right)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{M}{2}\right).$$

Urmează de aici că

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{M^2}{3} - \frac{M^2}{4} = \frac{M^2}{12}.$$

5. Fie $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixat arbitrar. Conform inegalității lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, avem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_{\sigma(i)}(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}\,\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^1 \left(\sqrt{f_{\sigma(i)}(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \left(\frac{f_i(x)}{\sqrt{f_{\sigma(i)}(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\ge \quad \left(\int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,
\end{aligned}$$

deci

$$\int_0^1 \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}\,\mathrm{d}x \geq \frac{\left(\int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f_{\sigma(i)}(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Înmulțind membru cu membru cele n inegalități astfel obținute, găsim

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n \int_0^1 \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}\,\mathrm{d}x &\geq \frac{\prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\prod_{i=1}^n \int_0^1 f_{\sigma(i)}(x)\,\mathrm{d}x}\\ &= \frac{\left(\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \cdots \left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdots \left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)}\\ &= \prod_{i=1}^n \int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

6. Fie $g, h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ părțile pară și respectiv impară ale lui f:

$$g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Avem $f(x) = g(x) + h(x)$ oricare ar fi $x \in [-1,1]$. Ținând seama că g este pară, iar h este impară, avem

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(g^2(x) + h^2(x) + 2\underbrace{g(x)h(x)}_{\text{impară}}\right)\mathrm{d}x,$$

deci

(1) $$\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

În baza inegalității lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, avem

$$\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_{-1}^1 1^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

deci

(2) $$\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

precum și

$$\begin{aligned}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{-1}^{1} \underbrace{xg(x)}_{\text{impară}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} xh(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-1}^{1} xh(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\le \left(\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^{1} h^2(x)\,\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

deci

$$\int_{-1}^{1} h^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{3}$$

Însumând inegalitățile (2) și (3) și ținând seama de (1), obținem inegalitatea din enunț.

În inegalitatea din enunț avem egalitate dacă și numai dacă în (2) și (3) avem egalitate. Având în vedere observația 6.2.2, acest lucru se întâmplă dacă și numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ în așa fel încât să avem $g(x) = a$ și respectiv $h(x) = bx$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$. Cu alte cuvinte, funcțiile f pentru care inegalitatea din enunț devine egalitate sunt cele de forma $f(x) = a+bx$ oricare ar fi $x \in [-1, 1]$, cu a, b constante reale arbitrare.

7. a) A se vedea demonstrația teoremei 6.2.1.

b) Fie $f \in \mathcal{C}$ arbitrar aleasă. În baza inegalității lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sqrt[4]{1+x^2}\,f'(x)\right)^2\mathrm{d}x \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}\right)^2\mathrm{d}x &\ge \left(\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left(f(x)\Big|_0^1\right)^2 = 1,\end{aligned}$$

de unde

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\big(f'(x)\big)^2\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1} = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}.$$

Am dovedit așadar că

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\big(f'(x)\big)^2\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \quad \text{pentru orice } f \in \mathcal{C}.$$

Ținând seama de observația 6.2.2, avem egalitate dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nu ambele nule, în așa fel încât

$$\alpha \sqrt[4]{1+x^2} f'(x) = \beta \, \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}} \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1].$$

Evident, nu putem avea $\alpha = 0$. Notând $t := \beta/\alpha$, deducem că

$$f'(x) = t \, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1],$$

deci există o constantă $c \in \mathbb{R}$ în așa fel încât

$$f(x) = t \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1].$$

Condițiile $f(0) = 0$ și respectiv $f(1) = 1$ implică $c = 0$ și $t = 1/\ln(1+\sqrt{2})$. În concluzie,

$$\min_{f \in \mathcal{C}} \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\big(f'(x)\big)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})},$$

egalitatea având loc doar pentru funcția $f(x) = \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{2})}$.

8. Dacă f este funcția nulă, atunci concluzia este evidentă. Presupunem în continuare că există $x_0 \in [0,\infty)$ pentru care $f(x_0) \neq 0$. Fie $n > x_0$ un număr natural arbitrar. În baza inegalității lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz și a ipotezei, avem

$$\begin{aligned}
(1) \quad \left(\int_0^n f(x) f(n-x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leq \left(\int_0^n f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^n f^2(n-x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \left(\int_0^n f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(-\int_n^0 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\int_0^n f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\int_0^n f(x) f(n-x)\,\mathrm{d}x\right)^2.
\end{aligned}$$

Prin urmare, inegalitatea (1) are loc cu egalitate. Ținând seama de condiția de egalitate în inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (observația 6.2.2), precum și de faptul că $f(x_0) \neq 0$, deducem existența unui număr real α, în așa fel încât $f(n-x) = \alpha f(x)$ pentru orice $x \in [0,n]$. Înlocuind în egalitatea din enunț, găsim $\alpha = 1$. În concluzie, pentru orice număr natural $n > x_0$ avem

$$(2) \qquad f(n-x) = f(x) \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,n].$$

Fie acum $x \in [0,\infty)$ oarecare. Alegem un număr natural n astfel încât $n-1 > \max\{x_0, x\}$. Atunci, conform relației (2), avem

$$f(x+1) = f(n-1-x) = f(x),$$

deci f are pe 1 drept perioadă.

9. Fie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $g(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci avem $g(0) = g(1) = 0$ și $g'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Integrând prin părți, obținem

$$\int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, deducem că

$$(1) \qquad \begin{aligned} \left(\int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Pe de altă parte însă, tot în baza inegalității lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, avem

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x f(t)^2 \mathrm{d}t\right) \\ &= x\int_0^x f(t)^2 \mathrm{d}t \leq x\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

de unde

$$(2) \qquad \int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea din enunț.

10. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 \big(f(x) - ax - b\big)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (ax+b)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (ax+b)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2a\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - 2b\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\
&= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 - 2a - 2b.
\end{aligned}$$

Deci

$$(1) \qquad \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq -\frac{a^2}{3} - ab - b^2 + 2a + 2b \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}.$$

Determinăm maximul funcției

$$g(a,b) := -\frac{a^2}{3} - ab - b^2 + 2a + 2b = -\frac{a^2}{3} + (2-b)a + 2b - b^2.$$

Acesta se atinge când $a = \frac{2-b}{2/3} = \frac{6-3b}{2}$. Din

$$g\left(\frac{6-3b}{2}, b\right) = -\frac{b^2}{4} - b + 3 \longrightarrow \text{ max pentru } b = -2 \;\Rightarrow\; a = 6,$$

în baza lui (1) deducem că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq g(6,-2) = 4$. Egalitatea are loc, de exemplu, în cazul funcției $f(x) = 6x - 2$.

Observație. Pe spațiul liniar $C[0,1]$ considerăm produsul scalar definit prin

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sistemul $\{f_0, f_1\}$, unde $f_0(x) := 1$ și $f_1(x) := x$ oricare ar fi $x \in [0,1]$ este liniar independent. Aplicându-i procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt, se obține sistemul ortonormal $\{e_0, e_1\}$, unde $e_0(x) := 1$ și $e_1(x) := 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Conform inegalității lui Bessel, avem

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \|f\|^2 \geq \langle f, e_0\rangle^2 + \langle f, e_1\rangle^2 = 4,$$

deoarece $\langle f, e_0 \rangle = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ și

$$\langle f, e_1 \rangle = 2\sqrt{3} \int_0^1 f(x) \left(x - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x = \sqrt{3}.$$

11. Procedând ca în rezolvarea problemei precedente, se găsește că minimul cerut este $4/\pi$. Lăsăm detaliile în seama cititorului.

12. Fie $q := \frac{p}{p-1}$ conjugatul lui p (adică unicul număr $q \in (1, \infty)$ cu proprietatea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Aplicând inegalitatea lui Hölder funcțiilor f și $g = 1$, deducem că

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b 1^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

deci $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)^p \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x.$

13. Fie $r, s \in (0, \infty)$ astfel ca $r < s$. Aplicând inegalitatea lui Hölder pentru $q := s/r > 1$ și $p := \frac{q}{q-1} = \frac{s}{s-r} > 1$, deducem că

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^r\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot |f(x)|^r\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_a^b 1^p\,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)|^s\,\mathrm{d}x \right)^{r/s} \\ &= (b-a)^{\frac{s-r}{s}} \left(\int_a^b |f(x)|^s\,\mathrm{d}x \right)^{r/s}, \end{aligned}$$

de unde

$$\left(\int_a^b |f(x)|^r\,\mathrm{d}x \right)^{1/r} \leq (b-a)^{\frac{s-r}{rs}} \left(\int_a^b |f(x)|^s\,\mathrm{d}x \right)^{1/s}. \tag{1}$$

Ținând seama de (1), obținem

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= (b-a)^{-\frac{1}{r}} \left(\int_a^b |f(x)|^r\,\mathrm{d}x \right)^{1/r} \leq (b-a)^{-\frac{1}{r}+\frac{s-r}{rs}} \left(\int_a^b |f(x)|^s\,\mathrm{d}x \right)^{1/s} \\ &= (b-a)^{-\frac{1}{s}} \left(\int_a^b |f(x)|^s\,\mathrm{d}x \right)^{1/s} = \varphi(s). \end{aligned}$$

Deci $\varphi(r) \le \varphi(s)$ oricare ar fi $r, s \in (0, \infty)$ cu $r < s$.

14. Fie $q := \frac{p}{p-1}$ conjugatul lui p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Aplicând inegalitatea lui Hölder, obținem

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^p |f(x)| \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{p-\frac{1}{p}} \cdot x^{1/p} |f(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_0^1 x^{q\left(p-\frac{1}{p}\right)} \mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_0^1 x |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Deoarece $\displaystyle\int_0^1 x^{q\left(p-\frac{1}{p}\right)} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{p+1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+2}$, avem

$$\int_0^1 x^p |f(x)| \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{(p+2)^{\frac{p-1}{p}}} \left(\int_0^1 x |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Notând $\alpha_p := 1/(p+2)^{\frac{p-1}{p}}$ și $A := \int_0^1 x|f(x)|^p \,\mathrm{d}x$, rezultă că

$$I(f) \le \alpha_p A^{1/p} - A.$$

Un calcul elementar arată că funcția $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) := \alpha_p y^{1/p} - y$, are un unic punct critic, anume $y_0 = \left(\frac{\alpha_p}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, este strict crescătoare pe $[0, y_0]$ și strict descrescătoare pe $[y_0, \infty)$. Drept urmare, avem

$$I(f) \le g(A) \le g(y_0) = \alpha_p \left(\frac{\alpha_p}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left(\frac{\alpha_p}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}},$$

adică $I(f) \le \alpha_p^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}} - \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \right) = \frac{1}{p+2} \left(\frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}} - \frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \right)$. Egalitatea are loc, de exemplu, pentru funcția $f(x) = \frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}} x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

15. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\begin{aligned}&\int_0^t f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \left(\int_0^t g(x) \,\mathrm{d}x + \int_t^1 g(x) \,\mathrm{d}x \right) \\ &\qquad \le \int_0^t g(x) \,\mathrm{d}x \left(\int_0^t f(x)g(x) \,\mathrm{d}x + \int_t^1 f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \right),\end{aligned}$$

adică cu

$$\int_0^t f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \int_t^1 g(x) \,\mathrm{d}x \le \int_0^t g(x) \,\mathrm{d}x \int_t^1 f(x)g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Ultima inegalitate are loc deoarece, f fiind crescătoare și g pozitivă, avem

$$\int_0^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x \le f(t)\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x \int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

în timp ce

$$\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x \int_t^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ge f(t)\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x \int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

16. Procedăm prin discretizare. Inegalitatea din enunț va fi demonstrată de îndată ce vom dovedi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$(1) \qquad \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n k a_k^2\right) \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n k a_k\right),$$

în ipoteza că $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$ (a se vedea demonstrațiile teoremelor 6.1.1, 6.2.1, 6.3.3 sau 6.3.5). După desfacerea parantezelor, inegalitatea (1) se poate rescrie sub următoarele forme echivalente:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_j \cdot k a_k^2 \le \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_j^2 \cdot k a_k \\
&\quad\Leftrightarrow\quad 0 \le \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n k a_j a_k (a_j - a_k) \\
&\quad\Leftrightarrow\quad 0 \le \sum_{1\le j<k\le n} k a_j a_k (a_j - a_k) + \sum_{1\le k<j\le n} k a_j a_k (a_j - a_k) \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \sum_{1\le k<j\le n} k a_j a_k (a_k - a_j) \le \sum_{1\le j<k\le n} k a_j a_k (a_j - a_k).
\end{aligned}$$

Interschimbând între ei indicii j și k în suma din membrul stâng, ultima inegalitate devine

$$\sum_{1\le j<k\le n} j a_k a_j (a_j - a_k) \le \sum_{1\le j<k\le n} k a_j a_k (a_j - a_k),$$

echivalentă cu

$$0 \le \sum_{1\le j<k\le n} a_j a_k (k-j)(a_j - a_k).$$

Or, ultima inegalitate este evident adevărată, deoarece pentru orice indici $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, cu $j < k$, avem $a_j a_k (k-j)(a_j - a_k) \ge 0$.

17. Prin discretizare, inegalitatea din enunț va fi dovedită de îndată ce vom demonstra că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$(a_1 + \cdots + a_n)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \leq n(a_1^3 + \cdots + a_n^3). \tag{1}$$

Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avem

$$a_i a_j^2 + a_j a_i^2 \leq a_i^3 + a_j^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (a_i - a_j)(a_i^2 - a_j^2).$$

Însumând inegalitățile de mai sus pentru $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, obținem (1).

18. Avem

$$\begin{aligned}
2\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^b \big(f(x) - m\big)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \big(f(x) - M\big)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - m|\,|g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |f(x) - M|\,|g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \big(f(x) - m\big)\,|g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b \big(M - f(x)\big)\,|g(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Deci

$$2\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (M - m)\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x,$$

de unde rezultă inegalitatea din enunț.

19. Considerăm funcția $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(y) := \left(\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^y f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

Evident, F este derivabilă și

$$F'(y) = 2f(y)\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - f^3(y) = f(y)G(y) \quad \text{oricare ar fi } y \in [0,1],$$

unde $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(y) := 2\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - f^2(y)$. Funcția G este de asemenea derivabilă și

$$G'(y) = 2f(y) - 2f(y)f'(y) = 2f(y)\big(1 - f'(y)\big) \quad \text{oricare ar fi } y \in [0,1].$$

Deoarece $f(0) = 0$ și $f' > 0$, rezultă că f este strict crescătoare, deci $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$. Deducem atunci că $G'(y) \geq 0$ pentru orice $y \in [0,1]$, deci G este crescătoare. Cum $G(0) = 0$, urmează că $G(y) \geq 0$, deci $F'(y) \geq 0$ oricare ar fi $y \in [0,1]$. Drept urmare, F este crescătoare, deci $F(1) \geq F(0) = 0$, adică tocmai inegalitatea din enunț. Avem egalitate, de exemplu, pentru $f(x) := x$ oricare ar fi $x \in [0,1]$.

20. Stabilim mai întâi următoarea

Lemă. *Dacă* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este o funcție derivabilă cu derivata continuă, iar* $x \in [0,1]$, *atunci*

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - \int_0^x t h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)h'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

În adevăr, avem

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (t)' h(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 (1-t)' h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrând prin părți în cele două integrale din membrul drept, obținem (1).

a) Conform lemei, avem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= f(a) - \int_0^a t f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^1 (1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq -\int_0^a t f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^1 (1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left|\int_0^a t f'(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^1 (1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^a t|f'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^1 (1-t)|f'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

b) Conform lemei, avem

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tg'(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 (1-t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_0^x tg'(t)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_x^1 (1-t)g'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\geq \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t|g'(t)|\,\mathrm{d}t - \int_x^1 (1-t)|g'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x |g'(t)|\,\mathrm{d}t - \int_x^1 |g'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big(g(t) - |g'(t)|\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează analog.

21. Fie $\alpha \in (0,1)$ arbitrar. Făcând schimbarea de variabilă $x = \alpha t$ și ținând seama că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, avem

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^1 \Big(f(\alpha t) - f(t)\Big)\mathrm{d}t,$$

deci

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \alpha \int_0^1 \big|f(\alpha t) - f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

În baza teoremei de medie a lui Lagrange, pentru orice $t \in [0,1]$ are loc inegalitatea

$$\big|f(\alpha t) - f(t)\big| \leq M|\alpha t - t| = M(1-\alpha)t.$$

Prin combinarea ultimelor două inegalități deducem că

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\alpha(1-\alpha)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\,M \leq \frac{1}{8}\,M,$$

deoarece $\alpha(1-\alpha) \leq 1/4$.

22. Dacă $M = \infty$, atunci nu avem ce demonstra nici la a), nici la b). Presupunem în continuare că $M < \infty$.

a) Făcând schimbarea de variabilă $x = at$, din $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, deducem că $\int_{-1}^1 f(at)\,\mathrm{d}t = 0$, deci

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^1 \Big(f(x) - f(ax)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-1}^1 \big|f(x) - f(ax)\big|\,\mathrm{d}x.$$

În baza teoremei de medie a lui Lagrange, pentru orice $x \in [-1, 1]$ are loc inegalitatea

$$\big|f(x) - f(ax)\big| \leq M|x - ax| = M(1-a)|x|.$$

Prin combinarea ultimelor două inegalități deducem că

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M(1-a)\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = M(1-a).$$

b) Pentru orice $x \in [-1, 1]$ avem

$$|f(x)| = |f(0) - (f(0) - f(x))| \geq |f(0)| - |f(0) - f(x)|.$$

Deoarece $|f(0) - f(x)| \leq M|x|$ (în baza teoremei de medie a lui Lagrange), deducem că

$$|f(x)| \geq |f(0)| - M|x| \quad \text{oricare ar fi } x \in [-1, 1].$$

Integrând pe $[-1, 1]$, se obține inegalitatea din enunț.

23. Fie $x \in (0, 1)$ arbitrar. Aplicând funcției f teorema de medie a lui Lagrange pe intervalele $[0, x]$ și $[x, 1]$, rezultă existența unor puncte $c_1 \in (0, x)$ și $c_2 \in (x, 1)$ astfel ca $f(x) - f(0) = f'(c_1)x$ și $f(x) - f(1) = f'(c_2)(x-1)$. Deducem de aici că

$$|f(x)| = |f'(c_1)|x \leq x \quad \text{și} \quad |f(x)| = |f'(c_2)|(1-x) \leq 1-x.$$

Cum $x \in (0, 1)$ a fost arbitrar, iar $f(0) = f(1) = 0$, conchidem că

$$|f(x)| \leq \min\{x, 1-x\} \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, 1].$$

Ținând seama de această inegalitate, avem

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{1/2} x\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

24. Fie $x \in [a, b]$ arbitrar. În baza formulei lui Taylor, există un punct c_x între $\frac{a+b}{2}$ și x, în așa fel încât

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(c_x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Întrucât $-M \leq f''(c_x) \leq M$, deducem că

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{M}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq f(x)$$

și

$$f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{M}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

pentru orice $x \in [a,b]$. Integrând aceste inegalități pe $[a,b]$ și ținând seama că

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{și} \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12},$$

obținem

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{M(b-a)^3}{24} \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{M(b-a)^3}{24}.$$

Rezultă de aici că

$$-\frac{M(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M(b-a)^2}{24},$$

adică inegalitatea din enunț.

25. Fie $x \in (a,b)$ fixat arbitrar și fie polinomul definit prin

$$L(t) := \frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}\, f(x).$$

Acesta este tocmai polinomul de interpolare al lui Lagrange asociat funcției f și nodurilor a, x și b. Avem $L(a) = f(a)$, $L(b) = f(b)$ și $L(x) = f(x)$, deci funcția $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(t) := L(t) - f(t)$, se anulează în punctele a, x și b. Aplicând teorema lui Rolle pe intervalele $[a,x]$ și $[x,b]$, rezultă existența unor puncte $c_1 \in (a,x)$ și $c_2 \in (x,b)$ astfel ca $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$. Aplicând încă o dată teorema lui Rolle pe intervalul $[c_1,c_2]$, rezultă existența unui punct $c \in (c_1,c_2)$ cu proprietatea că $g''(c) = 0$. Cum

$$g''(t) = L''(t) - f''(t) = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)} - f''(t) \quad \text{oricare ar fi } t \in (a,b),$$

deducem că $f''(c) = \dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$, deci

$$|f(x)| = |f''(c)|\,\frac{(x-a)(b-x)}{2} \le M\,\frac{(x-a)(b-x)}{2}\,,$$

inegalitate care are loc inclusiv pentru $x = a$ și $x = b$. Integrând pe $[a,b]$, obținem

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x = M\,\frac{(b-a)^3}{12}\,.$$

26. Fie $x \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$ fixat arbitrar și fie polinomul definit prin

$$L(t) := \frac{t(t+1)(t-1)}{x(x+1)(x-1)}\,f(x).$$

Acesta este tocmai polinomul de interpolare al lui Lagrange asociat funcției f și nodurilor -1, 0, 1 și x. Avem

$$L(-1) = f(-1), \quad L(0) = f(0), \quad L(1) = f(1) \quad \text{și} \quad L(x) = f(x),$$

deci funcția $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(t) := L(t) - f(t)$, se anulează în punctele -1, 0, 1 și x. Aplicând de trei ori teorema lui Rolle, rezultă că există un punct $c \in (-1,1)$ cu proprietatea că $g'''(c) = 0$. Cum

$$g'''(t) = L'''(t) - f'''(t) = \frac{6f(x)}{x(x+1)(x-1)} - f'''(t) \quad \text{oricare ar fi } t \in (-1,1),$$

deducem că $f'''(c) = \dfrac{6f(x)}{x(x+1)(x-1)}$, deci

$$|f(x)| = |f'''(c)|\,\frac{|x|(1+x)(1-x)}{6} \le M\,\frac{|x|(1+x)(1-x)}{6}\,,$$

unde $M := \max\{\,|f'''(x)| \mid x \in [-1,1]\,\}$. Această inegalitate are loc inclusiv pentru $x \in \{-1,0,1\}$. Integrând pe $[-1,1]$, obținem

$$\int_{-1}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{6}\int_{-1}^1 |x|(1+x)(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{12}\,.$$

27. Fie $x_0 \in [a,b]$ în așa fel încât $|f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Dacă $x_0 = a$ sau $x_0 = b$, atunci $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [a,b]$ și inegalitatea din enunț are loc cu egalitate. Admitem în continuare că $x_0 \in (a,b)$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $f(x_0) \geq 0$ (în caz contrar înlocuim pe f cu $-f$). Din teorema de medie a lui Lagrange rezultă existența unor puncte $c_1 \in (a, x_0)$ și $c_2 \in (x_0, b)$ în așa fel încât

$$f(x_0) = f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)f'(c_1)$$

și

$$f(x_0) = f(x_0) - f(b) = (x_0 - b)f'(c_2).$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}x &\geq \int_{c_1}^{c_2} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left|\int_{c_1}^{c_2} f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= |f'(c_1) - f'(c_2)| = f(x_0)\left(\frac{1}{x_0 - a} + \frac{1}{b - x_0}\right) \\
&\geq \frac{4}{b-a}\,f(x_0),
\end{aligned}$$

deoarece funcția $\varphi(x) := 1/x$ fiind convexă pe $(0, \infty)$, avem

$$\frac{1}{x_0 - a} + \frac{1}{b - x_0} = \varphi(x_0 - a) + \varphi(b - x_0) \geq 2\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{4}{b-a}\,.$$

28. Fie $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcțiile definite prin $g(x) := f(x) + \frac{1}{6}$ și respectiv $h(x) := \frac{1}{2} - x$. Integrând prin părți și ținând seama că $g(0) = g(1) = 0$, obținem

$$\int_0^1 g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Din $\displaystyle\int_0^1 \Big(g'(x) - h(x)\Big)^2 \mathrm{d}x \geq 0$ rezultă că

$$\int_0^1 \Big(g'(x)\Big)^2 \mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \Big(h(x)\Big)^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{12}\,,$$

deci

$$\int_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 \mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $g'(x) = h(x)$ pentru orice $x \in [0,1]$, adică dacă și numai dacă $f(x) = -\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2 = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\,x(1-x)$ pentru orice $x \in [0,1]$.

29. Fie $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcțiile definite prin $g(x) := f(x) + \frac{1}{6}$ și respectiv $h(x) := -x$. Integrând prin părți și ținând seama că $h(0) = g(1) = 0$, obținem

$$\int_0^1 g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ținând seama de această egalitate și de inegalitatea din enunț, avem

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_0^1 \Big(g'(x) - h(x)\Big)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big(g'(x)\Big)^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \Big(h(x)\Big)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3} \\
&= \int_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le 0,
\end{aligned}$$

deci

$$\int_0^1 \Big(f'(x) - h(x)\Big)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(g'(x) - h(x)\Big)^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Cum f' este continuă, rezultă că $f'(x) = h(x) = -x$, de unde $f(x) = -\frac{x^2}{2} + c$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă. Din $f(1) = -1/6$ rezultă $c = 1/3$, deci $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{3}$ pentru orice $x \in [0,1]$. Se verifică prin calcul că f satisface inegalitatea din enunț.

30. Integrând prin părți, obținem

$$\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{xf(x)\Big|_0^{1/2}}_{=0} - \int_0^{1/2} xf'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{1/2} xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

și

$$\int_{1/2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-(1-x)f(x)\Big|_{1/2}^1}_{=0} + \int_{1/2}^1 (1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 (1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ținând seama de aceste egalități precum și de inegalitatea elementară

$$(-u+v)^2 \le 2(u^2+v^2),$$

deducem că

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(-\int_0^{1/2} xf'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 (1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\le 2\left[\left(\int_0^{1/2} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_{1/2}^1 (1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right].\end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz celor două integrale din membrul drept obținem

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\le 2\left[\left(\int_0^{1/2} x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{1/2} \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)\right.\\ &\quad \left. + \left(\int_{1/2}^1 (1-x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{1/2}^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)\right]\\ &= 2\left[\frac{1}{24}\int_0^{1/2} \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{24}\int_{1/2}^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{12}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

inegalitate echivalentă cu cea din enunț.

31. Pentru orice $x \in [a,b]$ avem

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ținând seama de inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, deducem că

$$\begin{aligned}f(x)^2 &= \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \int_a^x 1^2\mathrm{d}t \int_a^x f'(t)^2\mathrm{d}t\\ &= (x-a)\int_a^x f'(t)^2\mathrm{d}t \le (b-a)\int_a^b f'(t)^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Integrând această inegalitate pe $[a,b]$ în raport cu x și ținând seama că membrul drept este o constantă care nu depinde de x, obținem

$$\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \le (b-a)^2\int_a^b f'(t)^2\mathrm{d}t,$$

adică inegalitatea din enunț.

32. A se vedea rezolvarea problemei următoare, care este o generalizare a acesteia.

33. Ținând seama de dezvoltarea în serie Taylor a lui f cu restul în formă integrală, precum și de ipoteza asupra derivatelor de ordin par ale lui f, avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{f^{(2n+2)}(y)}{(2n+1)!}\,(x-y)^{2n+1}\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \int_0^x \frac{f^{(2n+2)}(y)}{(2n+1)!}\,(x-y)^{2n+1}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

pentru orice $x \in [-1,1]$. Integrând pe $[-1,1]$ obținem

$$(2n+1)! \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\int_0^x f^{(2n+2)}(y)(x-y)^{2n+1}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Cum $f^{(2n+2)}$ este continuă, în baza teoremei lui Fubini, integrala iterată din membrul drept al precedentei egalități este egală cu

$$\begin{aligned} &- \int_{-1}^0 \left(\int_{-1}^y f^{(2n+2)}(y)(x-y)^{2n+1}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &\qquad + \int_0^1 \left(\int_y^1 f^{(2n+2)}(y)(x-y)^{2n+1}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

adică cu

$$\frac{1}{2n+2} \left(\int_{-1}^0 f^{(2n+2)}(y)(1+y)^{2n+2}\mathrm{d}y + \int_0^1 f^{(2n+2)}(y)(1-y)^{2n+2}\mathrm{d}y \right).$$

Drept urmare, avem

$$\begin{aligned} &(2n+2)!^2 \left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \\ &\quad = \left(\int_{-1}^0 f^{(2n+2)}(y)(1+y)^{2n+2}\mathrm{d}y + \int_0^1 f^{(2n+2)}(y)(1-y)^{2n+2}\mathrm{d}y \right)^2. \end{aligned}$$

Utilizând mai întâi inegalitatea elementară $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$, iar apoi inegalitatea lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, deducem că

$$\begin{aligned}
&\frac{(2n+2)!^2}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right)^2 \\
&\leq \left(\int_{-1}^{0} f^{(2n+2)}(y)(1+y)^{2n+2}\mathrm{d}y\right)^2 + \left(\int_{0}^{1} f^{(2n+2)}(y)(1-y)^{2n+2}\mathrm{d}y\right)^2 \\
&\leq \left(\int_{-1}^{0}\left(f^{(2n+2)}(y)\right)^2\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-1}^{0}(1+y)^{4n+4}\mathrm{d}y\right) \\
&\qquad + \left(\int_{0}^{1}\left(f^{(2n+2)}(y)\right)^2\mathrm{d}y\right)\left(\int_{0}^{1}(1-y)^{4n+4}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{4n+5}\left(\int_{-1}^{0}\left(f^{(2n+2)}(y)\right)^2\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\left(f^{(2n+2)}(y)\right)^2\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

Drept urmare, avem

$$\int_{-1}^{1}\left(f^{(2n+2)}(x)\right)^2\mathrm{d}x \geq \frac{(2n+2)!^2(4n+5)}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

34. Se aplică inegalitatea dreaptă din teorema 6.4.2 (inegalitatea lui Hermite-Hadamard) pe fiecare dintre intervalele $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și încă o dată pe $[0,1]$. Prin însumarea celor $n+1$ inegalități, se obține inegalitatea din enunț. Lăsăm detaliile în seama cititorului.

35. Fie $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $g(x) := xf(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Atunci g este continuă pe $[-1,1]$, de două ori derivabilă pe $(-1,1)$ și

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in (-1,1).$$

Conform unui rezultat cunoscut (a se vedea, de exemplu, W. W. Breckner și T. Trif [2, Corollary 3.2.11]), rezultă că funcția g este convexă. Aplicând inegalitatea lui Hermite-Hadamard (teorema 6.4.2), deducem că

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \geq 2g(0) = 0.$$

Drept urmare, avem

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2} + g(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{3}.$$

36. Vom spune că un interval închis $I \subset [0,1]$ are proprietatea (**P**) dacă pentru orice funcție convexă derivabilă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\int_0^1 \max\{f(a), f(x)\}\,\mathrm{d}x \geq \max_{x\in I} f(x). \tag{1}$$

Evident, dacă I are proprietatea (**P**), atunci orice subinterval închis al lui I are de asemenea proprietatea (**P**). Prin urmare, este suficient să determinăm intervalul maximal I_0 cu proprietatea (**P**).

Fie $I := [A, B]$ un interval arbitrar cu proprietatea (**P**). Pentru funcția convexă derivabilă $f(x) := x$ trebuie să avem

$$\begin{aligned} B = \max f(I) &\leq \int_0^1 \max\{a, x\}\,\mathrm{d}x = \int_0^a a\,\mathrm{d}x + \int_a^1 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1+a^2}{2}\,, \end{aligned}$$

deci

$$B \leq \frac{1+a^2}{2}\,. \tag{2}$$

Analog, pentru funcția convexă derivabilă $f(x) := 1 - x$ trebuie să avem

$$\begin{aligned} 1 - A = \max f(I) &\leq \int_0^1 \max\{1-a, 1-x\}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 (1-a)\,\mathrm{d}x = 1 - a + \frac{a^2}{2}\,, \end{aligned}$$

deci

$$A \geq a - \frac{a^2}{2}\,. \tag{3}$$

Vom demonstra în continuare că intervalul $I_0 := \left[a - \dfrac{a^2}{2}\,, \dfrac{1+a^2}{2}\right]$ are proprietatea (**P**). În acest scop, fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție convexă derivabilă arbitrară. Conform inegalității lui Hermite-Hadamard (inegalitatea stângă din teorema 6.4.2), avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 \max\{f(a), f(x)\}\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^a f(a)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\geq af(a) + (1-a)f\left(\frac{a+1}{2}\right)\\ &\geq f\left(a\cdot a + (1-a)\cdot\frac{a+1}{2}\right)\\ &= f\left(\frac{1+a^2}{2}\right)\end{aligned}$$

și analog

$$\begin{aligned}\int_0^1 \max\{f(a), f(x)\}\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 f(a)\,\mathrm{d}x\\ &\geq af\left(\frac{a}{2}\right) + (1-a)f(a)\\ &\geq f\left(a\cdot\frac{a}{2} + (1-a)a\right)\\ &= f\left(a - \frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\int_0^1 \max\{f(a), f(x)\}\,\mathrm{d}x \geq \max\left\{f\left(a-\frac{a^2}{2}\right), f\left(\frac{1+a^2}{2}\right)\right\} = \max\, f(I_0),$$

deci I_0 are proprietatea (**P**). Din (2) și (3) deducem apoi că I_0 este intervalul maximal cu proprietatea (**P**). În concluzie, intervalele cu proprietatea (**P**) sunt subintervalele închise ale lui I_0.

Capitolul 7

Teoreme de medie în calculul integral

7.1 Prima teoremă de medie

7.1.1 Teoremă. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și fie $g : [a,b] \to [0,\infty)$ o funcție integrabilă Riemann. Atunci există un punct $c \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

În particular, există un punct $c \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Demonstrație. Notăm

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{și respectiv} \quad M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Ținând seama că $g(x) \geq 0$, rezultă că $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ oricare ar fi $x \in [a,b]$. Prin integrare obținem

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, atunci din lanțul de inegalități de mai sus rezultă că $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, deci pentru orice punct $c \in [a,b]$ are loc (1). Dacă însă

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, atunci avem

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Întrucât f are proprietatea lui Darboux, există un punct $c \in [a, b]$ în așa fel încât $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$. Evident, punctul c satisface (1). $\square$

7.1.2 Aplicaţie (integralele lui Froullani)**.** Fie $a, b > 0$ şi $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se demonstreze că:

a) Dacă există şi sunt finite limitele

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) =: f(0+) \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) =: f(\infty),$$

atunci are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(0+) - f(\infty)\big) \ln \frac{b}{a}\,.$$

b) Dacă există şi este finită limita $\lim_{x \searrow 0} f(x) =: f(0+)$ şi există $c > 0$ aşa încât integrala improprie $\displaystyle\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0+) \ln \frac{b}{a}\,.$$

c) Dacă există şi este finită limita $\lim_{x \to \infty} f(x) =: f(\infty)$ şi există $c > 0$ aşa încât integrala improprie $\displaystyle\int_{0+0}^{c} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = -f(\infty) \ln \frac{b}{a}\,.$$

Rezolvare. a) Presupunem, fără a restrânge generalitatea că $a < b$ (dacă $a = b$, atunci nu avem nimic de demonstrat). Pentru orice $0 < u < v < \infty$ avem

$$\begin{aligned} \int_u^v \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_u^v \frac{f(ax)}{ax}\,a\,\mathrm{d}x - \int_u^v \frac{f(bx)}{bx}\,b\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{au}^{av} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{bu}^{bv} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

deci

$$\int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{au}^{bu} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{av}^{bv} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Teorema de medie 7.1.1, aplicată funcțiilor f și $g(t) := 1/t$, implică existența punctelor $c_u \in [au, bu]$ și respectiv $c_v \in [av, bv]$ astfel ca

$$\int_{au}^{bu} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(c_u)\int_{au}^{bu} \frac{\mathrm{d}t}{t} = f(c_u)\ln\frac{b}{a}$$

și analog

$$\int_{av}^{bv} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(c_v)\ln\frac{b}{a}\,.$$

Ținând cont de (2), obținem

$$\int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(c_u)-f(c_v)\big)\ln\frac{b}{a}\,.$$

Când $u \searrow 0$ și $v \to \infty$, avem $c_u \to 0+$ și $c_v \to \infty$. Prin urmare, există

$$\lim_{u\searrow 0, v\to\infty} \int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(0+)-f(\infty)\big)\ln\frac{b}{a}\,.$$

b) Procedând ca la a), dar aplicând teorema de medie 7.1.1 doar primei integrale din relația (2), deducem existența unui punct $c_u \in [au, bu]$ pentru care

$$\int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(c_u)\ln\frac{b}{a} - \int_{av}^{bv} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Când $u \searrow 0$ și $v \to \infty$, avem $c_u \to 0+$ și $\displaystyle\int_{av}^{bv} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \to 0$, deoarece integrala improprie $\displaystyle\int_c^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Prin urmare, există

$$\lim_{u\searrow 0, v\to\infty} \int_u^v \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0+)\ln\frac{b}{a}\,.$$

c) Se procedează ca la b), dar se aplică teorema de medie 7.1.1 doar celei de-a doua integrale din relația (2). □

7.1.3 Observație. În cazul particular al funcției $f(x) := \operatorname{arctg} x$, din afirmația a) obținem următorul rezultat:

Pentru orice $a, b \in (0, \infty)$ are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}\,.$$

Concursul William Lowell Putnam 1982, problema A3

7.1.4 Aplicație. Fie $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ o funcție continuă, periodică de perioadă 1. Să se demonstreze că:

a) $\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) f(nx)\, \mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x\right)^2.$

C. Mortici, Olimpiada județeană, 2002/4

Rezolvare. a) Întrucât f este continuă, funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$, este o primitivă a lui f. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $G(a) := \displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\, \mathrm{d}x$. Deoarece $G(a) = F(a+1) - F(a)$, rezultă că

$$G'(a) = F'(a+1) - F'(a) = f(a+1) - f(a) = 0 \quad \text{oricare ar fi } a \in \mathbb{R},$$

deci G este constantă. Prin urmare, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $G(a) = G(0)$, adică $\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar. Făcând schimbarea de variabilă $nx = t$, găsim

$$\int_0^1 f(x) f(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right) f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Aplicând teorema 7.1.1, rezultă că pentru fiecare $k \in \{1, \ldots, n\}$ există un punct $c_{k,n} \in [k-1, k]$ în așa fel încât

$$\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right) f(t)\, \mathrm{d}t = f\left(\frac{c_{k,n}}{n}\right) \int_{k-1}^{k} f(t)\, \mathrm{d}t = f\left(\frac{c_{k,n}}{n}\right) \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Drept urmare, avem

$$\int_0^1 f(x) f(nx)\, \mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{c_{k,n}}{n}\right)\right).$$

Notând $\Delta_n := \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\right)$ și respectiv $\xi_n := \left(\frac{c_{1,n}}{n}, \ldots, \frac{c_{n,n}}{n}\right)$, avem $\xi_n \in P(\Delta_n)$ și

$$\int_0^1 f(x)f(nx)\,\mathrm{d}x = \sigma(f, \Delta_n, \xi_n) \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aplicând teorema lui Heine (teorema 5.1.6), deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)f(nx)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

□

7.1.5 Aplicație. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \displaystyle\int_n^{n+3} \frac{x^3}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.

[5, problema P 2.307, g)]

Rezolvare. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Aplicând teorema 7.1.1 funcției $f(x) := \frac{x^3}{1+x^6}$ pe intervalul $[n, n+3]$, rezultă existența unui punct $c_n \in [n, n+3]$ așa încât să avem $\int_n^{n+3} f(x)\,\mathrm{d}x = 3f(c_n) = \frac{3c_n^3}{1+c_n^6}$. Deoarece

$$\frac{3n^3}{1+(n+3)^6} \le \frac{3c_n^3}{1+c_n^6} \le \frac{3(n+3)^3}{1+n^6},$$

rezultă că

$$\frac{3n^6}{1+(n+3)^6} \le n^3 \int_n^{n+3} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{3n^3(n+3)^3}{1+n^6},$$

deci limita cerută este 3. □

7.1.6 Aplicație. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există un număr natural $n \ge 1$ astfel încât

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{și} \quad \int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pentru orice } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Să se demonstreze că există un punct $c \in [a,b]$ astfel ca $f(c) = \dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}$.

M. Predescu, Concursul anual al Gazetei Matematice, 1988

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)^n f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} a^k f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^k \int_a^b x^{n-k} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, conform teoremei 7.1.1 există un punct $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b (x-a)^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b (x-a)^n \mathrm{d}x = f(c)\,\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}\,,$$

deci $f(c) = \dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}$. □

7.2 A doua teoremă de medie

7.2.1 Teoremă (O. Bonnet)**.** *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă și fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă f este descrescătoare și nenegativă pe $[a,b]$, atunci există un punct $c \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2° *Dacă f este crescătoare și nenegativă pe $[a,b]$, atunci există un punct $c \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3° *Există un punct $c \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. 1° Fie $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $G(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci G este continuă pe $[a,b]$. Notăm

$$m := \min_{x\in[a,b]} G(x) \quad \text{și respectiv} \quad M := \max_{x\in[a,b]} G(x).$$

Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ o diviziune oarecare a lui $[a,b]$. Din teorema 7.1.1 (prima teoremă de medie) rezultă că pentru fiecare $j \in \{1,\ldots,k\}$ există un punct $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ așa încât

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x = g(c_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Notând $\xi := (c_1, \ldots, c_k)$, avem $\xi \in P(\Delta)$ și

$$\begin{aligned}
\sigma(fg, \Delta, \xi) &= \sum_{j=1}^{k} f(c_j) g(c_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} f(c_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^{k} f(c_j)\big[G(x_j) - G(x_{j-1})\big] \\
&= f(c_1)\big[G(x_1) - G(x_0)\big] + f(c_2)\big[G(x_2) - G(x_1)\big] + \cdots \\
&\quad + f(c_{n-1}\big[G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})\big] + f(c_n)\big[G(x_n) - G(x_{n-1})\big].
\end{aligned}$$

Ținând seama că $G(x_0) = G(a) = 0$, obținem

$$\begin{aligned}
\sigma(fg, \Delta, \xi) &= G(x_0)\big[f(a) - f(c_1)\big] + G(x_1)\big[f(c_1) - f(c_2)\big] + \cdots \\
&\quad + G(x_{n-1})\big[f(c_{n-1}) - f(c_n)\big] + G(x_n) f(c_n).
\end{aligned}$$

Cum f este descrescătoare și nenegativă, deducem de aici că

$$\begin{aligned}
\sigma(fg, \Delta, \xi) &\leq M\big[f(a) - f(c_1)\big] + M\big[f(c_1) - f(c_2)\big] + \cdots \\
&\quad + M\big[f(c_{n-1}) - f(c_n)\big] + M f(c_n),
\end{aligned}$$

adică $\sigma(fg, \Delta, \xi) \leq M f(a)$. Analog se demonstrează că are loc și inegalitatea $\sigma(fg, \Delta, \xi) \geq m f(a)$.

Am dovedit așadar că pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ există un $\xi \in P(\Delta)$ cu proprietatea că

$$m f(a) \leq \sigma(fg, \Delta, \xi) \leq M f(a).$$

Fie (Δ_n) un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ fie $\xi_n \in P(\Delta_n)$ în așa fel încât

$$m f(a) \leq \sigma(fg, \Delta_n, \xi_n) \leq M f(a).$$

Făcând $n \to \infty$ în acest lanț de inegalități, obținem

$$m f(a) \leq \int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \leq M f(a).$$

Întrucât G este continuă, deci are proprietatea lui Darboux, rezultă existența unui punct $c \in [a, b]$ pentru care

$$\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = f(a) G(c) = f(a) \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2° Dacă f este crescătoare și nenegativă, atunci funcția $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin $\tilde{f}(x) := f(a+b-x)$, este descrescătoare și nenegativă pe $[a,b]$. Conform afirmației 1°, există un punct $\tilde{c} \in [a,b]$ cu proprietatea că

$$\int_a^b \tilde{f}(t)g(a+b-t)\,\mathrm{d}t = \tilde{f}(a)\int_a^{\tilde{c}} g(a+b-t)\,\mathrm{d}t,$$

adică

$$\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)\,\mathrm{d}t = f(b)\int_a^{\tilde{c}} g(a+b-t)\,\mathrm{d}t.$$

Făcând în ambii membri schimbarea de variabilă $x = a+b-t$ și notând $c := a+b-\tilde{c}$, obținem

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3° Presupunem acum că f este doar monotonă (pentru fixarea ideilor crescătoare), fără însă a fi și nenegativă. Atunci funcția $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin $\tilde{f}(x) := f(x) - f(a)$, este crescătoare și nenegativă pe $[a,b]$. Conform afirmației 2°, există un punct $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b \tilde{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \tilde{f}(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_a^b \big(f(x)-f(a)\big)g(x)\,\mathrm{d}x = \big(f(b)-f(a)\big)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Această ultimă egalitate este echivalentă cu

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= f(a)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x - f(a)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\square$

Formulele din teorema 7.2.1 sunt cunoscute în literatura matematică sub numele de *formulele de medie ale lui Bonnet* (după numele matematicianului francez Ossian Bonnet, care le-a descoperit în anul 1849). Drept aplicație a celei de-a doua teoreme de medie a calculului integral vom da o demonstrație pentru criteriul lui Abel de convergență a integralelor improprii.

7.2.2 Teoremă (criteriul lui N. H. Abel)**.** *Fie* $-\infty < a < b \leq \infty$ *și fie funcțiile* $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$*, care îndeplinesc următoarele condiții:*

(i) f *este monotonă și* $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = 0$*;*

(ii) g *este continuă și* $\sup\limits_{a<v<b} \left| \int_a^v g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \infty$.

Atunci integrala improprie $\displaystyle\int_a^{b-} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Demonstrație. Presupunem că f este descrescătoare (deci nenegativă). În caz contrar, înlocuim funcția f cu $-f$. Notăm

$$M := \sup_{a<v<b} \left| \int_a^v g(x)\,\mathrm{d}x \right|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $f(x) \to 0$ când $x \nearrow b$, există un $c \in (a,b)$ în așa fel încât

$$0 \leq f(v) < \frac{\varepsilon}{2M+1} \quad \text{pentru orice } v \in [c,b).$$

Fie apoi $v, v' \in [c,b)$, $v < v'$ arbitrar alese. Din afirmația 1° a teoremei 7.2.1 rezultă existența unui punct $d \in [v,v']$ cu proprietatea că

$$\int_v^{v'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(v) \int_v^d g(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\left| \int_v^{v'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| = f(v) \left| \int_a^d g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^v g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq 2Mf(v) < \varepsilon.$$

În baza criteriului de convergență al lui Cauchy, deducem că integrala improprie $\int_a^{b-} f(x)g(x)dx$ este convergentă. □

7.2.3 Aplicație. Fiind dat un număr real $\beta > 1$, să se demonstreze că există și este finită limita $\displaystyle\lim_{v\to\infty} \int_\beta^v \frac{\sin x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

F. Vornicescu, Olimpiada națională, clasa a XII-a, 1994

Rezolvare. Pentru a dovedi convergența integralei improprii $\displaystyle\int_\beta^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$, este suficient să se aplice teorema 7.2.2 funcțiilor definite prin $f(x) := 1/\ln x$ și respectiv $g(x) := \sin x$. □

7.2.4 Aplicație. Vom prezenta în continuare o demonstrație a formulei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \tag{1}$$

bazată pe cea de-a doua teoremă de medie (teorema 7.2.1). Ideea acestei demonstrații apare în articolul lui E. L. Stark [16].

Demonstrație. Pornim de la nucleul lui Dirichlet

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

și calculăm integrala $\displaystyle\int_0^{\pi} xD_{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ folosind cele două reprezentări ale lui $D_n(x)$. Pe de o parte, deoarece

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x\sin kx}{k}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{\cos kx}{k^2}\right|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } k \text{ par} \\ -2/k^2 & \text{pentru } k \text{ impar,}\end{cases}\end{aligned}$$

rezultă că

$$\int_0^{\pi} xD_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\right). \tag{2}$$

Pe de altă parte, funcția $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(0) := 1$ și respectiv

$$f(x) := \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{dacă } x \in (0,\pi],$$

este crescătoare și pozitivă pe $[0,\pi]$. Cum

$$\int_0^{\pi} xD_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{(4n+1)x}{2}\,\mathrm{d}x,$$

în baza afirmației 2° din teorema 7.2.1 rezultă existența unui punct $c \in [0,\pi]$ astfel ca

$$\int_0^{\pi} xD_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = f(\pi)\int_c^{\pi}\sin\frac{(4n+1)x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{4n+1}\cos\left.\frac{(4n+1)x}{2}\right|_c^{\pi}\right).$$

Prin urmare,

$$\int_0^\pi xD_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4n+1}\cos\frac{(4n+1)c}{2}\,. \tag{3}$$

Deoarece $\dfrac{\pi}{4n+1}\cos\dfrac{(4n+1)c}{2} \to 0$ când $n \to \infty$, din relațiile (2) și (3) deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Notăm cu s suma seriei (1). Făcând $n \to \infty$ în egalitatea

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\,,$$

găsim că $s = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{s}{4}$, de unde $s = \pi^2/6$. □

7.2.5 Aplicație. a) Fie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă pe $[a,b]$. Dacă φ'' nu se anulează pe $[a,b]$ și există o constantă $m > 0$ atfel ca $\varphi'(x) \geq m$ oricare ar fi $x \in [a,b]$, atunci

$$\left|\int_a^b \sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{4}{m}\,.$$

b) Fiind dat $u > 0$, are loc inegalitatea

$$\left|\int_u^v \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{u} \quad \text{pentru orice } v > u.$$

c) Integrala improprie $\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ este convergentă.

Demonstrație. a) Avem

$$\int_a^b \sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{\varphi'(x)}\,\varphi'(x)\sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcțiile definite prin

$$f(x) := \frac{1}{\varphi'(x)} \quad \text{și respectiv} \quad g(x) := \varphi'(x)\sin\varphi(x).$$

Evident, g este continuă, iar $f'(x) = -\dfrac{\varphi''(x)}{\big(\varphi'(x)\big)^2}$ păstrează semn constant pe $[a, b]$ deoarece este continuă și nu se anulează pe acest interval. Prin urmare, f este monotonă. Aplicând teorema 7.2.1, rezultă existența unui punct $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\varphi'(a)}\int_a^c \varphi'(x)\sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varphi'(b)}\int_c^b \varphi'(x)\sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos\varphi(a) - \cos\varphi(c)}{\varphi'(a)} + \frac{\cos\varphi(c) - \cos\varphi(b)}{\varphi'(b)}.
\end{aligned}$$

Rezultă de aici că

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \sin\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \frac{|\cos\varphi(a)| + |\cos\varphi(c)|}{\varphi'(a)} + \frac{|\cos\varphi(c)| + |\cos\varphi(b)|}{\varphi'(b)} \\
&\leq \frac{2}{m} + \frac{2}{m} = \frac{4}{m}.
\end{aligned}$$

b) Se aplică afirmația a) funcției $\varphi(x) := x^2$.

c) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Alegem $c > 0$ în așa fel încât $2/c < \varepsilon$. Atunci, conform lui b), pentru orice $u, v \in [c, \infty)$, cu $u < v$, avem

$$\left|\int_u^v \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{u} \leq \frac{2}{c} < \varepsilon.$$

Aplicând criteriul de convergență al lui Cauchy, deducem că integrala improprie $\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ este convergentă. $\square$

Capitolul 8

Teoreme de convergență în calculul integral

8.1 Teorema convergenței uniforme

Tema acestui capitol este prezentarea unor condiții cât mai puțin restrictive asupra șirului de funcții $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, care să asigure validitatea egalității

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Un răspuns posibil la această problemă a fost dat deja în teorema 3.3.4. Reproducem și mai jos acest rezultat și ne vom referi la el sub numele de *teorema convergenței uniforme*.

8.1.1 Teoremă (teorema convergenței uniforme)**.** *Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *f_n este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *șirul (f_n) converge uniform pe $[a,b]$ către o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Atunci f este integrabilă Riemann, există limita $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ și are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Din păcate, teorema convergenței uniforme cere convergența uniformă a șirului (f_n) pentru a garanta validitatea egalității (1). Convergența uniformă este însă o condiție deosebit de restrictivă, care în multe situații nu este îndeplinită. Se pune astfel în mod firesc întrebarea: rămâne adevărată teorema 8.1.1 dacă se înlocuiește ipoteza convergenței uniforme în (ii) cu ipoteza mai slabă a convergenței punctuale? Răspunsul este că, în general, doar în prezența convergenței punctuale este posibil ca egalitatea (1) să nu aibă loc. Pentru a proba această afirmație este suficient să considerăm exemplul șirului de funcții $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$. În cazul acestui șir avem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{-e^{-nx^2}}{2}\right|_0^1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-n}}{2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = 0$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, deci

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mai mult, dacă se înlocuiește ipoteza convergenței uniforme în teorema 8.1.1 cu ipoteza mai slabă a convergenței punctuale, atunci nici măcar prima concluzie a teoremei (anume integrabilitatea Riemann a limitei) nu rămâne, în general, adevărată. Această afirmație este probată de următorul contra-exemplu. Pentru fiecare număr natural n considerăm mulțimea

$$A_n := \left\{ \frac{k}{n!} \;\middle|\; k := 0,1,2,\ldots,n! \right\}$$

și cu ajutorul acesteia definim funcția $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ prin

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A_n \\ 0 & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus A_n. \end{cases}$$

Evident, fiecare funcție f_n este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ (f_n se obține modificând funcția constantă 0 într-un număr finit de puncte – cele ale mulțimii A_n). Dacă $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, atunci $x \notin A_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $f_n(x) = 0$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Dacă însă $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $x = p/q$ cu $p \geq 0$ și $q > 0$ numere întregi, atunci $x \in A_n$ pentru orice $n \geq q$, deci $f_n(x) = 1$ oricare ar fi $n \geq q$. În concluzie, șirul de funcții (f_n) converge punctual pe $[0,1]$ către funcția lui Dirichlet

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

care, se știe, nu este integrabilă Riemann.

Exemplul de mai sus arată că, în cazul unui rezultat similar teoremei convergenței uniforme, dar în care se presupune că șirul de funcții (f_n) este doar punctual convergent, concluzia privind integrabilitatea Riemann a limitei punctuale trebuie mutată în rândul ipotezelor. Un astfel de rezultat a fost stabilit în anul 1885 de matematicianul italian C. Arzelà [1] și va fi prezentat în secțiunea următoare.

8.2 Teorema convergenței mărginite a lui Arzelà

8.2.1 Teoremă (teorema convergenței mărginite)**.** *Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:*

(i) *f_n este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *oricare ar fi $x \in [a, b]$;*

(iii) *f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$;*

(iv) *există o constantă $M > 0$ în așa fel încât $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [a, b]$.*

Atunci are loc egalitatea $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Vom prezenta în continuare o demonstrație a teoremei convergenței mărginite urmând, în linii mari, ideile din articolul lui N. de Silva [13]. Începem cu câteva

8.2.1 Considerații privind măsura interioară Jordan

Fie $p \in \mathbb{N}$, iar $A, A_1, \ldots, A_p$ submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Faptul că mulţimea A se scrie ca reuniune a mulţimilor $A_1, \ldots, A_p$, acestea fiind disjuncte două câte două, va fi notat prin $A = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{p} A_i$. Cu alte cuvinte, $A = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{p} A_i$ dacă şi numai dacă $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ şi pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \leq b$. Notăm cu $\langle a, b\rangle$ un interval de forma $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ sau $(a, b]$. Orice astfel de interval va fi numit *interval mărginit*.

8.2.2 Definiţie (mulțimi elementare). O submulţime E a lui $\mathbb{R}$ se numeşte *elementară* dacă ea poate fi reprezentată sub forma $E = \bigsqcup_{i=1}^{p} \langle a_i, b_i \rangle$, cu $\langle a_i, b_i \rangle$ intervale mărginite. Numărul real nenegativ, definit prin

$$\ell(E) := \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i),$$

se numeşte *lungimea* mulţimii elementare E. Se poate demonstra că $\ell(E)$ nu depinde de modul în care E se reprezintă ca reuniune de intervale mărginite, disjuncte două câte două. Adică dacă $q \in \mathbb{N}$, iar $\langle c_j, d_j \rangle$, $j = 1, \ldots, q$ sunt alte intervale mărginite în $\mathbb{R}$ încât $E = \bigsqcup_{j=1}^{q} \langle c_j, d_j \rangle$, atunci are loc egalitatea

$$\sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i) = \sum_{j=1}^{q} (d_j - c_j).$$

Drept urmare, lungimea $\ell(E)$ a mulţimii elementare E este corect definită.

Din această definiţie rezultă că orice interval mărginit $I = \langle a, b \rangle$ din $\mathbb{R}$ este o mulţime elementară și $\ell(I) = b - a$. În particular $\emptyset = (a, a)$ este mulțime elementară și $\ell(\emptyset) = 0$.

Notăm cu $\mathcal{E}$ familia tuturor submulţimilor elementare ale lui $\mathbb{R}$.

Următorul rezultat este aproape evident și demonstrația lui va fi omisă.

8.2.3 Propoziție. *Fiind date mulțimile $E, F \in \mathcal{E}$, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F \ \in \mathcal{E}$.
2° *Dacă* $E \cap F = \emptyset$, *atunci* $\ell(E \cup F) = \ell(E) + \ell(F)$.
3° *Dacă* $E \subseteq F$, *atunci* $\ell(E) \leq \ell(F)$ *și* $\ell(F \setminus E) = \ell(F) - \ell(E)$.
4° $\ell(E \cup F) = \ell(E) + \ell(F) - \ell(E \cap F)$.
5° $\ell(E \cup F) \leq \ell(E) + \ell(F)$.

8.2.4 Consecință. *Pentru orice număr natural k și orice $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{E}$ avem $E_1 \cup \cdots \cup E_k \in \mathcal{E}$ și $\ell(E_1 \cup \cdots \cup E_k) \leq \ell(E_1) + \cdots + \ell(E_k)$.*

8.2.5 Definiție (măsura interioară Jordan). Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime mărginită. Atunci există mulțimi elementare E cu proprietatea că $E \subseteq A$ (de exemplu $E = \emptyset$). Drept urmare, mulțimea

$$\mathcal{E}_A := \{ E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq A \}$$

este nevidă. Numărul real, definit prin

$$m_i(A) := \sup_{E \in \mathcal{E}_A} \ell(E),$$

se numește *măsura interioară Jordan* a mulțimii A.

Evident, dacă $E \in \mathcal{E}$, atunci $m_i(E) = \ell(E)$.

Lšăm în seama cititorului și demonstrația (simplă dealtfel) a următorului rezultat.

8.2.6 Propoziție. *Fiind date mulțimile mărginite $A, A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Are loc egalitatea $m_i(A) = \sup_{E \in \overline{\mathcal{E}}_A} \ell(E)$, unde*

$$\overline{\mathcal{E}}_A := \{\, E \in \mathcal{E} \mid \operatorname{cl} E \subseteq A \,\}.$$

2° *Dacă $A_1 \subseteq A_2$, atunci $m_i(A_1) \le m_i(A_2)$.*

8.2.7 Propoziție. *Fie (A_n) un șir descendent de submulțimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$, cu proprietatea că $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Atunci $\lim_{n\to\infty} m_i(A_n) = 0$.*

Demonstrație. Deoarece $A_{n+1} \subseteq A_n$ oricare ar fi $n \ge 1$, conform propoziției 8.2.6 avem $m_i(A_{n+1}) \le m_i(A_n)$. Prin urmare, șirul $\big(m_i(A_n)\big)$ este descrescător și mărginit inferior de 0, deci convergent. Presupunând, prin absurd, că limita acestui șir nu este 0, rezultă existența unui număr real $\delta > 0$ astfel ca

$$m_i(A_n) > \delta \quad \text{oricare ar fi } n \ge 1.$$

Din propoziția 8.2.6 rezultă că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există $E_n \in \mathcal{E}$ în așa fel încât

$$\operatorname{cl} E_n \subseteq A_n \quad \text{și} \quad m_i(A_n) - \frac{\delta}{2^n} < \ell(E_n).$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ notăm

$$F_n := \bigcap_{k=1}^{n} \big(\operatorname{cl} E_k\big).$$

Atunci (F_n) este un șir descendent de submulțimi închise ale lui $\mathbb{R}$.

Vom demonstra că toate mulțimile F_n sunt nevide. Fie, în acest scop, $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar și fie $E \in \mathcal{E}_{A_n \setminus E_n}$. Atunci avem $E \subseteq A_n \setminus E_n$, deci $E \cup E_n \subseteq A_n$ și $E \cap E_n = \emptyset$. Drept urmare,

$$\ell(E) + \ell(E_n) = \ell(E \cup E_n) = m_i(E \cup E_n) \le m_i(A_n),$$

deci

$$\ell(E) \le m_i(A_n) - \ell(E_n) < \frac{\delta}{2^n} \quad \text{oricare ar fi } E \in \mathcal{E}_{A_n \setminus E_n}. \tag{1}$$

Fie acum $E \in \mathcal{E}_{A_n \setminus F_n}$. Atunci avem

$$E \subseteq A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} \big(\operatorname{cl} E_k\big) \subseteq A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} E_k,$$

de unde rezultă imediat că

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} (E \setminus E_k). \tag{2}$$

Pentru fiecare $k \in \{1, \ldots, n\}$ avem $E \setminus E_k \subseteq A_n \setminus E_k \subseteq A_k \setminus E_k$. Ținând seama de (1), deducem că $\ell(E \setminus E_k) < \delta/2^k$. Aceste inegalități împreună cu (2) arată că

$$\ell(E) \le \sum_{k=1}^{n} \ell(E \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{2^k} < \delta \quad \text{oricare ar fi } E \in \mathcal{E}_{A_n \setminus F_n}.$$

Presupunând că $F_n = \emptyset$, ar rezulta că $\ell(E) < \delta$ oricare ar fi $E \in \mathcal{E}_{A_n}$, de unde $m_i(A_n) < \delta$, în contradicție cu alegerea lui δ.

În concluzie, (F_n) este un șir descendent de submulțimi închise, mărginite și nevide ale lui $\mathbb{R}$. Conform unui binecunoscut rezultat de topologie, avem $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Pe de altă parte, $F_n \subseteq \operatorname{cl} E_n \subseteq A_n$ oricare ar fi $n \ge 1$. Deducem de aici că $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, în contradicție cu ipoteza. Contradicția obținută arată că șirul $\big(m_i(A_n)\big)$ are limita 0. □

8.2.2 Demonstrația teoremei convergenței mărginite

8.2.8 Lemă. *Fie $g_n : [0,1] \to [0,1]$ $(n \ge 1)$ un șir de funcții integrabile Riemann cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$ oricare ar fi $t \in [0,1]$. Atunci are loc egalitatea* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, contrarul. Atunci există un număr real $\alpha > 0$ precum și un șir de numere naturale $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ în așa fel încât

$$\int_0^1 g_{n_k}(t)\,\mathrm{d}t > 2\alpha \quad \text{oricare ar fi } k \ge 1.$$

Înlocuind șirul inițial (g_n) cu subșirul (g_{n_k}), putem presupune, fără restrângerea generalității, că

$$\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t > 2\alpha \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1.$$

Fie acum $n \geq 1$ fixat. Din definiția integralei Riemann rezultă că pentru $\varepsilon := \frac{1}{2}\left(\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t - 2\alpha\right) > 0$ există o diviziune Δ a intervalului $[0,1]$, cu proprietatea că

$$\sigma(g_n, \Delta, \xi) > \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon \quad \text{pentru orice } \xi \in P(\Delta).$$

Întrucât

$$s(g_n, \Delta) = \inf_{\xi \in P(\Delta)} \sigma(g_n, \Delta, \xi),$$

rezultă că există $\xi \in P(\Delta)$ în așa fel încât

$$s(g_n, \Delta) > \sigma(g_n, \Delta, \xi) - \varepsilon > \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t - 2\varepsilon = 2\alpha.$$

În concluzie, pentru orice $n \geq 1$ există o diviziune Δ a intervalului $[0,1]$ pentru care $s(g_n, \Delta) > 2\alpha$. Cu alte cuvinte, pentru orice $n \geq 1$ putem așeza sub graficul lui g_n un număr finit de dreptunghiuri, având suma ariilor mai mare decât 2α. Dintre aceste dreptunghiuri, unele sunt *mici*, având înălțimea $\leq \alpha$, iar altele sunt *înalte*, având înălțimea $> \alpha$. Suma ariilor dreptunghiurilor mici este $\leq \alpha$ (suma lungimilor bazelor acestor dreptunghiuri fiind cel mult 1), deci suma ariilor dreptunghiurilor înalte este $> \alpha$. Cum înălțimea fiecărui dreptunghi înalt este cel mult 1, deducem că suma lungimilor bazelor dreptunghiurilor înalte este $> \alpha$. Notăm cu B_n reuniunea tuturor intervalelor închise care corespund bazelor dreptunghiurilor înalte. Am obținut astfel un șir (B_n), de mulțimi care pentru orice $n \geq 1$ îndeplinesc următoarele condiții:

$$B_n \in \mathcal{E}, \quad \ell(B_n) > \alpha \quad \text{și} \quad g_n(t) > \alpha \text{ oricare ar fi } t \in B_n.$$

Pentru fiecare $n \geq 1$ notăm $A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$. Atunci $(A_n)_{n\geq 1}$ este un șir descendent de submulțimi ale lui $[0,1]$ și

$$m_i(A_n) \geq m_i(B_n) = \ell(B_n) > \alpha \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

Conform propoziției 8.2.7, trebuie să avem $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Fie $t \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Deoarece $t \in A_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, rezultă că există $n_1 \geq 1$ astfel ca $t \in B_{n_1}$. Deoarece $t \in A_{n_1+1} = \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} B_k$, rezultă că există $n_2 > n_1$ astfel ca $t \in B_{n_2}$. Continuând inductiv, se construiește un șir $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ de numere naturale în așa fel încât $t \in B_{n_k}$ oricare ar fi $k \geq 1$, adică $g_{n_k}(t) > \alpha$ oricare ar fi $k \geq 1$. Dar această inegalitate este în contradicție cu ipoteza $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$. □

Demonstrația teoremei 8.2.1. Considerăm șirul de funcții $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin

$$g_n(t) := \frac{1}{2M} \big| f_n(a + t(b-a)) - f(a + t(b-a)) \big|.$$

Atunci avem $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ și

$$0 \leq g_n(t) \leq \frac{|f_n(a + t(b-a))| + |f(a + t(b-a))|}{2M} \leq \frac{M+M}{2M} = 1$$

pentru orice $n \geq 1$ și orice $t \in [0,1]$. Conform lemei 8.2.8, avem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Această egalitate, împreună cu

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \big| f_n(x) - f(x) \big|\,\mathrm{d}x \\ & = (b-a) \int_0^1 \big| f_n(a + t(b-a)) - f(a + t(b-a)) \big|\,\mathrm{d}t \\ & = 2M(b-a) \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. □

8.3 Teorema convergenței dominate pentru integrale improprii

Reamintim că, fiind dat un interval nedegenerat I al axei reale, o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ se numește *local integrabilă Riemann* (pe I) dacă restricția sa la orice subinterval compact $[u, v]$ al lui I este integrabilă Riemann.

Fie $-\infty < a < b \le \infty$ și fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă Riemann. Integrala improprie a lui f pe $[a, b)$, notată $\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$, se definește prin

$$(1) \qquad \int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(x)\,\mathrm{d}x,$$

în ipoteza că limita din membrul drept există în $\overline{\mathbb{R}}$. Dacă limita din (1) este finită, atunci vom spune că integrala improprie $\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

8.3.1 Teoremă (teorema convergenței dominate)**.** *Fie $-\infty < a < b \le \infty$, fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție și fie $f_n : [a, b) \to \mathbb{R}$ $(n \ge 1)$ un șir de funcții astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:*

(i) *f_n este local integrabilă Riemann pe $[a, b)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in [a, b)$;*

(iii) *f este local integrabilă Riemann pe $[a, b)$;*

(iv) *există o funcție $g : [a, b) \to [0, \infty)$, care este local integrabilă Riemann pe $[a, b)$, astfel încât integrala improprie $\int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă și $|f_n(x)| \le g(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [a, b)$.*

Atunci integralele improprii $\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$ și $\int_a^{b-} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$ sunt toate convergente și are loc egalitatea $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^{b-} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Demonstrație. Făcând $n \to \infty$ în inegalitatea $|f_n(x)| \le g(x)$ deducem că $|f(x)| \le g(x)$ oricare ar fi $x \in [a, b)$. Conform criteriului majorării, rezultă că integralele improprii $\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$ și $\int_a^{b-} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$ sunt toate absolut convergente, deci convergente. Notăm

$$I := \int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{și} \quad I_n := \int_a^{b-} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Rămâne să dovedim că șirul (I_n) converge către I. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Alegem un punct $b_0 \in (a, b)$ în așa fel încât

$$\int_{b_0}^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Deoarece funcția g este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b_0]$, ea este mărginită pe acest interval. Notând $M := \sup_{x\in[a,b_0]} g(x)$, avem $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [a, b_0]$. În baza teoremei convergenței mărginite (teorema 8.2.1), rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_0} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b_0} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci există un $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\left|\int_a^{b_0} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b_0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0.$$

Atunci pentru orice $n \geq n_0$ avem

$$\begin{aligned}
|I_n - I| &= \left|\int_a^{b_0} f_n(x)dx + \int_{b_0}^{b-} f_n(x)dx - \int_a^{b_0} f(x)dx - \int_{b_0}^{b-} f(x)dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^{b_0} f_n(x)dx - \int_a^{b_0} f(x)dx\right| + \int_{b_0}^{b-} |f_n(x)|dx + \int_{b_0}^{b-} |f(x)|dx \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2\int_{b_0}^{b-} g(x)dx < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Prin urmare, șirul (I_n) converge către I. □

8.3.2 Observație. Evident, variante similare ale teoremei 8.3.1 au loc și pentru funcții $f, f_n : (a, b] \to \mathbb{R}$ cu $-\infty \leq a < b < \infty$, precum și pentru funcții $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ cu $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

8.4 Aplicații

8.4.1 Aplicație. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(P(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

pentru orice funcție polinomială de gradul al treilea $P : [0, 1] \to [0, 1]$. Să se demonstreze că $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

M. Piticari, Olimpiada județeană, 2001/3

Rezolvare. Fie $x_0 \in [0,1]$ fixat arbitrar. Pentru orice număr natural n considerăm funcția polinomială de gradul al treilea $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P_n(x) := \frac{1}{n+1}\, x^3 + \frac{n}{n+1}\, x_0.$$

Observăm că

$$0 \le P_n(x) \le \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1].$$

Conform ipotezei, avem atunci

$$\int_0^1 f(P_n(x))\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Făcând $n \to \infty$, deducem în baza teoremei lui Arzelà că

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(P_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(P_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x_0)\,\mathrm{d}x,$$

deci $f(x_0) = 0$. Cum $x_0 \in [0,1]$ a fost arbitrar, rezultă că $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. □

8.4.2 Aplicație. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ dacă $x \in (0,1]$ și $f(0) = 1$.

D. Andrica și M. Piticari, Olimpiada națională, 2006/2

Rezolvare. Notăm cu ℓ limita din membrul stâng. Avem

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - n\int_0^1 \frac{x}{1+x^{2n}}\, nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - n\int_0^1 \frac{t^{1/n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{0+0}^1 \frac{n\left(1-x^{1/n}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Șirul de funcții $g_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \ge 1)$, definite prin $g_n(x) := \dfrac{n\left(1-x^{1/n}\right)}{1+x^2}$, converge punctual pe $(0,1]$ la funcția $g(x) := -\frac{\ln x}{1+x^2}$. În plus, avem

$$g_n(x) \le g(x) \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } x \in (0,1],$$

deoarece $n\left(1-x^{1/n}\right) \le -\ln x \iff \ln x^{1/n} \le x^{1/n}-1 \iff y \le e^{y-1}$, ultima inegalitate fiind binecunoscută. Cum integrala improprie $\int_{0+0}^1 \ln x \,\mathrm{d}x$ este convergentă, rezultă că și integrala improprie $\int_{0+0}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Aplicând teorema 8.3.1, deducem că

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty}\int_{0+0}^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0+0}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0+0}^1 -\ln x\,(\operatorname{arctg} x)'\,\mathrm{d}x\\ &= -\ln x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_{0+0}^1 + \int_{0+0}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

deci $\ell = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. □

8.4.3 Aplicație. a) Să se demonstreze că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

b) Să se determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(n\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right)$.

SEEMOUS 2014

Rezolvare. a) Șirul de funcții $f_n : (0,\infty)\to\mathbb{R}$ $(n\ge 1)$, definite prin

$$f_n(x) := \frac{n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\cdot\chi_{(0,n]}(x),$$

converge punctual pe $(0,\infty)$ la funcția $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Mai mult, avem

$$0 < f_n(x) < f(x) \quad \text{pentru orice } n\in\mathbb{N} \text{ și orice } x\in(0,\infty)$$

deoarece $\operatorname{arctg} t < t$ oricare ar fi $t\in(0,\infty)$. Aplicând teorema 8.3.1, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

b) Notând $\displaystyle x_n := n^2\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - n\,\frac{\pi}{2}$, avem $x_n = y_n - z_n$, unde

$$y_n := n^2\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - n\int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \quad\text{și}\quad z_n := n\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Întrucât $z_n = n\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$, rezultă imediat că $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$. Avem de asemenea

$$y_n = \int_0^n \frac{n^2\operatorname{arctg}\frac{x}{n} - nx}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Substituția $x/n = t$ conduce la

$$y_n = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3} \cdot \frac{n^2t^2}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Șirul de funcții $g_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin

$$g_n(t) := \frac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3} \cdot \frac{n^2t^2}{1+n^2t^2}\,,$$

converge punctual pe $(0,1]$ la funcția $g(t) := \dfrac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3}$. În plus, avem $|g_n(t)| < -g(t)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $t \in (0,1]$. Cum $\lim_{t\to 0+} g(t) = -\frac{1}{3}$, în baza teoremei 8.3.1 (sau chiar a teoremei 8.2.1) deducem că

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{t - \operatorname{arctg} t}{2t^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Drept urmare, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} z_n = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. □

8.4.4 Aplicație. a) Să se determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \mathrm{d}x.$

b) Fiind dat $k \in \mathbb{N}$, să se determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \mathrm{d}x.$

SEEMOUS 2012

Rezolvare. Rezolvăm direct b) presupunând $k \geq 0$ număr întreg. Notând

$$I_n := n^{k+1} \int_0^1 x^k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}),$$

avem $I_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1} J_n$, unde

$$J_n := \int_0^1 (n+1)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \big((n+1)x\big)^k \mathrm{d}x.$$

Substituția $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1} = t$ conduce la

$$(n+1)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \quad \text{și} \quad x = \frac{1 - t^{\frac{1}{n+1}}}{1 + t^{\frac{1}{n+1}}}\,,$$

de unde

$$\begin{aligned} J_n &= \int_1^0 -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-t^{\frac{1}{n+1}}}{1+t^{\frac{1}{n+1}}}\right)^2\left((n+1)\frac{1-t^{\frac{1}{n+1}}}{1+t^{\frac{1}{n+1}}}\right)^k \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \left((n+1)\left(1-t^{\frac{1}{n+1}}\right)\right)^k \frac{1}{\left(1+t^{\frac{1}{n+1}}\right)^{k+2}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Șirul de funcții $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin

$$f_n(t) := \left((n+1)\left(1-t^{\frac{1}{n+1}}\right)\right)^k \frac{1}{\left(1+t^{\frac{1}{n+1}}\right)^{k+2}},$$

converge punctual pe $(0,1]$ la funcția $f(t) := \frac{1}{2^{k+2}}(-\ln t)^k$. Mai mult, binecunoscuta inegalitate $\ln t \leq t-1$ implică

$$(n+1)\left(1-t^{\frac{1}{n+1}}\right) \leq -\ln t \quad \text{oricare ar fi } t \in (0,1],$$

deci $0 \leq f_n(t) \leq (-\ln t)^k$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $t \in (0,1]$. Vom demonstra mai jos că $\int_0^1 (-\ln t)^k \mathrm{d}t$ converge. Atunci în baza teoremei 8.3.1 va rezulta că

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty} J_n = 2\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}\int_0^1 (-\ln t)^k \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Notăm $L_k := \int_0^1 (-\ln t)^k \mathrm{d}t$. În urma unei integrări prin părți se obține ușor $L_k = kL_{k-1}$. Deoarece $L_0 = 1$, rezultă inductiv că toate integralele improprii L_k sunt convergente și că $L_k = k!$ oricare ar fi $k \geq 0$. Drept urmare, avem $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{k!}{2^{k+1}}$. □

8.4.5 Aplicație. Să se calculeze

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right)\mathrm{d}x.$$

Concursul William Lowell Putnam 1997, problema A3

Rezolvare. Notăm cu I valoarea integralei. Deoarece expresia din prima paranteză este egală cu $xe^{-x^2/2}$, rezultă că

$$I = \int_0^\infty xe^{-x^2/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\,\mathrm{d}x =: \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Șirul de funcții $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin

$$f_n(x) := xe^{-x^2/2} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2},$$

converge punctual pe $[0,\infty)$ la f. Mai mult, avem

$$0 \leq f_n(x) \leq xe^{-x^2/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2^{2k}k!} = xe^{-x^2/4} =: g(x)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0,\infty)$. Ținând seama că integrala improprie $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, în baza teoremei 8.3.1 deducem că

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} \int_0^\infty e^{-x^2/2}x^{2k+1}\mathrm{d}x.$$

Cu ajutorul substituției $x^2/2 = t$ obținem

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}x^{2k+1}\mathrm{d}x = 2^k \int_0^\infty e^{-t}t^k\mathrm{d}t = 2^k\Gamma(k+1) = 2^k k!,$$

deci $I = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k k!} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$ □

8.4.6 Aplicație. Fie $a > 0$ și $b > 1$ numere reale și fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{a/b} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+n^a x^b}\,\mathrm{d}x.$

[7, problema 1.44]

Rezolvare. Notăm $I_n := n^{a/b} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+n^a x^b}\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$. Făcând schimbarea de variabilă $n^a x^b = t$, obținem

$$I_n = \frac{1}{b} \int_0^{n^a} f\left(t^{1/b}/n^{a/b}\right) \frac{t^{\frac{1}{b}-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Șirul de funcții $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin

$$f_n(t) := f\left(t^{1/b}/n^{a/b}\right) \frac{t^{\frac{1}{b}-1}}{t+1} \chi_{(0,n^a]}(t),$$

converge punctual pe $(0,\infty)$ la funcția $f(t) := f(0)\, \frac{t^{\frac{1}{b}-1}}{t+1}$. În plus, avem

$$|f_n(t)| \leq M \frac{t^{\frac{1}{b}-1}}{t+1} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } t \in (0,\infty),$$

unde $M := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Deoarece

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{b}-1}}{t+1}\, \mathrm{d}t = B\left(\frac{1}{b}, 1 - \frac{1}{b}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{b}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{b}},$$

în baza teoremei 8.3.1 deducem că $\lim_{n\to\infty} I_n = f(0)\, \frac{\pi}{b \sin\frac{\pi}{b}}$. □

8.4.7 Aplicație. Fiind dat $k \in \mathbb{N}$, să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt[k]{n}} \left(1 - \frac{x^k}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$

[7, problema 1.57]

Rezolvare. Mai general, fie (a_n) un șir arbitrar din $(0,\infty)$ astfel încât $a_n \leq \sqrt[k]{n}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Fie apoi

$$I_n := \int_0^{a_n} \left(1 - \frac{x^k}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

Șirul de funcții $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, definite prin

$$f_n(x) := \left(1 - \frac{x^k}{n}\right)^n \chi_{[0,a_n]}(x),$$

converge punctual pe $[0,\infty)$ la funcția $f(x) := e^{-x^k}$. Mai mult, din inegalitatea $e^t \geq 1 + t$ valabilă oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, rezultă că $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0,\infty)$. Făcând schimbarea de variabilă $x^k = t$, găsim

$$\int_0^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{k}\, t^{\frac{1}{k}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Conform teoremei 8.3.1, conchidem că $\lim_{n\to\infty} I_n = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. □

8.5 Probleme

Prezentăm mai jos o listă de probleme date la diferite concursuri școlare, ale căror rezolvări sunt foarte simple pe baza rezultatelor din acest capitol. Lăsăm rezolvările în seama cititorului.

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

pentru orice funcție continuă nederivabilă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este constantă.

M. Piticari, Olimpiada județeană, 2004/2

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x^n}\mathrm{d}x$.

Olimpiada județeană, 2013/1

3. a) Să se demonstreze că $\ln(1+x) \leq x$ oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Dacă $a > 0$, să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{a+1}{a}$.

Olimpiada județeană, 2001/4

4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x^2+1)\,e^x$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \left(f\left(\frac{x^2}{n}\right) - 1 \right) \mathrm{d}x.$$

Olimpiada locală, București, 2003/3

5. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcția $f_n : [0,n] \to \mathbb{R}$, definită prin $f_n(x) = \operatorname{arctg}\big([x]\big)$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x. Să se arate că f_n este integrabilă și să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Olimpiada județeană, 2014/1

6. Se consideră funcțiile continue $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ și $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dacă există limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, demonstrați că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) g\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x = L \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

L. Panaitopol, Olimpiada județeană, 2003/4

7. Fie $f:[0,1]\to[0,\infty)$ o funcție neidentic nulă, derivabilă, cu derivata continuă.

a) Să se demonstreze că șirul $a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ este convergent.

b) Dacă $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a}\right)^n$.

V. Nicula, Olimpiada județeană, București, 1999/1

8. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_0^1 e^{x^2/n}\mathrm{d}x\right)^n$.

Concursul studențesc Taras Shevchenko, 1997/5

9. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție crescătoare și fie

$$a_n=\int_0^1\frac{1+f^n(x)}{1+f^{n+1}(x)}\,\mathrm{d}x\quad(n\geq 1).$$

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se determine limita sa.

Olimpiada județeană, 2016/4

10. a) Fiind dat un număr întreg $n\geq 0$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^1(1-t)^n e^t\mathrm{d}t$.

b) Fie $k\geq 0$ un număr întreg și fie $(x_n)_{n\geq k}$ șirul de termen general

$$x_n=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{i!}\right).$$

Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq k}$ este convergent și să se determine limita sa.

SEEMOUS 2017

11. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și fie (a_n), (b_n) șiruri de numere reale cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|f(x)-a_nx-b_n\right|\mathrm{d}x=0.$$

Să se demonstreze că:

a) Șirurile (a_n) și (b_n) sunt convergente.

b) Există $a, b \in \mathbb{R}$ așa încât $f(x) = ax + b$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Olimpiada județeană, 2005/2

12. Pentru fiecare $\alpha \in (0, 1]$ notăm

$$I_n(\alpha) = \int_0^\alpha \ln\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) \mathrm{d}x, \quad n \geq 2.$$

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)$ pentru $\alpha \in (0, 1)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(1)$.

Olimpiada județeană, 2002/3

13. Fie $\alpha > 0$ și fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $a < b$. Să se determine

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n + \alpha\big((x-a)(b-x)\big)^{n/2}}\, \mathrm{d}x.$$

O. Furdui, Math. Mag., problema 1917

14. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_{-1}^0 (x + e^x)^n \, \mathrm{d}x$.

M. Ivan

15. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_0^1 \left(\cos x - \sin x\right)^n \mathrm{d}x$.

M. Ivan

16. Fie $k > 1$ un număr real. Să se calculeze următoarele limite:

a) $L = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{k}{\sqrt[n]{x} + k - 1}\right)^n \mathrm{d}x$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \left[L - \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{k}{\sqrt[n]{x} + k - 1}\right)^n \mathrm{d}x\right]$.

O. Furdui, A. Sîntămărian, SEEMOUS 2020/2

Capitolul 9

Integrale depinzând de parametru

9.1 Integrale Riemann depinzând de parametru

9.1.1 Cazul limitelor de integrare constante

Fie A o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$, fie a, b numere reale astfel ca $a < b$ și fie $f : A\times[a, b] \to \mathbb{R}$, $\forall\, (\lambda, x) \in A\times[a, b] \;\mapsto\; f(\lambda, x) \in \mathbb{R}$, o funcție cu proprietatea că oricare ar fi $\lambda \in A$, secțiunea $f(\lambda, \cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Considerăm funcția $F : A \to \mathbb{R}$, definită cu ajutorul integralei

$$F(\lambda) := \int_a^b f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Se spune că $\displaystyle\int_a^b f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x$ este o *integrală Riemann depinzând de parametrul* $\lambda \in A$.

9.1.1 Teoremă. *Dacă funcția f este continuă pe $A \times [a, b]$, atunci funcția F este continuă pe A.*

Demonstrație. Fie λ_0 un punct fixat al lui A. Pentru a dovedi continuitatea lui F în λ_0, fie (λ_n) un șir arbitrar de puncte din A, convergent către λ_0. Vom arăta că $\big(F(\lambda_n)\big) \to F(\lambda_0)$. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Notăm $A_0 := \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$. Atunci A_0 este o mulțime compactă (este mulțimea termenilor unui șir convergent, la care se adaugă limita șirului), deci și mulțimea $A_0 \times [a, b]$ este compactă. Cum funcția f este continuă pe mulțimea $A \times [a, b]$, în baza teoremei lui Cantor, ea este uniform continuă pe $A_0 \times [a,b]$. Drept urmare, există un $\delta > 0$ în așa fel încât pentru orice $(\lambda, x), (\lambda', x') \in A_0 \times [a,b]$ cu $|\lambda - \lambda'| < \delta$ și $|x - x'| < \delta$ să avem

$$\left| f(\lambda, x) - f(\lambda', x') \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Întrucât $(\lambda_n) \to \lambda_0$, există un număr natural n_0 astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $|\lambda_n - \lambda_0| < \delta$. Atunci pentru orice $n \geq n_0$ avem

$$\begin{aligned} |F(\lambda_n) - F(\lambda_0)| &= \left| \int_a^b f(\lambda_n, x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b \Big(f(\lambda_n, x) - f(\lambda_0, x) \Big) \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\lambda_n, x) - f(\lambda_0, x)|\,\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, conchidem că $\big(F(\lambda_n)\big) \to F(\lambda_0)$, deci F este continuă în λ_0. $\square$

9.1.2 Aplicație (nucleul lui Poisson)**.** Dacă $P : (-1,1) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin $P(\lambda, x) := \dfrac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}$, atunci are loc egalitatea

$$\int_0^{2\pi} P(\lambda, x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in (-1,1).$$

Demonstrație. Vom folosi ideea din articolul lui A. E. Taylor [17]. Întrucât funcția P este continuă pe $(-1,1) \times [0, 2\pi]$, în baza teoremei 9.1.1 rezultă că și funcția $F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\lambda) := \int_0^{2\pi} P(\lambda, x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}\,\mathrm{d}x,$$

este continuă pe $(-1,1)$. Avem

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi} \frac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}\,\mathrm{d}x.$$

Făcând în cea de-a doua integrală schimbarea de variabilă $x = \pi + y$, obținem

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi} \frac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{1-\lambda^2}{1 + 2\lambda \cos x + \lambda^2}\,\mathrm{d}x.$$

În urma efectuării calculelor, găsim

$$F(\lambda) = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2 - 4\lambda^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Deoarece $(1+\lambda^2)^2 - 4\lambda^2\cos^2 x = 1 - 2\lambda^2\cos 2x + \lambda^4$, deducem că

$$F(\lambda) = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\lambda^4}{1-2\lambda^2\cos 2x + \lambda^4}\,\mathrm{d}x.$$

Schimbarea de variabilă $2x = y$ conduce la

$$F(\lambda) = F(\lambda^2) \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in (-1,1),$$

din care rezultă imediat că

$$F(\lambda) = F\left(\lambda^{2^n}\right) \quad \text{pentru orice } \lambda \in (-1,1) \text{ și orice } n \in \mathbb{N}.$$

Ținând seama de continuitatea funcției F, deducem că pentru orice $\lambda \in (-1,1)$ avem

$$F(\lambda) = \lim_{n\to\infty} F\left(\lambda^{2^n}\right) = F\left(\lim_{n\to\infty} \lambda^{2^n}\right) = F(0).$$

Cum $F(0) = 2\pi$, obținem în final că $F(\lambda) = 2\pi$ oricare ar fi $\lambda \in (-1,1)$. □

9.1.3 Teoremă. *Presupunem că $A \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis și că funcția $f : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *secțiunea $f(\lambda,\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ oricare ar fi $\lambda \in A$;*

(ii) *f este derivabilă parțial în raport cu variabila λ pe $A \times [a,b]$, iar derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este continuă pe $A \times [a,b]$.*

Atunci funcția $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin (1), *este derivabilă pe A și are loc egalitatea*

$$F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{oricare ar fi } \lambda \in A.$$

Demonstrație. Fie λ_0 un punct oarecare al lui A. Vom demonstra că

(2)
$$\lim_{t\to 0} \frac{F(\lambda_0 + t) - F(\lambda_0)}{t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru aceasta, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Alegem un număr real $r > 0$ în așa fel încât $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \subset A$. Întrucât funcția $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este continuă pe $A \times [a,b]$, iar mulțimea $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \times [a, b]$ este compactă, rezultă că $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este uniform continuă pe $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \times [a, b]$. Prin urmare, există un $\delta > 0$ (și fără a restrânge generalitatea putem presupune că $\delta < r$) astfel încât pentru orice $(\lambda, x), (\lambda', x') \in [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \times [a, b]$ cu $|\lambda - \lambda'| < \delta$ și $|x - x'| < \delta$ să avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda', x') \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Fie acum $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ cu $|t| < \delta$ arbitrar ales. Avem

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(\lambda_0 + t) - F(\lambda_0)}{t} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b \left(\frac{f(\lambda_0 + t, x) - f(\lambda_0, x)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x) \right) \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{f(\lambda_0 + t, x) - f(\lambda_0, x)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x) \right| \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Fie $x \in [a, b]$ fixat. Aplicând teorema de medie funcției $f(\cdot, x)$, deducem existența unui punct c_t, situat între 0 și t, astfel ca

$$f(\lambda_0 + t, x) - f(\lambda_0, x) = t\,\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0 + c_t, x),$$

deci

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\lambda_0 + t, x) - f(\lambda_0, x)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x) \right| &= \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0 + c_t, x) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a} \end{aligned}$$

deoarece $|\lambda_0 + c_t - \lambda_0| = |c_t| < \delta$. Cum x a fost un punct arbitrar din $[a, b]$, rezultă că

$$\left| \frac{F(\lambda_0 + t) - F(\lambda_0)}{t} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x \right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a}\,\mathrm{d}x = \varepsilon$$

oricare ar fi $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ cu $|t| < \delta$. Drept urmare, egalitatea (2) are loc. Această egalitate arată că funcția F este derivabilă în punctul λ_0 și

$$F'(\lambda_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

9.1.2 Cazul limitelor de integrare depinzând de parametru

Fie A o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$, fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și fie $\varphi, \psi : A \to I$ funcții date. Fie apoi $f : A \times I \to \mathbb{R}$, $\forall\ (\lambda, x) \in A \times I \ \mapsto\ f(\lambda, x) \in \mathbb{R}$, o funcție cu proprietatea că oricare ar fi $\lambda \in A$, secțiunea $f(\lambda, \cdot)$ este integrabilă Riemann pe intervalul de capete $\varphi(\lambda)$ și respectiv $\psi(\lambda)$. Considerăm funcția $F : A \to \mathbb{R}$, definită cu ajutorul integralei

$$F(\lambda) := \int_{\varphi(\lambda)}^{\psi(\lambda)} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

9.1.4 Teoremă. *Dacă funcția f este continuă pe $A \times I$, iar funcțiile φ și ψ sunt continue pe A, atunci funcția F este continuă pe A.*

Demonstrație. Făcând în (3) schimbarea de variabilă $x = (1-t)\varphi(\lambda) + t\psi(\lambda)$ obținem

$$F(\lambda) = \big(\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\big) \int_0^1 f(\lambda, (1-t)\varphi(\lambda) + t\psi(\lambda))\,\mathrm{d}t.$$

Fie $g : A \times [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$g(\lambda, t) := f(\lambda, (1-t)\varphi(\lambda) + t\psi(\lambda)).$$

Deoarece funcțiile f, φ și ψ sunt continue, rezultă că și g este continuă. Conform teoremei 9.1.1, funcția $G : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$G(\lambda) := \int_0^1 g(\lambda, t)\,\mathrm{d}t,$$

este continuă. Drept urmare, F este de asemenea continuă, întrucât pentru orice $\lambda \in A$ avem $F(\lambda) = \big(\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\big)G(\lambda)$. □

9.1.5 Teoremă. *Presupunem că $A \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis și că funcțiile f, φ și ψ îndeplinesc următoarele condiții:*

(i) *f este continuă pe $A \times I$;*

(ii) *f este derivabilă parțial în raport cu variabila λ pe $A \times I$, iar derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este continuă pe $A \times I$;*

(iii) *φ și ψ sunt derivabile pe A.*

Atunci funcția $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin (3), este derivabilă pe A și pentru orice $\lambda \in A$ are loc egalitatea

$$F'(\lambda) = \int_{\varphi(\lambda)}^{\psi(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\,\mathrm{d}x + f\big(\lambda, \psi(\lambda)\big)\,\psi'(\lambda) - f\big(\lambda, \varphi(\lambda)\big)\,\varphi'(\lambda).$$

Demonstrație. Fie λ_0 un punct oarecare al lui A. Vom demonstra că F este derivabilă în λ_0 și

$$(4) \qquad F'(\lambda_0) = \int_{\varphi(\lambda_0)}^{\psi(\lambda_0)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x + f\big(\lambda_0, \psi(\lambda_0)\big)\,\psi'(\lambda_0) - f\big(\lambda_0, \varphi(\lambda_0)\big)\,\varphi'(\lambda_0).$$

Pentru fiecare $\lambda \in A$ avem $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) - F_3(\lambda)$, unde F_1, F_2 și F_3 sunt funcțiile definite prin

$$F_1(\lambda) := \int_{\varphi(\lambda_0)}^{\psi(\lambda_0)} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x, \quad F_2(\lambda) := \int_{\psi(\lambda_0)}^{\psi(\lambda)} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$$

și respectiv

$$F_3(\lambda) := \int_{\varphi(\lambda_0)}^{\varphi(\lambda)} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x.$$

Observăm că în definiția lui F_1 limitele de integrare sunt constante. Conform teoremei 9.1.3, funcția F_1 este derivabilă în punctul λ_0 și

$$(5) \qquad F_1'(\lambda_0) = \int_{\varphi(\lambda_0)}^{\psi(\lambda_0)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x.$$

Fie $r > 0$ în așa fel încât $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \subset A$. Oricare ar fi $t \in [-r, r] \setminus \{0\}$ avem

$$\begin{aligned} \frac{F_2(\lambda_0 + t) - F_2(\lambda_0)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{\psi(\lambda_0)}^{\psi(\lambda_0 + t)} f(\lambda_0 + t, x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{t} f(\lambda_0 + t, x_t)\Big(\psi(\lambda_0 + t) - \psi(\lambda_0)\Big), \end{aligned}$$

unde x_t este un punct situat între $\psi(\lambda_0)$ și $\psi(\lambda_0 + t)$, a cărui existență este asigurată de teorema 7.1.1. Dacă $t \to 0$, atunci $\psi(\lambda_0 + t) \to \psi(\lambda_0)$, deci $x_t \to \psi(\lambda_0)$ și prin urmare $f(\lambda_0 + t, x_t) \to f\big(\lambda_0, \psi(\lambda_0)\big)$. Ținând seama de această observație precum și de faptul că

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(\lambda_0 + t) - \psi(\lambda_0)}{t} = \psi'(\lambda_0),$$

deducem că

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_2(\lambda_0+t)-F_2(\lambda_0)}{t} = f\big(\lambda_0, \psi(\lambda_0)\big)\,\psi'(\lambda_0).$$

Prin urmare, funcția F_2 este derivabilă în punctul λ_0 și

$$F_2'(\lambda_0) = f\big(\lambda_0, \psi(\lambda_0)\big)\,\psi'(\lambda_0). \tag{6}$$

Analog se constată că și funcția F_3 este derivabilă în punctul λ_0 și

$$F_3'(\lambda_0) = f\big(\lambda_0, \varphi(\lambda_0)\big)\,\varphi'(\lambda_0). \tag{7}$$

Din (5), (6) și (7) rezultă acum că (4) are loc. □

9.2 Integrale improprii depinzând de parametru

9.2.1 Definiții și notații

Pe tot parcursul acestei secțiuni presupunem că A este o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$, că a și b satisfac $-\infty < a < b \le \infty$ și că $f : A \times [a,b) \to \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea că pentru fiecare $\lambda \in A$ secțiunea $f(\lambda,\cdot) : [a,b) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă Riemann (adică este integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,v]$ cu $a < v < b$).

Fie C mulțimea tuturor punctelor $\lambda \in A$ cu proprietatea că integrala improprie $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă și fie $F : C \to \mathbb{R}$ funcția definită cu ajutorul integralei improprii

$$F(\lambda) := \int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Se spune că *integrala improprie* $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$*, depinzând de parametrul* λ*, converge la* F *pe mulțimea* C. Așadar, $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge la F pe C dacă și numai dacă pentru orice $\lambda \in C$ avem

$$F(\lambda) = \lim_{v \nearrow b} \int_a^v f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x,$$

adică dacă și numai dacă

$$\forall\, \lambda \in C \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, c \in (a,b) \ \text{ a.î. } \ \forall\, v \in [c,b) \ \ : \ \ \left|\int_a^v f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda)\right| < \varepsilon.$$

Fiind dată o submulțime C_0 a lui A, se spune că *integrala improprie* $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ *converge uniform pe* C_0 *la o funcție* $F : C_0 \to \mathbb{R}$ dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, c \in (a, b) \;\; \text{a.î.} \;\; \forall\, \lambda \in C_0 \;\; \forall\, v \in [c, b) \quad : \quad \left| \int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda) \right| < \varepsilon.$$

Comparând definițiile noțiunilor de integrală improprie cu parametru convergentă și respectiv uniform convergentă, observăm că:

1° Dacă $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe o mulțime $C_0 \subseteq A$ la o funcție F, atunci $C_0 \subseteq C$ și $F(\lambda) = \int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ oricare ar fi $\lambda \in C_0$.

2° Dacă integrala improprie $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge la F pe C, atunci, în general, nu rezultă că $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform la F pe C.

3° Punctul $c \in (a, b)$ din definiția convergenței uniforme depinde numai de ε, în timp ce în definiția convergenței el depinde atât de ε, cât și de λ. Drept urmare, conceptul de convergență uniformă este mai restrictiv decât cel de convergență.

9.2.2 Criterii de convergență uniformă

9.2.1 Teoremă (criteriul lui A. L. Cauchy)**.** *Integrala improprie cu parametru* $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ *converge uniform pe o mulțime* $C_0 \subseteq A$ *dacă și numai dacă*

$$(2) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, c \in (a, b) \;\; \textit{a.î.} \;\; \forall\, \lambda \in C_0 \;\; \forall\, u, v \in [c, b) \quad : \quad \left| \int_u^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Necesitatea. Admitem că $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe C_0 la o funcție $F : C_0 \to \mathbb{R}$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din definiția convergenței uniforme rezultă existența unui punct $c \in (a, b)$ astfel încât pentru orice $\lambda \in C_0$ și orice $v \in [c, b)$ să avem

$$\left| \int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Atunci pentru orice $\lambda \in C_0$ și orice $u, v \in [c, b)$ avem

$$\begin{aligned}
\left| \int_u^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - \int_a^u f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda) \right| + \left| F(\lambda) - \int_a^u f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Suficiența. Admitem acum că (2) are loc. Condiția (2) împreună cu criteriul de convergență al lui Cauchy pentru integrale improprii asigură convergența integralei improprii $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ pentru orice $\lambda \in C_0$. Fie funcția $F : C_0 \to \mathbb{R}$, definită prin (1). Demonstrăm că $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform la F pe C_0. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Din (2) rezultă existența unui punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\left|\int_v^u f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pentru orice } \lambda \in C_0 \text{ și orice } u, v \in [c, b).$$

Făcând $u \nearrow b$ găsim că

$$\left|\int_v^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pentru orice } \lambda \in C_0 \text{ și orice } v \in [c, b).$$

Drept urmare, pentru orice $\lambda \in C_0$ și orice $v \in [c, b)$ avem

$$\begin{aligned} \left|\int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda)\right| &= \left|\int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_v^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

În consecință, $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform la F pe C_0. □

9.2.2 Teoremă (criteriul lui K. Weierstrass)**.** *Fie $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă Riemann cu proprietatea că integrala improprie $\int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Dacă $C_0 \subseteq A$ și*

$$|f(\lambda, x)| \leq g(x) \quad \textit{pentru orice } \lambda \in C_0 \textit{ și orice } x \in [a, b),$$

atunci $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe C_0.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. În baza criteriului de convergență al lui Cauchy pentru integrale improprii, deducem existența unui punct $c \in (a, b)$ în așa fel încât

$$\left|\int_u^v g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } u, v \in [c, b).$$

Atunci pentru orice $\lambda \in C_0$ și orice $u, v \in [c, b)$ cu $u < v$ avem

$$\left|\int_u^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_u^v \big|f(\lambda, x)\big|\,\mathrm{d}x \leq \int_u^v g(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Conform părții de suficiență a teoremei 9.2.1, rezultă că $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe C_0. □

9.2.3 Proprietăți ale funcției F

9.2.3 Teoremă (continuitatea). *Dacă funcția f este continuă pe $A \times [a,b)$ și $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe o mulțime $C_0 \subseteq A$ la o funcție $F : C_0 \to \mathbb{R}$, atunci F este continuă pe C_0.*

Demonstrație. Fixăm un punct arbitrar $\lambda_0 \in C_0$ și dovedim că F este continuă în λ_0. În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe C_0 la F, există un punct $c \in (a,b)$ astfel ca

$$\left|\int_a^v f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pentru orice } \lambda \in C_0 \text{ și orice } v \in [c,b).$$

Alegem un punct $b_0 \in [c,b)$ și considerăm funcția $F_0 : C_0 \to \mathbb{R}$, definită prin $F_0(\lambda) := \int_a^{b_0} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$. Atunci avem

$$\big|F_0(\lambda) - F(\lambda)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pentru orice } \lambda \in C_0.$$

Conform teoremei 9.1.1, funcția F_0 este continuă în λ_0, deci există un $\delta > 0$ astfel încât

$$\big|F_0(\lambda) - F_0(\lambda_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pentru orice } \lambda \in C_0 \text{ cu } |\lambda - \lambda_0| < \delta.$$

Rezultă atunci că pentru orice $\lambda \in C_0$ cu $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ avem

$$\begin{aligned} \big|F(\lambda) - F(\lambda_0)\big| &\le \big|F(\lambda) - F_0(\lambda)\big| + \big|F_0(\lambda) - F_0(\lambda_0)\big| + \big|F_0(\lambda_0) - F(\lambda_0)\big| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Prin urmare, F este continuă în λ_0. □

9.2.4 Teoremă. *Fie $f : [\alpha,\beta] \times [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că integrala improprie $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe $[\alpha,\beta]$. Atunci integrala improprie $\int_a^{b-} \Big(\int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\Big)\,\mathrm{d}x$ converge și are loc egalitatea*

$$\int_a^{b-} \left(\int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\,.$$

Demonstrație. Deoarece $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe $[\alpha,\beta]$, rezultă că $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge oricare ar fi $\lambda \in [\alpha,\beta]$. Pe de altă parte, conform teoremei 9.2.3, funcția $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $F(\lambda) := \int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ este continuă pe $[\alpha, \beta]$. Avem de demonstrat că

$$\lim_{v \nearrow b} \int_a^v \left(\int_\alpha^\beta f(\lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3}$$

În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Convergența uniformă a integralei improprii $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ asigură existența unui punct $c \in (a, b)$ astfel ca

$$\left| \int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda) \right| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \quad \text{pentru orice } \lambda \in [\alpha, \beta] \text{ și orice } v \in [c, b).$$

Fie acum $v \in [c, b)$ arbitrar ales. Conform teoremei lui Fubini, avem

$$\int_a^v \left(\int_\alpha^\beta f(\lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\lambda\,,$$

deci

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^v \left(\int_\alpha^\beta f(\lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \right| \\
&\quad = \left| \int_\alpha^\beta \left(\int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\lambda - \int_\alpha^\beta F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \right| \\
&\quad = \left| \int_\alpha^\beta \left(\int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda) \right) \mathrm{d}\lambda \right| \\
&\quad \le \int_\alpha^\beta \left| \int_a^v f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x - F(\lambda) \right| \mathrm{d}\lambda < \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\,\mathrm{d}\lambda = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cum $v \in [c, b)$ a fost arbitrar, rezultă că (3) are loc. □

9.2.5 Teoremă (derivabilitatea)**.** *Presupunem că $A \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, iar $f : A \times [a, b) \to \mathbb{R}$ este o funcție care îndeplinește următoarele condiții:*

(i) *f este continuă pe $A \times [a, b)$;*

(ii) *f este derivabilă parțial în raport cu variabila λ pe $A \times [a, b)$, iar $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este continuă pe $A \times [a, b)$;*

(iii) *există $\lambda_0 \in A$ astfel încât integrala improprie $\int_a^{b-} f(\lambda_0, x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;*

(iv) *integrala improprie $\int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe orice interval compact inclus în A.*

Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1° *Integrala improprie* $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ *converge oricare ar fi* $\lambda\in A$.

2° $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ *converge uniform pe orice interval compact inclus în* A.

3° *Funcția* $F : A\to\mathbb{R}$, $F(\lambda) := \int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ *este derivabilă pe* A *și are loc egalitatea*

$$F'(\lambda) = \int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. 1° Fie $G : A\to\mathbb{R}$, $G(\lambda) := \int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$. Conform teoremei 9.2.3, funcția G este continuă pe A. Fie apoi λ un punct arbitrar al lui A și fie I_λ intervalul compact de capete λ_0 și λ. Întrucât restricția funcției $\frac{\partial f}{\partial\lambda}$ la $I_\lambda\times[a,b)$ satisface condițiile teoremei 9.2.4, avem

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_0}^{\lambda} G(\mu)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\left(\int_a^{b-}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\mu,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu = \int_a^{b-}\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\mu,x)\,\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^{b-} f(\mu,x)\Big|_{\mu=\lambda_0}^{\mu=\lambda}\,\mathrm{d}x = \int_a^{b-}\Big(f(\lambda,x)-f(\lambda_0,x)\Big)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ținând seama că G este continuă pe I_λ și că $\int_a^{b-} f(\lambda_0,x)\,\mathrm{d}x$ converge, deducem de aici că și $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge, deci 1° are loc.

3° Lanțul de egalități de mai sus arată că funcția F satisface

$$F(\lambda)-F(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} G(\mu)\,\mathrm{d}\mu \quad \text{oricare ar fi } \lambda\in A.$$

Cum G este continuă pe A, rezultă că F este derivabilă pe A și $F'(\lambda)=G(\lambda)$ oricare ar fi $\lambda\in A$. Aceasta probează validitatea afirmației 3°.

2° Rămâne așadar să demonstrăm că $\int_a^{b-} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe orice interval compact $[\alpha,\beta]$ inclus în A. Fie, în acest scop, $\varepsilon>0$ arbitrar. Deoarece $\int_a^{b-}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,\mathrm{d}x$ converge uniform pe $[\alpha,\beta]$, criteriul lui Cauchy (teorema 9.2.1) asigură existența unui punct $c'\in(a,b)$ cu proprietatea că

$$\left|\int_u^v \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \quad \text{pentru orice } \lambda\in[\alpha,\beta] \text{ și orice } u,v\in[c',b).$$

Fie acum λ_1 un punct fixat din $[\alpha,\beta]$. Întrucât $\int_a^{b-} f(\lambda_1,x)\,\mathrm{d}x$ converge, criteriul de convergență al lui Cauchy pentru integrale improprii garantează existența unui punct $c''\in(a,b)$ cu proprietatea că

$$\left|\int_u^v f(\lambda_1,x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pentru orice } u,v\in[c'',b).$$

Notăm $c := \max\{c', c''\}$. Conform teoremei lui Fubini, pentru orice punct $\lambda \in [\alpha, \beta]$ și orice $u, v \in [a, b)$, cu $u < v$, avem

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1}^{\lambda} \left(\int_u^v \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\mu, x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu &= \int_u^v \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\mu, x)\, \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_u^v f(\mu, x) \Big|_{\mu=\lambda_1}^{\mu=\lambda} \mathrm{d}x \\
&= \int_u^v f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x - \int_u^v f(\lambda_1, x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ținând seama de această egalitate, rezultă că pentru orice $\lambda \in [\alpha, \beta]$ și orice $u, v \in [c, b)$, cu $u < v$, avem

$$\begin{aligned}
\left| \int_u^v f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x \right| &\leq \left| \int_u^v f(\lambda_1, x)\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_u^v f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x - \int_u^v f(\lambda_1, x)\, \mathrm{d}x \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda} \left(\int_u^v \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\mu, x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda} \left| \int_u^v \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\mu, x)\, \mathrm{d}x \right| \mathrm{d}\mu \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}\, \mathrm{d}\mu \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} |\lambda - \lambda_1| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

În baza părții de suficiență a teoremei 9.2.1 (criteriul lui Cauchy), conchidem că $\int_a^{b-} f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x$ converge uniform pe $[\alpha, \beta]$. □

9.3 Probleme

1. (a se vedea [21]) Fie funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\lambda) := \left(\int_0^{\lambda} e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2 (x^2+1)}}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x.$$

a) Să se demonstreze că $F(\lambda) = \pi/4$ oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Să se deducă apoi că $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. (integralele lui Fresnel) Folosind varianta complexă a funcției F din problema precedentă, să se demonstreze că

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Fiind dat $a \in (-1, 1)$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + a\cos x)\,\mathrm{d}x$.

4. Fiind dat $a > 0$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. Să se determine $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^{A} A^{1/x}\mathrm{d}x$.

IMC 2015

6. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ și fie $n \geq 1$ un număr întreg. Să se demonstreze că inegalitatea $\left|f^{(n)}(x)\right| < \dfrac{1}{n+1}$ are loc oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

IMC 2014

7. Să se determine valoarea maximă a integralei $\displaystyle\int_0^{y} \sqrt{x^4 + (y - y^2)^2}\,\mathrm{d}x$, când $y \in [0, 1]$.

Concursul William Lowell Putnam 1991, problema A5

8. a) Să se demonstreze că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^{n} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

b) Să se determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(n\int_0^{n} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right)$.

SEEMOUS 2014

9. Să se demonstreze că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^{1} \sqrt[n]{1 + x^n}\,\mathrm{d}x - 1\right) = \frac{\pi^2}{12}$.

Concursul Vojtěch Jarník, categoria a II-a, 2002/4

10. Presupunând cunoscut faptul că $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$ (a se vedea observația 10.1.5), să se calculeze $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos ax\,\mathrm{d}x$ ($a \in \mathbb{R}$).

11. Să se demonstreze că

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\left(1 - e^{-6x}\right)}{x\left(1 + e^{-2x} + e^{-4x} + e^{-6x} + e^{-8x}\right)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

A. Stadler, Amer. Math. Monthly, problema 11564 [2011, p. 371]

9.4 Soluții

1. a) Conform teoremei 9.1.5, funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= 2\left(\int_0^\lambda e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)e^{-\lambda^2} + \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2(x^2+1)}(-2\lambda)(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 2e^{-\lambda^2}\int_0^\lambda e^{-x^2}\mathrm{d}x - 2\lambda e^{-\lambda^2}\int_0^1 e^{-\lambda^2x^2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substituția $\lambda x = t$ în cea de-a doua integrală conduce la

$$F'(\lambda) = 2e^{-\lambda^2}\int_0^\lambda e^{-x^2}\mathrm{d}x - 2e^{-\lambda^2}\int_0^\lambda e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pentru orice } \lambda \in \mathbb{R},$$

deci F este constantă. Cum $F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$, rezultă că $F(\lambda) = \pi/4$ oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Egalitatea $F(\lambda) = \pi/4$ arată că

$$\left(\int_0^\lambda e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$0 < \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 e^{-\lambda^2}\mathrm{d}x = e^{-\lambda^2},$$

de unde

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

Făcând $\lambda \to \infty$ în (1) și ținând seama de (2), deducem că $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Urmând calea din [21], considerăm varianta complexă a funcției F din problema precedentă, anume

$$F(\lambda) := \left(\int_0^\lambda e^{-\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x\right)^2 + \mathrm{i}\int_0^1 \frac{e^{-\mathrm{i}\lambda^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Folosind egalitatea $e^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ obținem

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \left(\int_0^\lambda \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^\lambda \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \mathrm{i}\left(2\int_0^\lambda \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x\int_0^\lambda \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Considerăm funcțiile reale $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$G(\lambda) := \left(\int_0^\lambda \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^\lambda \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$$

și respectiv

$$H(\lambda) := 2\int_0^\lambda \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x \int_0^\lambda \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x.$$

Aplicând teorema 9.1.5, în urma unui calcul elementar similar celui din problema precedentă și pe care nu îl mai reproducem aici, se obține

$$G'(\lambda) = H'(\lambda) = 0 \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cum $F(0) = 0$ și $H(0) = \pi/4$, rezultă că pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$\text{(1)} \quad \left(\int_0^\lambda \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^\lambda \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = 0$$

și

$$\text{(2)} \qquad 2\int_0^\lambda \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x \int_0^\lambda \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,.$$

Remarcăm că pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ are loc

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2(x^2+1)\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x &= \sin\left(\lambda^2\right) \int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \cos\left(\lambda^2\right) \int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

De asemenea, pentru orice $\lambda > 1$ avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x &= \lambda \int_0^\lambda \frac{\cos\left(t^2\right)}{\lambda^2+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 \frac{\cos\left(t^2\right)}{\lambda^2+t^2} \,\mathrm{d}t + \lambda \int_1^\lambda \left(\sin\left(t^2\right)\right)' \frac{\mathrm{d}t}{2t(\lambda^2+t^2)}\,. \end{aligned}$$

Integrând prin părți, găsim

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x &= \lambda \int_0^1 \frac{\cos\left(t^2\right)}{\lambda^2+t^2} \,\mathrm{d}t + \frac{\sin\left(\lambda^2\right)}{4\lambda^2} - \frac{\lambda \sin 1}{2(\lambda^2+1)} \\ &\quad + \lambda \int_1^\lambda \sin\left(t^2\right) \frac{\lambda^2+3t^2}{2t^2(\lambda^2+t^2)^2} \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

de unde

$$\left|\int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right| \le \lambda \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\lambda^2+t^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{\lambda}{2(\lambda^2+1)} + \frac{\lambda}{2}\int_1^\lambda \frac{\lambda^2+3t^2}{t^2(\lambda^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ținând seama că $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\lambda^2+t^2} < \frac{1}{\lambda^2}$, că $\frac{\lambda}{2(\lambda^2+1)} < \frac{1}{2\lambda}$ și că

$$\begin{aligned}\int_1^\lambda \frac{\lambda^2+3t^2}{t^2(\lambda^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \lambda^2\int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t^2(\lambda^2+t^2)^2} + 3\int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{(\lambda^2+t^2)^2}\\ &< \lambda^2\int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{t^2\lambda^4} + 3\int_1^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\lambda^4}\\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{3(\lambda-1)}{\lambda^4} < \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^3},\end{aligned}$$

obținem în final că

$$\left|\int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} + \frac{7}{4\lambda^2}$$

oricare ar fi $\lambda > 1$. Rezultă de aici că

(4) $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Analog se arată că

(5) $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2 x^2\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Din (3), (4) și (5) rezultă că

(6) $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin\left(\lambda^2 (x^2+1)\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Analog se arată că

(7) $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{\cos\left(\lambda^2 (x^2+1)\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Notăm $A := \int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ și $B := \int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$. Făcând $\lambda\to\infty$ în relațiile (1) și (2) și ținând seama de (6) și (7), deducem că

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = 0 \\ 2AB = \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = B = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Observație. În rezolvarea de mai sus s-a folosit în mod implicit faptul că integralele improprii care definesc pe A și respectiv B sunt convergente. O demonstrație a convergenței lui A se găsește în aplicația 7.2.5, iar convergența lui B se demonstrează analog.

3. Răspuns: $\displaystyle\int_0^\pi \ln(1 + a\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$ oricare ar fi $a \in (-1,1)$.

Considerăm funcția $F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\lambda) := \int_0^\pi \ln(1 + \lambda \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Deoarece funcția $f : (-1,1) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(\lambda, x) := \ln(1 + \lambda\cos x)$ este continuă, derivabilă parțial în raport cu variabila λ și cu derivata parțială $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \dfrac{\cos x}{1+\lambda\cos x}$ continuă pe $(-1,1) \times [0,\pi]$, în baza teoremei 9.1.3 rezultă că F este derivabilă pe $(-1,1)$ și

$$F'(\lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\lambda\cos x}\,\mathrm{d}x \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in (-1,1).$$

Pentru orice $\lambda \in (-1,1) \setminus \{0\}$ avem

$$F'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \frac{\lambda\cos x + 1 - 1}{1+\lambda\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi-0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\lambda\cos x}\,.$$

Făcând în integrala improprie de mai sus schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, obținem

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{2\mathrm{d}t}{(1-\lambda)t^2 + 1 + \lambda} \\ &= \frac{\pi}{\lambda} - \frac{2}{\lambda(1-\lambda)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\right)^2} = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\,. \end{aligned}$$

Prin integrare găsim

$$F(\lambda) = \pi\ln|\lambda| - \pi\int \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\,.$$

Pentru calculul primitivei se poate folosi substituția $\lambda = \sin t$, obținându-se în final

$$F(\lambda) = \pi\ln\left(1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right) + c_1 \quad \text{pentru orice } \lambda \in (0,1),$$

respectiv

$$F(\lambda) = \pi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2}\right) + c_2 \quad \text{pentru orice } \lambda \in (-1, 0),$$

unde c_1 și c_2 sunt o constante reale. Pentru determinarea constantelor c_1 și c_2, ținem seama de continuitatea funcției F în punctul 0. Din

$$\lim_{\lambda \nearrow 0} F(\lambda) = \lim_{\lambda \searrow 0} F(\lambda) = F(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad c_2 + \pi \ln 2 = c_1 + \pi \ln 2 = 0,$$

rezultă că $c_1 = c_2 = -\pi \ln 2$. Astfel, $F(\lambda) = \pi \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}$ oricare ar fi $\lambda \in (-1, 1)$.

4. Răspuns: $\displaystyle\int_0^a \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(1 + a^2) \operatorname{arctg} a$ oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Considerăm funcția $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\lambda) := \int_0^\lambda \frac{\ln(1 + \lambda x)}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Deoarece funcția $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(\lambda, x) := \dfrac{\ln(1 + \lambda x)}{1 + x^2}$ este continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$, derivabilă parțial în raport cu variabila λ și cu derivata parțială $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \dfrac{x}{(1 + \lambda x)(1 + x^2)}$ continuă pe $(0, \infty) \times [0, \infty)$, în baza teoremelor 9.1.4 și 9.1.5 rezultă că F este continuă pe $[0, \infty)$, derivabilă pe $(0, \infty)$ și

$$F'(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{x}{(1 + \lambda x)(1 + x^2)} \, \mathrm{d}x + \frac{\ln(1 + \lambda^2)}{1 + \lambda^2} \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in (0, \infty).$$

Calculul integralei, cu ajutorul descompunerii în fracții simple, conduce la

$$F'(\lambda) = \frac{\ln(1 + \lambda^2)}{2(1 + \lambda^2)} + \frac{\lambda \operatorname{arctg} \lambda}{1 + \lambda^2},$$

de unde

$$F(\lambda) = \int \frac{\ln(1 + \lambda^2)}{2(1 + \lambda^2)} \, \mathrm{d}\lambda + \int \frac{\lambda \operatorname{arctg} \lambda}{1 + \lambda^2} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Integrând prin părți una dintre cele două integrale, găsim că

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \ln(1 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda + c \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in (0, \infty),$$

unde c este o constantă reală. Pentru determinarea constantei c, ținem seama de continuitatea funcției F în punctul 0. Avem $F(0) = \lim_{\lambda\searrow 0} F(\lambda)$, deci $c = 0$. Astfel, $F(\lambda) = \frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda$ oricare ar fi $\lambda \in [0,\infty)$.

Observație. Integrala din enunț poate fi calculată și direct, cu ajutorul schimbării omografice de variabilă $x = \frac{a-t}{1+at}$.

5. Avem $\displaystyle\int_1^\lambda \lambda^{1/x}\mathrm{d}x > \int_1^\lambda \mathrm{d}x = \lambda - 1$ oricare ar fi $\lambda > 1$, deci

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda \lambda^{1/x}\mathrm{d}x = \infty.$$

Aplicând regula lui l'Hôpital și teorema 9.1.5 găsim

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\int_1^\lambda \lambda^{1/x}\mathrm{d}x}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_1^\lambda \frac{1}{x}\lambda^{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}x + \lambda^{1/\lambda}\right)\\ &= 1 + \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\int_1^\lambda \frac{1}{x}\lambda^{1/x}\mathrm{d}x}{\lambda}.\end{aligned}$$

Cum $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{1}{x}\lambda^{1/x}\mathrm{d}x > \int_1^\lambda \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lambda$, avem $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda \frac{1}{x}\lambda^{1/x}\mathrm{d}x = \infty$. Aplicând încă o dată regula lui l'Hôpital și teorema 9.1.5, obținem

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\int_1^\lambda \lambda^{1/x}\mathrm{d}x}{\lambda} &= 1 + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\lambda^{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}x + \frac{1}{\lambda}\lambda^{1/\lambda}\right)\\ &= 1 + \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\lambda^{1/x}\mathrm{d}x}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ținând seama că $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\lambda^{1/x}\mathrm{d}x = -\frac{\lambda^{1/x}}{\ln\lambda}\Bigg|_{x=1}^{x=\lambda} = \frac{\lambda-\lambda^{1/\lambda}}{\ln\lambda}$, obținem în final

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\int_1^\lambda \lambda^{1/x}\mathrm{d}x}{\lambda} = 1 + \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda-\lambda^{1/\lambda}}{\lambda\ln\lambda} = 1 + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda} - \frac{e^{\frac{1}{\lambda}\ln\lambda}}{\lambda\ln\lambda}\right) = 1.$$

6. Avem $\displaystyle\frac{\sin\lambda}{\lambda} = \int_0^1 \cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x$ oricare ar fi $\lambda \in (0,\infty)$. Ținând seama că pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem $(\cos t)' = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, pe baza teoremei 9.1.3 se demonstrează imediat (prin inducție) că

$$\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^{(n)} = \int_0^1 x^n\cos\left(\lambda x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x \quad \text{pentru orice } \lambda \in (0,\infty).$$

Rezultă de aici că pentru orice $\lambda \in (0,\infty)$ avem

$$\left|\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^{(n)}\right| \le \int_0^1 x^n \left|\cos\left(\lambda x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\right| \mathrm{d}x < \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,.$$

7. Răspuns: valoarea maximă cerută este 1/3.

Considerăm funcția $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin

$$F(\lambda) := \int_0^\lambda \sqrt{x^4+(\lambda-\lambda^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Conform teoremelor 9.1.4 și 9.1.5, funcția F este continuă pe $[0,1]$ și derivabilă pe $(0,1)$. Observăm că $F(1) = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = 1/3$. Vom dovedi că $F'(\lambda) > 0$ oricare ar fi $\lambda \in (0,1)$. Va rezulta atunci că F este strict crescătoare pe $[0,1]$, deci maximul cerut este $F(1) = 1/3$.

În baza teoremei 9.1.5, pentru orice $\lambda \in (0,1)$ avem

$$F'(\lambda) = (\lambda-\lambda^2)(1-2\lambda)\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+(\lambda-\lambda^2)^2}} + \sqrt{\lambda^4+(\lambda-\lambda^2)^2}.$$

Avem așadar de arătat că pentru orice $\lambda \in (0,1)$ are loc inegalitatea

$$\text{(1)}\qquad \sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1} > (1-\lambda)(2\lambda-1)\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+(\lambda-\lambda^2)^2}}\,.$$

Pentru $\lambda \in (0,1/2)$ inegalitatea (1) este evident adevărată, membrul său drept fiind negativ. Pentru $\lambda \in [1/2,1)$ avem

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)(2\lambda-1)\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+(\lambda-\lambda^2)^2}} &< (1-\lambda)(2\lambda-1)\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\lambda-\lambda^2)^2}}\\
&= (1-\lambda)(2\lambda-1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda^2}\\
&= 2\lambda-1\\
&< \sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1},
\end{aligned}$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu $\lambda^2 < \lambda$, adevărată, întrucât $\lambda \in [1/2,1)$. Deci și în acest caz (1) are loc.

8. a) În baza teoremei lui Heine, avem

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x}{1/n} = \lim_{\lambda\searrow 0}\frac{\int_0^{1/\lambda} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x}{\lambda},$$

unde $f:(0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$f(\lambda,x) := \frac{\operatorname{arctg}(\lambda x)}{x(x^2+1)} \quad \text{dacă } (\lambda,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$$

și respectiv $f(\lambda,0):=\lambda$ oricare ar fi $\lambda\in(0,\infty)$. Se constată imediat că f este continuă pe mulțimea $(0,\infty)\times[0,\infty)$, derivabilă parțial în raport cu variabila λ pe această mulțime, iar

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x) = \frac{1}{(x^2+1)(\lambda^2x^2+1)} \quad \text{pentru orice } (\lambda,x)\in(0,\infty)\times[0,\infty),$$

deci funcția $\frac{\partial f}{\partial\lambda}$ este continuă pe $(0,\infty)\times[0,\infty)$. Aplicând regula lui l'Hôpital și teorema 9.1.5, găsim

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\searrow 0}\frac{\int_0^{1/\lambda} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\searrow 0}\left(\int_0^{1/\lambda}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(\lambda^2x^2+1)} + f\left(\lambda,\frac{1}{\lambda}\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\\
&= \lim_{\lambda\searrow 0}\left(\frac{1}{\lambda^2-1}\int_0^{1/\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x - \frac{\pi\lambda}{4(\lambda^2+1)}\right)\\
&= \lim_{\lambda\searrow 0}\left(\frac{1}{\lambda^2-1}\,\lambda\operatorname{arctg}(\lambda x)\Big|_0^{1/\lambda} - \frac{1}{\lambda^2-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

b) Notăm $\ell := \lim_{n\to\infty} n\left(n\int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right)$. Cu notațiile de la a) avem

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{n\int_0^n f\left(\frac{1}{n},x\right)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}}{1/n} = \lim_{\lambda\searrow 0}\frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^{1/\lambda} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}}{\lambda}.$$

Aplicând regula lui l'Hôpital și teorema 9.1.5, găsim

$$\ell = \lim_{\lambda\searrow 0}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1/\lambda} f(\lambda,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\lambda}\int_0^{1/\lambda}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\lambda}f\left(\lambda,\frac{1}{\lambda}\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$$

adică

$$\ell = -\lim_{\lambda\searrow 0}\frac{\pi/4}{\lambda^2+1} - \lim_{\lambda\searrow 0}\int_{0+0}^{1/\lambda}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\lambda x)}{\lambda^2 x(x^2+1)} - \frac{1}{\lambda(x^2+1)(\lambda^2x^2+1)}\right)\mathrm{d}x.$$

Prin urmare, $\ell = -\dfrac{\pi}{4} - L$, unde

$$L := \lim_{\lambda\searrow 0}\int_{0+0}^{1/\lambda}\frac{(\lambda^2x^2+1)\operatorname{arctg}(\lambda x) - \lambda x}{\lambda^2 x(x^2+1)(\lambda^2x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Substituția $\lambda x = t$ conduce la

$$L = \lim_{\lambda\searrow 0}\int_{0+0}^{1}\frac{(t^2+1)\operatorname{arctg} t - t}{t(t^2+1)(t^2+\lambda^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Considerăm funcția $g : [0,\infty)\times(0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin

$$g(\lambda,t) := \frac{(t^2+1)\operatorname{arctg} t - t}{t(t^2+1)(t^2+\lambda^2)}\,.$$

Observăm că

$$|g(\lambda,t)| = \frac{(t^2+1)\operatorname{arctg} t - t}{t(t^2+1)(t^2+\lambda^2)} \le \frac{(t^2+1)\operatorname{arctg} t - t}{t^3(t^2+1)} =: h(t)$$

pentru orice $\lambda\in[0,\infty)$ și orice $t\in(0,1]$. Un calcul elementar arată că integrala improprie $\int_{0+0}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t$ este convergentă și

$$\int_{0+0}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0+0}^{1}\left(\frac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3} + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,.$$

Conform criteriului lui Weierstrass (teorema 9.2.2), rezultă că integrala improprie cu parametru $\int_{0+0}^{1} g(\lambda,t)\,\mathrm{d}t$ converge uniform pe $[0,\infty)$. Aplicând teorema 9.2.3, deducem că funcția $G : [0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$G(\lambda) := \int_{0+0}^{1} g(\lambda,t)\,\mathrm{d}t,$$

este continuă pe $[0,\infty)$. Drept urmare, avem

$$L = \lim_{\lambda\searrow 0} G(\lambda) = G(0) = \int_{0+0}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,,$$

deci $\ell = -\dfrac{\pi}{4} - L = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

9. Notăm

$$\ell := \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n}\,\mathrm{d}x - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^1 \left((1+x^n)^{1/n} - 1 \right) \mathrm{d}x}{1/n^2}.$$

În baza teoremei lui Heine, avem

$$\ell = \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{\int_0^1 f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x}{\lambda^2}, \tag{1}$$

unde $f : (0,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$f(\lambda, x) := \left(1 + x^{1/\lambda}\right)^{\lambda} - 1 \quad \text{pentru orice } (\lambda, x) \in (0,\infty) \times [0,1].$$

Se constată imediat că f este continuă pe mulțimea $(0,\infty) \times [0,1]$, derivabilă parțial în raport cu variabila λ pe această mulțime, iar

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \left(1 + x^{1/\lambda}\right)^{\lambda} \left(\ln\left(1 + x^{1/\lambda}\right) - \frac{x^{1/\lambda} \ln\left(x^{1/\lambda}\right)}{1 + x^{1/\lambda}} \right)$$

oricare ar fi $(\lambda, x) \in (0,\infty) \times [0,1]$. Prin urmare, funcția $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ este continuă pe $(0,\infty) \times [0,1]$. Aplicând regula lui l'Hôpital și teorema 9.1.3, din (1) deducem că

$$\ell = \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \left(1 + x^{1/\lambda}\right)^{\lambda} \left(\ln\left(1 + x^{1/\lambda}\right) - \frac{x^{1/\lambda} \ln\left(x^{1/\lambda}\right)}{1 + x^{1/\lambda}} \right) \mathrm{d}x.$$

Făcând schimbarea de variabilă $x^{1/\lambda} = t$, găsim

$$\ell = \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{1}{2} \int_{0+0}^1 (1+t)^{\lambda} \left(\ln(1+t) - \frac{t \ln t}{1+t} \right) t^{\lambda-1} \mathrm{d}t.$$

Considerăm funcția $g : [0,1] \times (0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(\lambda, t) := (1+t)^{\lambda} \left(\ln(1+t) - \frac{t \ln t}{1+t} \right) t^{\lambda-1}.$$

Se arată ușor că

$$0 \le g(\lambda, t) \le 2h(t) \quad \text{oricare ar fi } (\lambda, t) \in [0,1] \times (0,1],$$

unde $h : (0,1] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$h(t) := \frac{1}{t}\left(\ln(1+t) - \frac{t\ln t}{1+t}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\,.$$

Se va demonstra mai jos că integrala improprie $\int_{0+0}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t$ este convergentă. Conform criteriului lui Weierstrass (teorema 9.2.2), rezultă atunci că integrala improprie cu parametru $\int_{0+0}^{1} g(\lambda,t)\,\mathrm{d}t$ converge uniform pe $[0,1]$. Aplicând teorema 9.2.3, deducem că funcția $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$G(\lambda) := \int_{0+0}^{1} g(\lambda,t)\,\mathrm{d}t,$$

este continuă pe $[0,1]$. Drept urmare, avem

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{1}{2}\lim_{\lambda\searrow 0} G(\lambda) = \frac{1}{2}G(0) = \frac{1}{2}\int_{0+0}^{1} g(0,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{0+0}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{0+0}^{1}\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{0+0}^{1}\frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Integrând prin părți, găsim

$$\int_{0+0}^{1}\frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln t\,\ln(1+t)\Big|_{0+0}^{1} - \int_{0+0}^{1}\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_{0+0}^{1}\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$\ell = \int_{0+0}^{1}\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,t^{n-1}$ converge pentru $t = 1$, deci converge uniform pe $[0,1]$ (conform teoremei 4.1.7 a lui Abel). Suma ei este funcția $s : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$s(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,t^{n} = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

pentru orice $t \in (0,1]$ (a se vedea 4.3.6), respectiv $s(0) = 0$. Aplicând teorema 3.4.4, deducem că

$$\ell = \int_{0}^{1} s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,t^{n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,.$$

Drept urmare, avem (a se vedea aplicația 7.2.4)

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{2}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

10. Răspuns: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-a^2/4}$.

Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(\lambda, x) := e^{-x^2} \cos \lambda x \quad \text{și respectiv} \quad F(\lambda) := \int_0^\infty f(\lambda, x)\, \mathrm{d}x.$$

Deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\,(\lambda, x) = -xe^{-x^2} \sin \lambda x,$$

avem

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}\,(\lambda, x)\right| \le xe^{-x^2} \quad \text{oricare ar fi } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Cum integrala improprie $\int_0^\infty xe^{-x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$ este convergentă, în baza criteriului lui Weierstrass (teorema 9.2.2) rezultă că $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \lambda}\,(\lambda, x)\, \mathrm{d}x$ converge uniform pe $\mathbb{R}$. Aplicând teorema 9.2.5, rezultă că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$\begin{aligned}
F'(\lambda) &= \int_0^\infty -xe^{-x^2} \sin \lambda x \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\, e^{-x^2}\right)' \sin \lambda x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\, e^{-x^2} \sin \lambda x \Big|_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \lambda \cos \lambda x \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

adică

$$F'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2}\, F(\lambda) \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Înmulțind ambii membri cu $e^{\lambda^2/4}$, deducem că

$$e^{\lambda^2/4} F'(\lambda) + \left(e^{\lambda^2/4}\right)' F(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{\lambda^2/4} F(\lambda)\right)' = 0$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Există așadar o constantă $c \in \mathbb{R}$ încât

$$F(\lambda) = ce^{-\lambda^2/4} \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cum $c = F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$, obținem în final că

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\lambda^2/4} \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{R}.$$

11. Mai general, pentru fiecare număr natural n notăm

$$I_n := \int_0^\infty \frac{e^{-x}\left(1 - e^{-2nx}\right)}{x\sum_{k=0}^{n+1} e^{-2kx}}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Vom demonstra că

$$I_n = \ln\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{n+2}\right). \tag{2}$$

Să observăm mai întâi că

$$I_n = \int_0^\infty \frac{e^{x}\left(e^{2nx} - 1\right)}{x\sum_{k=0}^{n+1} e^{2kx}}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Cu ajutorul substituției $x = -y$ în (1), găsim

$$I_n = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{y}\left(e^{2ny} - 1\right)}{y\sum_{k=0}^{n+1} e^{2ky}}\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Din (3) și (4) rezultă că

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x}\left(e^{2nx} - 1\right)}{x\sum_{k=0}^{n+1} e^{2kx}}\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Considerăm următoarea integrală depinzând de parametrul λ:

$$J_n(\lambda) := \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x}\left(e^{\lambda x} - 1\right)}{x\sum_{k=0}^{n+1} e^{2kx}}\,\mathrm{d}x, \qquad \lambda \in \left[0, 2n + \frac{1}{2}\right].$$

Avem

$$J_n'(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\lambda x}}{\sum_{k=0}^{n+1} e^{2kx}}\, e^{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{y^\lambda}{1 + y^2 + y^4 + \cdots + y^{2n+2}}\,\mathrm{d}y,$$

deoarece ultima integrală converge uniform pe $\left[0, 2n+\frac{1}{2}\right]$ conform criteriului lui Weierstrass (teorema 9.2.2). Avem

$$J_n'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{y^\lambda - y^{\lambda+2}}{1-y^{2n+4}}\,\mathrm{d}y.$$

Substituind aici $y^{2n+4} = x$, obținem

$$J_n'(\lambda) = \frac{1}{2n+4}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{\lambda+1}{2n+4}-1} - x^{\frac{\lambda+3}{2n+4}-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Dar, pentru $p, q \in (0,1)$ are loc egalitatea

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x = \pi\Big(\operatorname{ctg}(p\pi) - \operatorname{ctg}(q\pi)\Big)$$

(a se vedea [8, formula 3.231 (6)]). Ținând seama de această egalitate, deducem că

$$J_n'(\lambda) = \frac{\pi}{2n+4}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda+1}{2n+4}\,\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda+3}{2n+4}\,\pi\right)\right),$$

de unde

$$J_n(\lambda) = \ln\sin\left(\frac{\lambda+1}{2n+4}\,\pi\right) - \ln\sin\left(\frac{\lambda+3}{2n+4}\,\pi\right) + c.$$

Deoarece $J_n(0) = 0$, rezultă că

$$c = \ln\sin\frac{3\pi}{2n+4} - \ln\sin\frac{\pi}{2n+4}\,.$$

Drept urmare, avem

$$J_n(\lambda) = \ln\frac{\sin\dfrac{3\pi}{2n+4}\sin\left(\dfrac{\lambda+1}{2n+4}\,\pi\right)}{\sin\dfrac{\pi}{2n+4}\sin\left(\dfrac{\lambda+3}{2n+4}\,\pi\right)}\,. \tag{6}$$

În baza relațiilor (5) și (6), conchidem că

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\,J_n(2n) = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin\dfrac{3\pi}{2n+4}\sin\left(\dfrac{2n+1}{2n+4}\,\pi\right)}{\sin\dfrac{\pi}{2n+4}\sin\left(\dfrac{2n+3}{2n+4}\,\pi\right)} = \ln\frac{\sin\dfrac{3\pi}{2n+4}}{\sin\dfrac{\pi}{2n+4}} \\ &= \ln\left(3 - 4\sin^2\frac{\pi}{2n+4}\right) = \ln\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Astfel, egalitatea (2) este demonstrată. Cum $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, în cazul particular $n = 3$ deducem din (2) că $I_3 = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Capitolul 10

Funcțiile beta și gama

10.1 Proprietăți generale

Fiind dat un număr real a, se constată ușor că integrala improprie

$$\int_{0+0}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

este convergentă dacă și numai dacă $a > 0$. Funcția $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\Gamma(a) := \int_{0+0}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x,$$

se numește *funcția gama* a lui Euler.

Fiind date numerele reale a și b, se constată imediat că integrala improprie

$$\int_{0+0}^{1-0} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x$$

este convergentă dacă și numai dacă avem $a > 0$ și $b > 0$. Considerăm funcția $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$B(a, b) := \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x.$$

Ea se numește *funcția beta* a lui Euler. Integralele improprii care dau valorile funcției beta (respectiv ale funcției gama) se numesc, la propunerea lui C. Legendre, *integralele lui Euler de speța întâi* (respectiv *de speța a doua*).

10.1.1 Teoremă. *Funcția gama se bucură de următoarele proprietăți:*
1° $\Gamma(1) = 1$.
2° $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ *pentru orice* $a \in (0, \infty)$.
3° *Funcția* Γ *este log-convexă (adică funcția* $\ln \circ \Gamma$ *este convexă) pe* $(0, \infty)$.

Demonstrație. Omitem demonstrațiile afirmațiilor 1° și 2°, care sunt imediate.
3° Fie $a_1, a_2 \in (0, \infty)$ și fie $\lambda \in (0, 1)$. Avem

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2) &= \int_{0+0}^{\infty} x^{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 - 1} e^{-x}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{0+0}^{\infty} \left(x^{a_1-1}e^{-x}\right)^{\lambda} \left(x^{a_2-1}e^{-x}\right)^{1-\lambda} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea lui Hölder (teorema 6.3.3) funcțiilor definite prin

$$f(x) := \left(x^{a_1-1}e^{-x}\right)^{\lambda}, \qquad g(x) := \left(x^{a_2-1}e^{-x}\right)^{1-\lambda}$$

și exponenților $p := \frac{1}{\lambda}$, $q := \frac{1}{1-\lambda}$, obținem

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2) &= \int_{0+0}^{\infty} \left(x^{a_1-1}e^{-x}\right)^{\lambda} \left(x^{a_2-1}e^{-x}\right)^{1-\lambda} \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{0+0}^{\infty} x^{a_1-1}e^{-x}\, \mathrm{d}x\right)^{\lambda} \left(\int_{0+0}^{\infty} x^{a_2-1}e^{-x}\, \mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \\ &= \Gamma(a_1)^{\lambda}\Gamma(a_2)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Deci funcția Γ este log-convexă. □

Din proprietățile 1° și 2° de mai sus rezultă imediat (prin inducție) că $\Gamma(n) = (n-1)!$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Din acest motiv, se spune uneori că funcția gama este o generalizare a factorialului.

10.1.2 Observație. Fiind log-convexă, funcția gama este convexă pe $(0, \infty)$. Există un unic număr real $a_0 \in (1, 2)$ cu proprietatea că Γ este strict descrescătoare pe $(0, a_0]$ și strict crescătoare pe $[a_0, \infty)$. Prin urmare, a_0 este punct de minim global pentru Γ. Valoarea minimă este $\Gamma(a_0) \approx 0.8856$.

10.1.3 Teoremă. *Funcția beta se bucură de următoarele proprietăți:*
1° $B(a, b) = B(b, a)$ *pentru orice* $a, b \in (0, \infty)$.
2° $B(a, b) = \frac{b-1}{a}\, B(a+1, b-1)$ *pentru orice* $a \in (0, \infty)$ *și orice* $b \in (1, \infty)$.
3° $B(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$ *pentru orice* $a \in (0, \infty)$ *și orice* $n \in \mathbb{N}$.
4° $B(a, b) = \int_{0+0}^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\, \mathrm{d}t$ *pentru orice* $a, b \in (0, \infty)$.
5° $B(a+1, b) = \frac{a}{a+b}\, B(a, b)$ *pentru orice* $a, b \in (0, \infty)$.

Demonstrație. 1° Se face schimbarea de variabilă $x = 1 - t$ în formula de definiție a funcției beta.

2° Se folosește formula de integrare prin părți în egalitatea

$$B(a, b) = \int_{0+0}^{1-0} \left(\frac{x^a}{a}\right)' (1 - x)^{b-1} \,\mathrm{d}x.$$

3° Se aplică în mod repetat proprietatea 2°.

4° Se face schimbarea de variabilă $x = \frac{t}{1+t}$ în formula de definiție a funcției beta.

5° Ținând seama de 4°, avem

$$B(a + 1, b) = \int_{0+0}^{\infty} \frac{t^a}{(1 + t)^{a+b+1}} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a + b} \int_{0+0}^{\infty} t^a \left(\frac{1}{(1 + t)^{a+b}}\right)' \mathrm{d}t.$$

Integrând prin părți, obținem egalitatea din enunț. □

Din proprietatea 3° de mai sus rezultă că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem

$$B(m, n) = \frac{(n - 1)!}{m(m + 1) \cdots (m + n - 1)} = \frac{(m - 1)!\,(n - 1)!}{(m + n - 1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m + n)}.$$

Vom demonstra în continuare că această egalitate rămâne adevărată și pentru argumente arbitrare din $(0, \infty)$ ale funcțiilor B și Γ.

10.1.4 Teoremă. *Pentru orice $a, b \in (0, \infty)$ are loc egalitatea*

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}.$$

Demonstrație. Făcând schimbarea de variabilă $x = \cos^2\theta$ în formula de definiție $B(a, b) = \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1 - x)^{b-1} \,\mathrm{d}x$ a lui B, obținem

$$B(a, b) = 2 \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} (\cos\theta)^{2a-1}(\sin\theta)^{2b-1} \,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

oricare ar fi $a, b \in (0, \infty)$.

Presupunem mai întâi că $a, b \in [1, \infty)$. Atunci funcția definită prin

$$g(x, y) := x^{2a-1}y^{2b-1}e^{-x^2-y^2}$$

este continuă pe $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Pentru fiecare $R>0$ considerăm mulțimile definite prin

$$\begin{aligned}
D_1(R) &:= \{(x,y) \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq R^2\},\\
D_2(R) &:= [0,R]\times[0,R],\\
D_3(R) &:= \{(x,y) \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 2R^2\}.
\end{aligned}$$

Deoarece $D_1(R)\subset D_2(R)\subset D_3(R)$ și $g(x,y)>0$ pentru orice $x,y\in(0,\infty)$, rezultă că

$$\iint_{D_1(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint_{D_2(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint_{D_3(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Trecând la coordonate polare, găsim

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2}\int_0^R (\rho\cos\theta)^{2a-1}(\rho\sin\theta)^{2b-1}e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\\
&= \left(\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2a-1}(\sin\theta)^{2b-1}\,\mathrm{d}\theta\right)\int_0^R e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Ținând seama de (1), obținem

$$\iint_{D_1(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,B(a,b)\int_0^R e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,\mathrm{d}\rho. \tag{3}$$

Analog, avem

$$\iint_{D_3(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,B(a,b)\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,\mathrm{d}\rho. \tag{4}$$

Întrucât

$$\iint_{D_2(R)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^R x^{2a-1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R y^{2b-1}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right), \tag{5}$$

din (2), (3), (4) și (5) rezultă că

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,B(a,b)\int_0^R e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,\mathrm{d}\rho\\
&\qquad < \left(\int_0^R x^{2a-1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R y^{2b-1}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\\
&\qquad\qquad < \frac{1}{2}\,B(a,b)\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-1}\,\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Făcând în acest lanț de inegalități $R \to \infty$ și ținând seama că

$$\Gamma(a) = 2\int_{0+0}^{\infty} t^{2a-1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

egalitate care se obține făcând schimbarea de variabilă $x = t^2$ în formula de definiție a lui Γ, deducem că

$$\frac{1}{2}\,B(a,b)\cdot\frac{1}{2}\Gamma(a+b) \le \frac{1}{4}\,\Gamma(a)\Gamma(b) \le \frac{1}{2}\,B(a,b)\cdot\frac{1}{2}\Gamma(a+b),$$

de unde $B(a,b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$.

Considerăm acum situația când $a \in (0,1)$ sau $b \in (0,1)$. Atunci avem $a+1 > 1$ și $b+1 > 1$. Ținând seama de cele demonstrate mai sus, de proprietatea 5° din teorema 10.1.3 și de proprietatea 2° din teorema 10.1.1, deducem că

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \frac{a+b}{a}\,B(a+1,b) = \frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+b+1}{b}\,B(a+1,b+1) \\ &= \frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+b+1}{b}\cdot\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \\ &= \frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+b+1}{b}\cdot\frac{a\,\Gamma(a)\cdot b\,\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,. \end{aligned}$$

□

10.1.5 Observație. În cazul particular $a = b = 1/2$, din teorema 10.1.4 rezultă că

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_{0+0}^{1-0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}\,.$$

Făcând substituția $x = \sin^2 t$ în integrala de mai sus, obținem

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t\cos t} = \pi,$$

de unde $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Pe de altă parte, relația (6) arată că

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comparând cele două rezultate, concluzionăm că

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

10.1.6 Observație. Fie $n \in \mathbb{N}$ și fie $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Să remarcăm că

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}^{-1} &= \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &= (n+1)\,\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} = (n+1)\,B(k+1, n-k+1),\end{aligned}$$

deci

$$\binom{n}{k}^{-1} = (n+1)\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Această reprezentare a lui $\binom{n}{k}^{-1}$ cu ajutorul unei integrale euleriene de prima speță oferă o metodă elegantă de calcul al unor sume combinatorice în care intervin inversele coeficienților binomiali. Prezentăm mai jos un exemplu de astfel de sumă (pentru alte exemple a se vedea secțiunea de probleme a acestui capitol).

10.1.7 Exemplu. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{4n}{2k}^{-1} = \frac{4n+1}{2n+1}\,.$$

T. Trif [18]

Demonstrație. Formula (7) implică

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{4n}{2k}^{-1} &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} (4n+1)\int_0^1 x^{2k}(1-x)^{4n-2k}\,\mathrm{d}x \\ &= (4n+1)\int_0^1 \left\{(1-x)^{4n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{-x^2}{(1-x)^2}\right)^k\right\} \mathrm{d}x \\ &= (4n+1)\int_0^1 (1-x)^{4n} \left(1 - \frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{2n} \mathrm{d}x \\ &= (4n+1)\int_0^1 (1-2x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{4n+1}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

10.2 Formula lui Gauss

10.2.1 Teoremă. *Pentru orice $a \in (0, \infty)$ are loc egalitatea*

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^a}{a(a+1)\cdots(a+n)}\,. \tag{1}$$

Demonstrație. Conform proprietății 2° din teorema 10.1.1, avem

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n+1)} = \frac{n!\,\Gamma(a)}{a(a+1)\cdots(a+n)\Gamma(a)} = \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, în baza teoremei 10.1.4, avem

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n+1)} = B(a,n+1) = \int_{0+0}^{1} x^{a-1}(1-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Făcând în integrala din membrul drept substituția $t = nx$, obținem

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n+1)} &= \int_{0+0}^{n} \left(\frac{t}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\frac{\mathrm{d}t}{n} \\ &= \frac{1}{n^a}\int_{0+0}^{n} t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3}$$

Comparând egalitățile (2) și (3), deducem că

$$\frac{n!\,n^a}{a(a+1)\cdots(a+n)} = \int_{0+0}^{n} t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\mathrm{d}t = \int_{0+0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

unde $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$f_n(t) := t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\chi_{(0,n]}(t).$$

Se constată imediat că șirul de funcții $(f_n)_{n\geq 1}$ îndeplinește următoarele condiții:

(i) f_n este local integrabilă Riemann pe $(0,\infty)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) := t^{a-1}e^{-t}$ oricare ar fi $t \in (0,\infty)$;

(iii) f este local integrabilă Riemann pe $(0,\infty)$;

(iv) avem $|f_n(t)| \leq f(t)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $t \in (0,\infty)$.

În adevăr, pentru a verifica (iv), fie $n \in \mathbb{N}$ și $t \in (0,n]$ fixate arbitrar. Cum $1 + x \leq e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$|f_n(t)| = t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \leq t^{a-1}\left(e^{-t/n}\right)^{n} = f(t).$$

Aplicând teorema convergenței dominate (teorema 8.3.1), rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0+0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0+0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0+0}^{\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(a). \tag{5}$$

Din (4) și (5) rezultă validitatea lui (1). □

10.2.2 Observație. Formula (1) din teorema precedentă este cunoscută în literatura matematică drept *formula produs a lui Gauss*, după numele matematicianului german Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Trebuie menționat însă faptul că ea era cunoscută deja de Euler, în anul 1729. De fapt, definiția originală a lui Euler pentru funcția gama a fost prin intermediul egalității (1) și nu a integralei improprii din secțiunea 10.1.

10.2.3 Consecință (reprezentarea funcției gama sub formă de produs infinit)**.** *Pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *are loc egalitatea*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}, \tag{6}$$

unde $\gamma := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ *este constanta lui Euler.*

Demonstrație. Să remarcăm pentru început că produsul infinit din membrul drept al egalității (6) converge pentru orice $x \in \mathbb{R}$ deoarece seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} - 1\right) \tag{7}$$

este absolut convergentă. În adevăr, un calcul simplu arată că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} - 1\right|}{1/n^2} = \left|\lim_{t\to 0} \frac{(1+tx)e^{-tx} - 1}{t^2}\right| = \frac{x^2}{2}.$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (a se vedea, de exemplu, aplicația 7.2.4), criteriul comparației asigură absolut convergența seriei (7).

Ținând seama de formula (1) a lui Gauss, avem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!\, n^x} \\
&= \lim_{n\to\infty} x\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} xe^{x\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \\
&= xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}.
\end{aligned}$$

$\square$

10.3 Teorema lui Bohr–Mollerup

Rezultatul de mai jos a fost stabilit de matematicienii danezi Harald Bohr și Johannes Mollerup în anul 1922. El arată că proprietățile 1°–3° din teorema 10.1.1 definesc funcția gama.

10.3.1 Teoremă. *Dacă* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *este o funcție care îndeplinește următoarele condiții*

(i) $f(1) = 1$;

(ii) $f(x + 1) = xf(x)$ *pentru orice* $x \in (0, \infty)$;

(iii) f *este log-convexă pe* $(0, \infty)$,

atunci $f = \Gamma$.

Demonstrație. Din ipotezele (i) și (ii) rezultă imediat (prin inducție după n) că $f(n + 1) = n!$ oricare ar fi $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pentru orice $n \geq 0$ și orice $x \in (0, 1]$ avem $n + x = (1 - x)n + x(n + 1)$. În baza lui (iii) deducem că

$$\ln f(n + x) \leq (1 - x) \ln f(n) + x \ln f(n + 1),$$

adică

$$f(n + x) \leq f(n)^{1-x} f(n + 1)^x = \left(\frac{n!}{n}\right)^{1-x} (n!)^x.$$

Deducem de aici că

$$f(n + x) \leq n!\, n^{x-1}. \tag{1}$$

Analog, combinația convexă $n + 1 = x(n + x) + (1 - x)(n + x + 1)$ implică

$$n! = f(n + 1) \leq f(n + x)^x f(n + x + 1)^{1-x} = f(n + x)(n + x)^{1-x}. \tag{2}$$

Combinând inegalitățile (1) și (2), obținem

$$n!(n + x)^{x-1} \leq f(n + x) \leq n!\, n^{x-1}. \tag{3}$$

Dar, prin iterarea lui (ii), avem $f(n+x) = x(x+1) \cdots (x+n-1)f(x)$. Această egalitate împreună cu (3) implică

$$\frac{n!\, n^x}{x(x + 1) \cdots (x + n)} \left(\frac{n + x}{n}\right)^x \leq f(x) \leq \frac{n!\, n^x}{x(x + 1) \cdots (x + n)} \cdot \frac{n + x}{n}.$$

Făcând $n \to \infty$ și ținând seama de teorema 10.2.1, conchidem că $f(x) = \Gamma(x)$ pentru orice $x \in (0, 1]$. Validitatea acestei egalități se extinde imediat de la $(0, 1]$ la $(0, \infty)$, întrucât avem $f(x + 1) = xf(x)$ și $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ pentru orice $x > 0$. □

10.4 Probleme

1. Fie r, s, t numere întregi nenegative astfel încât $r + s \leq t$. Să se demonstreze că
$$\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \binom{t}{r+k}^{-1} = \frac{t+1}{t+1-s} \binom{t-s}{r}^{-1}.$$

Concursul William Lowell Putnam 1987, problema B2

2. Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea
$$\sum_{k=m}^{m^2-m+1} \frac{\binom{m^2-2m+1}{k-m}}{k\binom{m^2}{k}} = \frac{1}{m\binom{2m-1}{m}}.$$

W. Stanford, Amer. Math. Monthly, problema 11509 [2010, p. 558]

3. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \binom{2n}{k}^{-1} = -\frac{1}{2n-1}.$$

WMC Problems Group, Amer. Math. Monthly, pb. 10494 [1996, p. 74]

4. Fie $n \in \mathbb{N}$ și fie $a_k = \binom{n}{k}^{-1}$, $b_k = 2^{k-n}$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se demonstreze că
$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \cdots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0.$$

IMC 2002

5. Fiind dat $n \in \mathbb{N}$, să se demonstreze că
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k}.$$

G. Galperin, H. Gauchman, Amer. Math. Monthly, pb. 11103 [2004, p. 724]

6. Fie C_n cel de-al n-lea număr al lui Catalan, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Să se demonstreze că:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{C_n} = 5 + \frac{3}{2}\pi$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{C_n} = 22 + 8\sqrt{3}\pi$.

D. Beckwith, Amer. Math. Monthly, problema 11765 [2014, p. 267]

7. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ și fie $a = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Să se demonstreze că

$$\Gamma(a_1)^{\Gamma(a_1)}\Gamma(a_2)^{\Gamma(a_2)}\cdots\Gamma(a_n)^{\Gamma(a_n)} \geq e^{n\left(\Gamma(a)-1\right)}.$$

Z. F. Starc, Amer. Math. Monthly, problema 10549 [1996, p. 695]

8. a) Fiind dat numărul întreg nenegativ k, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{\left(n!\right)^2} \int_0^1 \left(x(1-x)\right)^n x^k \,\mathrm{d}x.$$

b) Fiind dată o funcție continuă $f[0,1] \to \mathbb{R}$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{\left(n!\right)^2} \int_0^1 \left(x(1-x)\right)^n f(x) \,\mathrm{d}x.$$

SEEMOUS 2009

9. Să se calculeze produsul infinit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+z+1}{n+z}\right)^n e^{(2z-2n+1)/(2n)}.$$

P. Bracken, Amer. Math. Monthly, problema 11612 [2011, p. 937]

10. Fiind dat numărul real $a \in (0, \infty)$, să se determine $b \in [0, \infty)$ astfel ca

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y (1+x^a)^{-b} \,\mathrm{d}x = 1.$$

Olimpiada județeană, 2019/4

10.5 Soluții

1. În baza formulei (7) din secțiunea 10.1, avem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\binom{t}{r+k}^{-1} &= \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(t+1)\int_0^1 x^{r+k}(1-x)^{t-r-k}\,\mathrm{d}x\\ &= (t+1)\int_0^1 x^r(1-x)^{t-r}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\mathrm{d}x\\ &= (t+1)\int_0^1 x^r(1-x)^{t-r}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^s\mathrm{d}x\\ &= (t+1)\int_0^1 x^r(1-x)^{t-s-r}\,\mathrm{d}x\\ &= (t+1)\cdot\frac{1}{t-s+1}\binom{t-s}{r}^{-1}.\end{aligned}$$

2. Mai general, fiind date numerele naturale m, M și N, cu proprietatea că $m \le M \le N$, are loc egalitatea

$$\sum_{k=m}^{M}\frac{\binom{M-m}{k-m}}{k\binom{N}{k}} = \frac{1}{m\binom{N-M+m}{m}}\,.$$

Lăsăm în seama cititorului să demonstreze că această egalitate este echivalentă cu cea din problema anterioară, sau să o demonstreze folosind aceeași metodă.

3. Notăm cu S_n suma de evaluat. Ținând seama de formula (7) din secțiunea 10.1, avem

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k}(2n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{2n-k}\,\mathrm{d}x\\ &= (2n+1)\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{2n}\binom{4n}{2k}(-1)^k x^k(1-x)^{2n-k}\right\}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2n+1}{2}\int_0^1\left\{\left(\sqrt{1-x}+\mathrm{i}\sqrt{x}\right)^{4n}+\left(\sqrt{1-x}-\mathrm{i}\sqrt{x}\right)^{4n}\right\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Deoarece

$$\sqrt{1-x}\pm\mathrm{i}\sqrt{x} = \cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)\pm\mathrm{i}\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right),$$

rezultă că

$$S_n = (2n+1)\int_0^1 \cos\left(4n \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \mathrm{d}x.$$

Făcând substituția $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$, obținem

$$\begin{aligned} S_n &= (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4nt)\sin(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(4n+2)t - \sin(4n-2)t\big)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

4. Egalitatea din enunț se poate rescrie sub forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-n}}{k} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^{-1} = \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}. \end{aligned}$$

Vom demonstra această ultimă egalitate cu ajutorul formulei (7) din secțiunea 10.1. Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^{-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} n\int_0^1 x^k(1-x)^{n-1-k}\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^1 (1-x)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \mathrm{d}x \\ &= n\int_0^1 (1-x)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}{1-\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^1 \frac{(1-x)^n - x^n}{1-2x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Făcând în integrala din membrul drept schimbarea de variabilă $1-2x = t$, obținem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^{-1} &= \frac{n}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{n}{2^{n+1}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^n-1}{t}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{n}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{-1}^{1}(1+t)^k\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}(1-t)^k\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{n}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}2\,\frac{2^{k+1}}{k+1}=\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}.\end{aligned}$$

5. Soluția acestei probleme este similară cu cea a problemei anterioare.

6. Mai general, pentru orice număr real $a\in(0,4)$, notăm

$$s(a):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{C_n}\,.$$

Atunci $s(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n\binom{2n}{n}^{-1}$. Ținând seama de formula (7) din secțiunea 10.1, avem

$$s(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)a^n\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$(n+1)(2n+1)a^n\big(x(1-x)\big)^n\le(n+1)(2n+1)\left(\frac{a}{4}\right)^n\quad\text{pentru orice } x\in[0,1].$$

Deoarece seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)\left(\frac{a}{4}\right)^n$ este convergentă, în baza criteriului lui Weierstrass de convergență uniformă deducem că seria de funcții

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)a^n\big(x(1-x)\big)^n$$

converge uniform pe $[0,1]$. Drept urmare, avem

$$s(a)=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2+3n+1)\big(ax(1-x)\big)^n\,\mathrm{d}x.$$

Ținând seama că pentru $|z| < 1$ avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z+z^2}{(1-z)^3},$$

rezultă că $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2+3n+1)z^n = \frac{1+3z}{(1-z)^3}$, deci

$$s(a) = \int_0^1 \frac{1+3ax-3ax^2}{(1-ax+ax^2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Acum manual, sau cu ajutorul oricărui software de calcul simbolic, se obține

$$s(2) = \int_0^1 \frac{1+6x-6x^2}{(1-2x+2x^2)^3}\,\mathrm{d}x = 5 + \frac{3}{2}\,\pi$$

și

$$s(3) = \int_0^1 \frac{1+9x-9x^2}{(1-3x+3x^2)^3}\,\mathrm{d}x = 22 + 8\sqrt{3}\pi.$$

7. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\frac{\Gamma(a_1)\ln\Gamma(a_1) + \cdots + \Gamma(a_n)\ln\Gamma(a_n)}{n} \geq \Gamma(a) - 1. \tag{1}$$

Considerăm funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) := \Gamma(x)\ln\Gamma(x)$. Atunci $f = g \circ \Gamma$, unde $g(x) := x\ln x$. Se constată ușor că funcția g este strict crescătoare și convexă pe $[1/e,\infty)$. Cum Γ este convexă pe $(0,\infty)$ și $\operatorname{Im}\Gamma \subset [1/e,\infty)$ (a se vedea observația 10.1.2), rezultă că f este convexă. Drept urmare, avem

$$\frac{\Gamma(a_1)\ln\Gamma(a_1) + \cdots + \Gamma(a_n)\ln\Gamma(a_n)}{n} \geq \Gamma(a)\ln\Gamma(a). \tag{2}$$

Se demonstrează ușor că

$$x\ln x \geq x - 1 \quad \text{oricare ar fi } x \in (0,\infty),$$

deci

$$\Gamma(a)\ln\Gamma(a) \geq \Gamma(a) - 1. \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă validitatea lui (1).

8. a) Avem

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n x^k \,\mathrm{d}x &= \frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 x^{n+k}(1-x)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2} B(n+k+1, n+1) = \frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\cdot\frac{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+k+2)} \\
&= \frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\cdot\frac{(n+k)!\,n!}{(2n+k+1)!} = \frac{(n+1)\cdots(n+k)}{(2n+2)\cdots(2n+k+1)}\,.
\end{aligned}$$

Drept urmare,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^k}\,.$$

b) Dacă $p(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$ este o funcție polinomială, atunci

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n p(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \sum_{k=0}^r a_k \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n x^k \,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \sum_{k=0}^r a_k \frac{1}{2^k} = p\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Acest rezultat, împreună cu teorema de aproximare a lui Weierstrass sugerează că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n f(x)\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

pentru orice funcție continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, egalitate care va fi demonstrată în cele ce urmează. Pentru fiecare număr natural n considerăm funcționala liniară $L_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$L_n(f) := \frac{(2n+1)!}{\big(n!\big)^2}\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fie $f \in C[0,1]$ și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar alese. Din teorema de aproximare a lui Weierstrass rezultă că există o funcție polinomială $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel încât $\|p - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Conform observației de mai sus, avem

$$\lim_{n\to\infty} L_n(p) = p\left(\frac{1}{2}\right),$$

deci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem

$$\left| L_n(p) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Atunci pentru orice $n \geq n_0$ avem

$$\left| L_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq |L_n(f) - L_n(p)| + \left| L_n(p) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left| p\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

deci

$$\left| L_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < |L_n(f-p)| + \frac{2\varepsilon}{3}\,.$$

Cum

$$|L_n(f-p)| \leq \|f-p\|_\infty \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n \,\mathrm{d}x = \|f-p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

conchidem că $\left|L_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \geq n_0$. Cum ε a fost arbitrar, rezultă că $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

9. Răspuns:

$$(1) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+z+1}{n+z}\right)^n e^{(2z-2n+1)/(2n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Gamma(z+1)e^{(\gamma+1)z+1+\frac{1}{2}\gamma}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$, unde γ este constanta lui Euler.

Pentru fiecare număr natural n considerăm funcția definită prin

$$f_n(z) := \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+z+1}{k+z}\right)^k e^{(2z-2k+1)/(2k)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}.$$

Un calcul simplu arată că

$$f_n(z) = \frac{(n+1+z)^n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\, e^{-n+\left(z+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

Expresia din membrul drept poate fi rescrisă sub forma

$$\begin{aligned}(2) \qquad f_n(z) \quad = \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{z+1} n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)} \cdot \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} \\ & \cdot \left(\frac{n+z+1}{n}\right)^{n+1} \cdot e^{z\left(-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}}{\sqrt{n}}\,.\end{aligned}$$

Ținem seama în continuare că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+1}n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)} = \Gamma(z+1) \tag{3}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$, conform formulei produs a lui Gauss (teorema 10.2.1);

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1 \tag{4}$$

conform formulei lui Stirling;

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+z+1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{z+1}{n}\right)^n\right)^{\frac{n+1}{n}} = e^{z+1} \tag{5}$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$;

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\log n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \gamma; \tag{6}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{\sqrt{n}} = \frac{e^{\frac{1}{2}(\log n+\gamma+o(1))}}{\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{2}\gamma+o(1)} \quad \text{pentru } n \to \infty. \tag{7}$$

Din (2)–(7) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Gamma(z+1)e^{z+1}e^{\gamma z}e^{\frac{1}{2}\gamma}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2\ldots\}$, deci (1) are loc.

10. Fie funcția f, definită prin

$$f(b) = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^a)^b} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^a)^b}, \qquad b \in [1,\infty).$$

Deoarece f este strict descrescătoare, rezultă că există cel mult un $b \in [0,\infty)$ pentru care $f(b) = 1$.

Fie $u, v \in (0,\infty)$. Avem $B(u,v) = \displaystyle\int_{0+0}^{1-0} t^{u-1}(1-t)^{v-1}\mathrm{d}t$. Făcând schimbarea de variabilă $x^a = \dfrac{t}{1-t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{x^a}{1+x^a}$, obținem

$$B(u,v) = a\int_{0+0}^{\infty} \frac{x^{au-1}}{(1+x^a)^{u+v}}\,\mathrm{d}x.$$

Alegem u și v în așa fel încât $au - 1 = 0$ și $u + v = b$, adică $u = \frac{1}{a}$ și $v = b - \frac{1}{a}$. Deducem că

$$B\left(\frac{1}{a}, b - \frac{1}{a}\right) = a \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^a)^b} = af(b),$$

de unde

$$f(b) = \frac{1}{a} B\left(\frac{1}{a}, b - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(b - \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(b)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Gamma\left(b - \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(b)}.$$

Drept urmare, avem

$$f(b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Gamma\left(b - \frac{1}{a}\right) = \Gamma(b).$$

Se constată imediat că $b = 1 + \frac{1}{a}$ verifică ultima egalitate. Conform observației de la început, unica soluție a problemei este $b = 1 + \frac{1}{a}$.

Bibliografie

[1] C. Arzelà: Sulla integrazione per serie. *Atti Acc. Lincei Rend., Rome* **1** (1885), 532–537, 596–599.

[2] W. W. Breckner și T. Trif: *Convex Functions and Related Functional Equations. Selected Topics*. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2008.

[3] D. Cătinaș et al.: *Calcul integral. Culegere de probleme pentru seminarii, examene și concursuri.* Editura U. T. Pres, Cluj-Napoca, 2000.

[4] Ş. Cobzaș: *Analiză matematică (calculul diferențial).* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.

[5] D. I. Duca și E. Duca: *Exerciții și probleme de analiză matematică. Vol. II*. Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2009.

[6] P. Duren: *Invitation to Classical Analysis*. American Mathematical Society, 2012.

[7] O. Furdui: *Limits, Series and Fractional Part Integrals. Problems in Mathematical Analysis*. Springer, New York, 2013.

[8] I. S. Gradshteyn și I. M. Ryzhik: *Tables of Integrals, Series and Products. Seventh Edition.* Academic Press, 2007.

[9] A. M. Iaglom și I. M. Iaglom: *Probleme neelementare tratate elementar*. Editura Tehnică, București, 1983.

[10] K. S. Kedlaya, B. Poonen și R. Vakil: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985 - 2000. Problems, Solutions, and Commentary*. The Mathematical Association of America, 2002.

[11] D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities.* Springer, 1970.

[12] S. Rădulescu și M. Rădulescu: *Teoreme și probleme de analiză matematică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

[13] N. de Silva: A concise, elementary proof of Arzelà's bounded convergence theorem. *Amer. Math. Monthly* **117** (2010), 918–920.

[14] Gh. Sirețchi: *Calcul diferențial și integral. Vol. 1. Noțiuni fundamentale*. Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.

[15] P. N. de Souza și J.-N. Silva: *Berkeley Problems in Mathematics*. Springer, 1998.

[16] E. L. Stark: Application of a mean value theorem for integrals to series summation. *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 481–483.

[17] A. E. Taylor: A note on the Poisson kernel. *Amer. Math. Monthly* **57** (1950), 478–479.

[18] T. Trif.: Combinatorial sums and series involving inverses of binomial coefficients. *Fibonacci Quart.* **38** (2000), 79–84.

[19] T. Trif: Again on passing to the limit under the integral sign. *Gazeta Matematică (seria A)* **32 (111)** (2014), nr. 1–2, 11–18.

[20] B. R. Yahaghi: *Iranian Mathematics Competitions, 1973–2007*. Hindustan Book Agency, 2010.

[21] R. M. Young: On the evaluation of certain improper integrals. *Math. Gazette* **75** (1991), 88–89.

Index