

# Aproximarea funcțiilor - metoda celor mai mici pătrate

## Aproximare în $L^2$

Radu Trîmbițaș

Universitatea "Babeș-Bolyai"

10 aprilie 2020

- Funcțiile de aproximat pot să fie definite pe:
  - un continuu (de regulă un interval) – funcții speciale pe care dorim să le evaluăm ca parte a unei subrutine
  - pe o mulțime finită de puncte – situație întâlnită în științele fizice sau inginerie, când măsurătorile fizice se fac în funcție de alte cantități (cum ar fi timpul)
- Deoarece o astfel de evaluare trebuie să se reducă la un număr finit de operații aritmetice, trebuie în ultimă instanță să aproximăm funcțiile prin intermediul polinoamelor sau funcțiilor raționale.
- Dorim să aproximăm o funcție dată, cât mai bine posibil în termeni de funcții mai simple.

- În general o **schemă de aproximare** poate fi descrisă prin:
  - 1 o funcție  $f \in X$  ce urmează a fi aproximată;
  - 2 o clasă  $\Phi$  de aproximante;
  - 3 o normă  $\| \cdot \|$  ce măsoară mărimea funcțiilor.

# Problema celei mai bune aproximări

- Căutăm o aproximare  $\hat{\varphi} \in \Phi$  a lui  $f$  astfel încât

$$\|f - \hat{\varphi}\| \leq \|f - \varphi\| \text{ pentru orice } \varphi \in \Phi. \quad (1)$$

- Această problemă se numește **problemă de cea mai bună aproximare** a lui  $f$  cu elemente din  $\Phi$ , iar funcția  $\hat{\varphi}$  se numește **cea mai bună aproximare** a lui  $f$  relativ la norma  $\|\cdot\|$ .
- $\Phi$  este un spațiu liniar finit dimensional sau o submulțime a acestuia.
- Cunoscându-se o bază  $\{\pi_j\}_{j=1}^n$  a lui  $\Phi$  putem scrie

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \varphi(t) = \sum_{j=1}^n c_j \pi_j(t), \ c_j \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2)$$

## Exemplu

$\Phi = \mathbb{P}_m$  - mulțimea polinoamelor de grad cel mult  $m$ . O bază a sa este  $e_j(t) = t^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Deci  $\dim \mathbb{P}_m = m + 1$ . Polinoamele sunt cele mai utilizate aproximante pentru funcții pe domenii mărginite (intervale sau mulțimi finite de funcții). Motivul – teorema lui Weierstrass – orice funcție din  $C[a, b]$  poate fi aproximată oricât de bine printr-un polinom de grad suficient de mare.

## Exemplu

$\Phi = \mathbb{S}_m^k(\Delta)$  spațiul funcțiilor spline polinomiale și cu clasa de netezime  $k$  pe subdiviziunea

$$\Delta: a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

$a$  intervalului  $[a, b]$ . Acestea sunt funcții polinomiale pe porțiuni de grad  $\leq m$ , legate în  $t_1, \dots, t_{N-1}$ , astfel încât toate derivatele până la ordinul  $k$  să fie continue. Presupunem  $0 \leq k < m$ . Pentru  $k = m$  se obține  $\mathbb{P}_m$ . Dacă  $k = -1$  permitem discontinuități în punctele de joncțiune.

# Exemple de clase de aproximante III

## Exemplu

$\Phi = \mathbb{T}_m[0, 2\pi]$  spațiul polinoamelor trigonometrice de grad cel mult  $m$  pe  $[0, 2\pi]$ . Acestea sunt combinații liniare ale funcțiilor

$$\begin{aligned}\pi_k(t) &= \cos(k-1)t, & k = \overline{1, m+1}, \\ \pi_{m+1-k}(t) &= \sin kt, & k = \overline{1, m}.\end{aligned}$$

Dimensiunea spațiului este  $n = 2m + 1$ . Astfel de aproximante sunt alegeri naturale dacă funcția de aproximat este periodică de perioadă  $2\pi$ . (Dacă  $f$  are perioada  $p$  se face schimbarea de variabilă  $t \rightarrow tp/2\pi$ .)

# Exemple de norme și tipuri de aproximare I

Câteva alegeri posibile ale normei, atât pentru aproximări continue, cât și pentru cele discrete apar în tabelul de mai jos

| normă continuă                                                 | tip          | normă discretă                                                   |
|----------------------------------------------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------|
| $\ u\ _{\infty} = \max_{a \leq t \leq b}  u(t) $               | $L_{\infty}$ | $\ u\ _{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N}  u(t_i) $               |
| $\ u\ _{1,w} = \int_a^b  u(t)  w(t) dt$                        | $L_w^1$      | $\ u\ _{1,w} = \sum_{i=1}^n w_i  u(t_i) $                        |
| $\ u\ _{2,w} = \left( \int_a^b  u(t) ^2 w(t) dt \right)^{1/2}$ | $L_w^2$      | $\ u\ _{2,w} = \left( \sum_{i=1}^N w_i  u(t_i) ^2 \right)^{1/2}$ |

- Cazul continuu presupune un interval  $[a, b]$  și o funcție pondere  $w(t)$  (posibil și  $w(t) \equiv 1$ ) definită pe intervalul  $[a, b]$  și pozitivă, exceptând zerourile izolate. Intervalul  $[a, b]$  poate fi nemărginit, dacă funcția pondere  $w$  este astfel încât integrala pe  $[a, b]$  care definește norma să aibă sens. Funcția dată  $f$  și funcția  $\varphi$  din clasa  $\Phi$  trebuie definite pe  $[a, b]$  și norma  $\|f - \varphi\|$  să aibă sens.

## Exemple de norme și tipuri de aproximare II

- Cazul discret presupune o mulțime de  $N$  puncte distincte  $t_1, t_2, \dots, t_N$  împreună cu ponderile  $w_1, w_2, \dots, w_N$  (posibil  $w_i = 1, i = \overline{1, N}$ ).  $f$  și  $\varphi$  trebuie definite în punctele  $t_i$  în cazul discret.
- Deci combinând normele din tabelă cu spațiile liniare din exemple se obține o problemă de cea mai bună aproximare (1) cu sens.
- Dacă cea mai bună aproximantă  $\hat{\varphi}$  în cazul discret este astfel încât  $\|f - \hat{\varphi}\| = 0$ , atunci  $\hat{\varphi}(t_i) = f(t_i)$ , pentru  $i = 1, 2, \dots, N$ , spunem că  $\hat{\varphi}$  interpolatează  $f$  în punctele  $t_i$  și numim această problemă de aproximare **problemă de interpolare**.
- Cele mai simple probleme de aproximare sunt problema celor mai mici pătrate și problema de interpolare.

- Definim în cazul continuu

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < a \text{ (când } -\infty < a), \\ \int_a^t w(\tau) d\tau, & \text{dacă } a \leq t \leq b, \\ \int_a^b w(\tau) d\tau, & \text{dacă } t > b \text{ (când } b < \infty). \end{cases} \quad (3)$$

- putem scrie

$$\int_{\mathbb{R}} u(t) d\lambda(t) = \int_a^b u(t) w(t) dt, \quad \forall u \in C[a, b]$$

deoarece

$$d\lambda(t) = \begin{cases} w(t) dt, & t \in (a, b); \\ 0, & t \notin (a, b). \end{cases}$$

# Instrument notațional II

- $d\lambda$  se numește **măsură (pozitivă) continuă**
- **măsura discretă** (numită și „măsura Dirac”) asociată mulțimii de puncte  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  este o măsură  $d\lambda$  care este nenulă numai în punctele  $t_i$  și are aici valoarea  $w_i$ . Astfel în acest caz

$$\int_{\mathbb{R}} u(t) d\lambda(t) = \sum_{i=1}^N w_i u(t_i). \quad (4)$$

(definim  $\lambda(t)$  ca fiind o funcție în scară cu saltul în  $t_i$  egal cu  $w_i$ )

- unificare cu integrală Stieltjes: definim norma lui  $L_2$  prin

$$\|u\|_{2,d\lambda} = \left( \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

și obținem norma continuă sau discretă după cum  $\lambda$  este ca în (3) sau o funcție în scară ca în (4).

- Vom numi **suportul** lui  $d\lambda$  – notat cu  $\text{supp}d\lambda$  – intervalul  $[a, b]$  în cazul continuu (presupunem că  $w$  este pozitivă pe  $[a, b]$  exceptând zerourile izolate) și mulțimea  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  în cazul discret.
- Spunem că mulțimea de funcții  $\pi_j$  din (2) **este liniar independentă** pe  $\text{supp}d\lambda$  dacă

$$\forall t \in \text{supp}d\lambda \quad \sum_{j=1}^n c_j \pi_j(t) \equiv 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0 \quad (6)$$

# Aproximație prin metoda celor mai mici pătrate

Vom specializa problema (1) luând ca normă norma din  $L_2$

$$\|u\|_{2,d\lambda} = \left( \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

unde  $d\lambda$  este fie o măsură continuă (conform (3)) sau discretă (conform (4)) și utilizând aproximanta  $\varphi$  dintr-un spațiu linear  $n$ -dimensional

$$\Phi = \Phi_n = \left\{ \varphi : \varphi(t) = \sum_{j=1}^n c_j \pi_j(t), \quad c_j \in \mathbb{R} \right\}. \quad (8)$$

$\pi_j$  linear independente pe  $\text{supp} d\lambda$ ; integrala din (7) are sens pentru  $u = \pi_j, j = 1, \dots, n$  și  $u = f$ . Problema astfel obținută se numește **problemă de aproximare în sensul celor mai mici pătrate** sau **problemă de aproximare în medie pătratică**.

- Definim produsul scalar prin

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)d\lambda(t). \quad (9)$$

- Definiție corectă, conform inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$\|(u, v)\| \leq \|u\|_{2,d_\lambda} \|v\|_{2,d_\lambda}$$

- Proprietăți

- (i) simetria  $(u, v) = (v, u)$ ;
- (ii) liniaritatea  $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v)$ ;
- (iii) pozitiv definirea  $(u, u) \geq 0$  și  $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$  pe  $\text{supp} d\lambda$ .

- De asemenea

$$\|u\|_{2,d_\lambda}^2 = (u, u). \quad (10)$$

- Spunem că  $u$  și  $v$  sunt **ortogonale** dacă

$$(u, v) = 0. \quad (11)$$

- Mai general, putem considera sisteme ortogonale  $\{u_k\}_{k=1}^n$ :

$$(u_i, u_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j, \quad u_k \neq 0 \text{ pe } \text{supp} d\lambda; \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (12)$$

- Pentru un astfel de sistem are loc **teorema generalizată a lui Pitagora**

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2. \quad (13)$$

- (13)  $\Rightarrow$  orice sistem ortogonal este liniar independent pe  $\text{supp} d\lambda$ .  
Într-adevăr, dacă membrul stâng al lui (13) se anulează, atunci și membrul drept se anulează și deoarece  $\|u_k\|^2 > 0$ , din ipoteză rezultă  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

# Ecuațiile normale I

- Putem scrie pătratul erorii din  $L_2$  sub forma

$$E^2[\varphi] := \|\varphi - f\|^2 = (\varphi - f, \varphi - f) = (\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) + (f, f).$$

- Înlocuind pe  $\varphi$  cu expresia sa se obține

$$\begin{aligned} E^2[\varphi] &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{j=1}^n c_j \pi_j(t) \right)^2 d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{j=1}^n c_j \pi_j(t) \right) f(t) d\lambda(t) + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} f^2(t) d\lambda(t). \end{aligned} \tag{14}$$

- Pătratul erorii din  $L_2$  este o funcție quadratică de coeficienții  $c_1, \dots, c_n$  ai lui  $\varphi$ . Problema celei mai bune aproximații în  $L_2$  revine la a minimiza această funcție pătratică; ea se rezolvă anulând derivatele parțiale.

## Ecuațiile normale II

- Se obține

$$\frac{\partial}{\partial c_i} E^2[\varphi] = 2 \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{j=1}^n c_j \pi_j(t) \right) \pi_i(t) d\lambda(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_i(t) f(t) d\lambda(t) = 0$$

adică

$$\sum_{j=1}^n (\pi_i, \pi_j) c_j = (\pi_i, f), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

- Aceste ecuații se numesc **ecuații normale** pentru problema celor mai mici pătrate.
- Ele formează un sistem de forma

$$Ac = b \quad (16)$$

unde matricea  $A$  și vectorul  $b$  au elementele

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = (\pi_i, \pi_j), \quad b = [b_i], \quad b_i = (\pi_i, f). \quad (17)$$

# Existența și unicitatea soluției I

- Datorită simetriei produsului scalar,  $A$  este o matrice simetrică. Mai mult,  $A$  este pozitiv definită, adică

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0 \text{ dacă } x \neq [0, 0, \dots, 0]^T. \quad (18)$$

- Funcția (18) se numește **formă pătratică** (deoarece este omogenă de grad 2). Pozitiv definirea lui  $A$  ne spune că forma pătratică ai cărei coeficienți sunt elementele lui  $A$  este întotdeauna nenegativă și zero numai dacă variabilele  $x_i$  se anulează.
- Pentru a demonstra (18) să inserăm definiția lui  $a_{ij}$  și să utilizăm proprietățile (i)-(iii) ale produsului scalar

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (\pi_i, \pi_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \pi_i, x_j \pi_j) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \pi_i \right\|^2.$$

# Existența și unicitatea soluției II

- Aceasta este evident nenegativă. Ea este zero numai dacă  $\sum_{i=1}^n x_i \pi_i \equiv 0$  pe  $\text{supp} d\lambda$ , care pe baza liniar independenței lui  $\pi_i$  implică  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .
- Este un rezultat cunoscut din algebra liniară că o matrice  $A$  simetrică pozitiv definită este nesingulară. Într-adevăr, determinantul său, precum și minorii principali sunt strict pozitivi. Rezultă că sistemul de ecuații normale (15) are soluție unică.
- Corespunde această soluție minimului lui  $E[\varphi]$  în (14)? Matricea hessiană  $H = [\partial^2 E^2 / \partial c_i \partial c_j]$  trebuie să fie pozitiv definită. Dar  $H = 2A$ , deoarece  $E^2$  este o funcție quadratică. De aceea,  $H$ , ca și  $A$ , este într-adevăr pozitiv definită și soluția ecuațiilor normale ne dă minimul dorit.

# Existența și unicitatea soluției III

- Problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate are o soluție unică, dată de

$$\hat{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \pi_j(t) \quad (19)$$

unde  $\hat{c} = [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n]^T$  este vectorul soluție al ecuațiilor normale (15).

# Exemplu I

## Exemplu

*Dându-se punctele*

$$(0, -4), (1, 0), (2, 4), (3, -2),$$

*determinați polinomul de gradul 1 corespunzător acestor date prin metoda celor mai mici pătrate.*

**Soluție.** Aproximanta căutată are forma

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x.$$

Sistemul de ecuații normale se determină din condițiile  $f - \varphi \perp 1$  și  $f - \varphi \perp x$ . Se obține

$$\begin{cases} c_0(1, 1) + c_1(x, 1) = (f, 1) \\ c_0(1, x) + c_1(x, x) = (f, x) \end{cases}$$

## Exemplu II

Dar,  $(1, 1) = \sum_{i=1}^4 1 \cdot 1 = 3$ ,

$(1, x) = (x, 1) = \sum_{i=1}^4 1 \cdot x_i = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6$ ,

$(x, x) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 14$ . Pentru membrul drept avem  $(f, 1) = (y, 1) = -2$   
și  $(f, x) = (y, x) = 2$ . Am obținut sistemul

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cu soluția  $c_0 = -2$ ,  $c_1 = 1$ . Deci  $\varphi(x) = x - 2$ . ■

- Ecuațiile normale rezolvă problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate complet în teorie. Dar în practică?
- Referitor la o mulțime generală de funcții de bază liniar independente, pot apărea următoarele dificultăți:
  - ❶ Sistemul de ecuații normale (15) poate fi **prost condiționat**. Un exemplu simplu este următorul:  $\text{supp } d\lambda = [0, 1]$ ,  $d\lambda(t) = dt$  pe  $[0, 1]$  și  $\pi_j(t) = t^{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Atunci

$$(\pi_i, \pi_j) = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

adică matricea  $A$  este matricea Hilbert. Proasta condiționare a ecuațiilor normale se datorează alegerii neinspirate a funcțiilor de bază. Acestea devin aproape liniar dependente când exponentul crește. O altă sursă de degradare provine din elementele membrului drept

$b_j = \int_0^1 \pi_j(t) f(t) dt$ . Când  $j$  este mare  $\pi_j(t) = t^{j-1}$  se comportă pe

$[0, 1]$  ca o funcție discontinuă. Un polinom care oscilează mai rapid pe  $[0, 1]$  ar fi de preferat, căci ar angaja mai viguros funcția  $f$ .

- 2 Al doilea dezavantaj este faptul că toți coeficienții  $\hat{c}_j$  din (19) depind de  $n$ , adică  $\hat{c}_j = \hat{c}_j^{(n)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Mărirea lui  $n$  ne dă un nou sistem de ecuații mai mare și cu o soluție complet diferită. Acest fenomen se numește **nepermanența coeficienților**  $\hat{c}_j$ .

- Amândouă neajunsurile (1) și (2) pot fi eliminate (sau măcar atenuate) alegând ca funcții de bază un sistem ortogonal,

$$(\pi_i, \pi_j) = 0 \text{ dacă } i \neq j \quad (\pi_j, \pi_j) = \|\pi_j\|^2 > 0 \quad (20)$$

- Atunci sistemul de ecuații normale devine diagonal și poate fi rezolvat imediat cu formula

$$\hat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Evident, acești coeficienți  $\hat{c}_j$  sunt independenți de  $n$  și odată calculați rămân la fel pentru orice  $n$  mai mare. Avem acum proprietatea de **permanență a coeficienților**. De asemenea nu trebuie să rezolvăm sistemul de ecuații normale, ci putem aplica direct (21).

- Orice sistem  $\{\hat{\pi}_j\}$  care este liniar independent pe  $\text{supp} d\lambda$  poate fi ortogonalizat (în raport cu măsura  $d\lambda$ ) prin **procedeu Gram-Schmidt**. Se ia

$$\pi_1 = \hat{\pi}_1$$

și apoi, pentru  $j = 2, 3, \dots$  se calculează recursiv

$$\pi_j = \hat{\pi}_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_k \pi_k, \quad c_k = \frac{(\hat{\pi}_j, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = \overline{1, j-1}.$$

Atunci fiecare  $\pi_j$  astfel determinat este ortogonal pe toate funcțiile precedente.

- Am văzut că dacă  $\Phi = \Phi_n$  constă din  $n$  funcții  $\pi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  care sunt liniar independente pe  $\text{supp} d\lambda$ , atunci problema de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru această măsură

$$\min_{\varphi \in \Phi_n} \|f - \varphi\|_{2, d\lambda} = \|f - \hat{\varphi}\|_{2, d\lambda} \quad (22)$$

are o soluție unică  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_n$ , dată de (19).

- Există multe moduri de a selecta baza  $\{\pi_j\}$  a lui  $\Phi_n$  și de aceea mai multe moduri de a reprezenta soluția, care conduc totuși la aceeași funcție. Eroarea în sensul celor mai mici pătrate – cantitatea din dreapta relației (22) – este independentă de alegerea funcțiilor de bază (deși calculul soluției, așa cum s-a menționat anterior, nu este).
- În studiul acestor erori, putem presupune fără a restrânge generalitatea că baza  $\pi_j$  este un sistem ortogonal (fiecare sistem liniar independent poate fi ortogonalizat prin procedeul Gram-Schmidt).

- Avem conform (21)

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \sum_{j=1}^n \widehat{c}_j \pi_j(t), \quad \widehat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \quad (23)$$

- Observăm întâi că eroarea  $f - \varphi_n$  este ortogonală pe  $\Phi_n$ , adică

$$(f - \widehat{\varphi}_n, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi_n \quad (24)$$

unde produsul scalar este cel din (9).

- Deoarece  $\varphi$  este o combinație liniară de  $\pi_k$ , este suficient să arătăm (24) pentru fiecare  $\varphi = \pi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

- Înlocuind  $\varphi_n$  cu expresia sa din (23) în (24), găsim

$$(f - \hat{\varphi}_n, \pi_k) = \left( f - \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \pi_k, \pi_k \right) = (f, \pi_k) - \hat{c}_k (\pi_k, \pi_k) = 0,$$

ultima ecuație rezultând din formula pentru  $\hat{c}_k$  din (23).

- Rezultatul din (24) are o interpretare geometrică simplă. Dacă reprezentăm funcțiile ca vectori și spațiul  $\Phi_n$  ca un plan, atunci pentru orice funcție  $f$  care înțeapă planul  $\Phi_n$ , aproximanta în sensul celor mai mici pătrate  $\hat{\varphi}_n$  este proiecția ortogonală a lui  $f$  pe  $\Phi_n$ , vezi figura 1.

- În particular, alegând  $\varphi = \hat{\varphi}_n$  în (24) obținem

$$(f - \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) = 0$$

și de aceea, deoarece  $f = (f - \hat{\varphi}) + \hat{\varphi}$ , conform teoremei lui Pitagora și generalizării sale (13)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|f - \hat{\varphi}\|^2 + \|\hat{\varphi}\|^2 \\ &= \|f - \hat{\varphi}_n\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \pi_j \right\|^2 \\ &= \|f - \hat{\varphi}_n\|^2 + \sum_{j=1}^n |\hat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2.\end{aligned}$$

- Exprimând primul termen din dreapta obținem

$$\|f - \hat{\varphi}_n\| = \left\{ \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n |\hat{c}_j| \|\pi_j\|^2 \right\}^{1/2}, \quad \hat{c}_j = \frac{(\pi_j, f)}{(\pi_j, \pi_j)}. \quad (25)$$

- De notat că expresia dintre acolade trebuie să fie nenegativă.

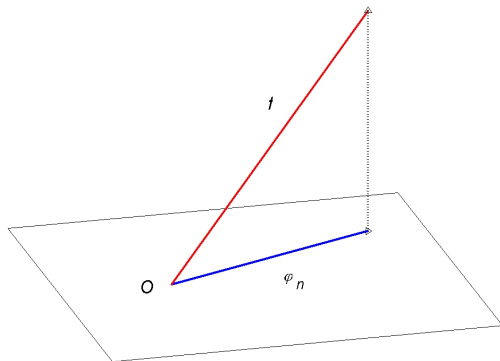


Figura: Aproximația în sensul celor mai mici pătrate ca proiecție ortogonală

# Convergența I

- Dacă se dă acum o secvență de spații liniare  $\Phi_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , avem evident

$$\|f - \hat{\varphi}_1\| \geq \|f - \hat{\varphi}_2\| \geq \|f - \hat{\varphi}_3\| \geq \dots,$$

care rezultă nu numai din (25), dar mai direct din faptul că

$$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \dots$$

- Deoarece există o infinitate de astfel de spații, atunci secvența de erori din  $L_2$ , fiind monoton descrescătoare, trebuie să convergă la o limită. Este limita 0?
- Dacă este așa, spunem că aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate **converge în medie pătratică** când  $n \rightarrow \infty$ .

- Este evident din (25) că o condiție necesară și suficientă pentru aceasta este

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{c}_j|^2 \|\pi_j\|^2 = \|f\|^2. \quad (26)$$

- Un mod echivalent de a formula convergența este următorul: dându-se  $f$  cu  $\|f\| < \infty$ , adică  $\forall f \in L_{2,d\lambda}$  și dându-se un  $\varepsilon > 0$  arbitrar de mic, există un întreg  $n = n_\varepsilon$  și o funcție  $\varphi^* \in \Phi_n$  astfel încât  $\|f - \varphi^*\| \leq \varepsilon$ .
- O clasă de funcții având această proprietate se numește completă în raport cu norma  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,d\lambda}$ . Vom numi relația (26) **relația de completitudine** sau **relația Parseval-Liapunov**.



Carl Friedrich Gauss 1777-1855  
Matematică, astronomie,  
geodezie, magnetism  
(Ca adolescent în  
Braunschweig a descoperit  
teorema binomială,  
reciprocitatea pătratică, media  
aritmetico-geometrică... )  
1807-1855: Universitatea din  
Göttingen



Adrien Marie Legendre  
(1752-1833) matematician  
francez, analiză (integrale  
eliptice), teoria numerelor,  
geometrie. Descoperitor,  
alături de Gauss, (în 1805) al  
metodei celor mai mici  
pătrate, deși Gauss a utilizat  
metoda încă din 1794, dar a  
publicat-o doar în 1809.

# Exemple de sisteme ortogonale

- 1 Sistemul trigonometric – cunoscut din analiza Fourier.
- 2 Polinoame ortogonale

# Sistemul trigonometric I

- *Sistemul trigonometric* este format din funcțiile:

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots, \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$$

- El este ortogonal pe  $[0, 2\pi]$  în raport cu măsura

$$d\lambda(t) = \begin{cases} dt & \text{pe } [0, 2\pi] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin \ell t dt = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k \neq \ell \\ \pi, & \text{pentru } k = \ell \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos \ell t dt = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ 2\pi, & k = \ell = 0 \\ \pi, & k = \ell > 0 \end{cases} \quad k, \ell = 0, 1, 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos \ell t dt = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \ell = 0, 1, 2, \dots$$

# Sistemul trigonometric II

- Aproximarea are forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (27)$$

- Utilizând (21) obținem

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt, \quad k = 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

numiți **coeficienți Fourier** ai lui  $f$ . Ei sunt coeficienții (21) pentru sistemul trigonometric.

- Prin extensie coeficienții (21) pentru orice sistem ortogonal  $(\pi_j)$  se vor numi coeficienții Fourier ai lui  $f$  relativ la acest sistem.

- În particular, recunoaștem în seria Fourier trunchiată pentru  $k = n$  aproximarea lui  $f$  în clasa polinoamelor trigonometrice de grad  $\leq n$  relativ la norma

$$\|u\|_2 = \left( \int_0^{2\pi} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

# Polinoame ortogonale I

- Dându-se o măsură  $d\lambda$ , știm că orice număr finit de puteri  $1, t, t^2, \dots$  sunt liniar independente pe  $[a, b]$ , dacă  $\text{supp} d\lambda = [a, b]$ , iar  $1, t, \dots, t^{N-1}$  liniar independente pe  $\text{supp} d\lambda = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ .
- Deoarece o mulțime de vectori liniar independenți a unui spațiu liniar poate fi ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, orice măsură  $d\lambda$  de tipul considerat generează o mulțime unică de polinoame ortogonale monice  $\pi_j(t, d\lambda)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  ce satisfac

$$\text{grad} \pi_j = j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_k(t) \pi_\ell(t) d\lambda(t) = 0, \text{ dacă } k \neq \ell \quad (29)$$

- Aceste polinoame se numesc **polinoame ortogonale** relativ la măsura  $d\lambda$ .

## Polinoame ortogonale II

- Vom permite indicilor să meargă de la 0. Mulțimea  $\pi_j$  este infinită dacă  $\text{supp}d\lambda = [a, b]$  și constă din exact  $N$  polinoame  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}$  dacă  $\text{supp}d\lambda = \{t_1, \dots, t_N\}$ . În ultimul caz polinoamele se numesc **polinoame ortogonale discrete**.
- Între trei polinoame ortogonale monice (un polinom se numește **monic** dacă coeficientul său dominant este 1) consecutive există o relație liniară. Mai exact, există constantele reale  $\alpha_k = \alpha_k(d\lambda)$  și  $\beta_k = \beta_k(d\lambda) > 0$  (depinzând de măsura  $d\lambda$ ) astfel încât

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_0(t) = 1.$$

(Se subînțelege că (30) are loc pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  dacă  $\text{supp}d\lambda = [a, b]$  și numai pentru  $k = \overline{0, N-2}$  dacă  $\text{supp}d\lambda = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ ).

# Polinoame ortogonale III

- Pentru a demonstra (30) și a obține expresiile coeficienților să observăm că  $\pi_{k+1}(t) - t\pi_k(t)$  este un polinom de grad  $\leq k$ , și deci poate fi exprimat ca o combinație liniară a lui  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k$ . Scriem această combinație sub forma

$$\pi_{k+1} - t\pi_k(t) = -\alpha_k\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2} \gamma_{k,j}\pi_j(t) \quad (31)$$

(sumele vide se consideră nule).

- Înmulțim scalar ambii membri ai relației anterioare cu  $\pi_k$  și obținem

$$(-t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k)$$

adică

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

- La fel, înmulțind scalar cu  $\pi_{k-1}$  obținem

$$(-t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}).$$

Deoarece  $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1})$  și  $t\pi_{k-1}$  diferă de  $\pi_k$  printr-un polinom de grad  $< k$  se obține prin ortogonalitate

$(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$ , deci

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

- Înmulțind (31) cu  $\pi_\ell$ ,  $\ell < k - 1$ , se obține

$$\gamma_{k,\ell} = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, k - 1 \quad (34)$$

# Polinoame ortogonale V

- Formula de recurență (30) ne dă o modalitate practică de determinare a polinoamelor ortogonale. Deoarece  $\pi_0 = 1$ , putem calcula  $\alpha_0$  cu (32) pentru  $k = 0$  și apoi  $\pi_1$ , etc. Procedeu – numit **procedura lui Stieltjes** – este foarte potrivit pentru polinoame ortogonale discrete, căci în acest caz produsul scalar se exprimă prin sume finite.
- În cazul continuu, calculul produsului scalar necesită calcul de integrale, ceea ce complică lucrurile. Din fericire, pentru multe măsuri speciale importante, coeficienții se cunosc explicit.
- Cazul special când măsura este simetrică (adică  $d\lambda(t) = w(t)$  cu  $w(-t) = w(t)$  și  $\text{supp} d\lambda$  simetrică față de origine) merită o atenție specială, deoarece în acest caz  $\alpha_k = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , conform lui (27) căci

$$(t\pi_k, \pi_k) = \int_{\mathbb{R}} w(t)t\pi_k^2(t)dt = \int_a^b w(t)t\pi_k^2(t)dt = 0,$$

deoarece avem o integrală dintr-o funcție impară pe un domeniu simetric.



Figura: Thomas Ioannes Stieltjes (1856-1894)

# Polinoamele lui Legendre I

- Se definesc prin așa-numita formulă a lui Rodrigues

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k. \quad (35)$$

- Exemple:

$$\pi_0(t) = 1,$$

$$\pi_1(t) = t,$$

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$\pi_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t.$$

- Verificăm întâi ortogonalitatea pe  $[-1, 1]$  în raport cu măsura  $d\lambda(t) = dt$ .

- Pentru orice  $0 \leq \ell < k$ , prin integrare repetată prin părți se obține:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k t^\ell dt \\ &= \sum_{m=0}^{\ell} \ell(\ell-1) \dots (\ell-m+1) t^{\ell-m} \frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}} (t^2 - 1)^k \Big|_{-1}^1 = 0, \end{aligned}$$

ultima relație având loc deoarece  $0 \leq k-m-1 < k$ .

- Deci,

$$(\pi_k, p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1},$$

demonstrându-se astfel ortogonalitatea.

- **Relația de recurență**
- Datorită simetriei, putem scrie

$$\pi_k(t) = t^k + \mu_k t^{k-2} + \dots, \quad k \geq 2$$

și observând (din nou datorită simetriei) că relația de recurență are forma

$$\pi_{k+1}(t) = t\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t),$$

obținem

$$\beta_k = \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)},$$

care este valabilă pentru orice  $t$ .

# Polinoamele lui Legendre IV

- Făcând  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\beta_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\pi_k(t) - \pi_{k+1}(t)}{\pi_{k-1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\mu_k - \mu_{k+1})t^{k-1} + \dots}{t^{k-1} + \dots} = \mu_k - \mu_{k+1}.$$

(Dacă  $k = 1$ , punem  $\mu_1 = 0$ .)

- Din formula lui Rodrigues rezultă

$$\begin{aligned}\pi_k(t) &= \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} \left( t^{2k} - kt^{2k-2} + \dots \right) \\ &= \frac{k!}{(2k)!} (2k(2k-1) \dots (k+1)t^k - \\ &\quad k(2k-2)(2k-3) \dots (k-1)t^{k-1} + \dots) \\ &= t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} t^{k-2} + \dots,\end{aligned}$$

aşa că

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}, \quad k \geq 2.$$

Deci,

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1} = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

şi deoarece  $\mu_1 = 0$ ,

$$\beta_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}, \quad k \geq 1. \quad (36)$$

- Ele se pot defini prin relația

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

- Din identitatea trigonometrică

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos \theta \cos k\theta$$

și din (37), punând  $\theta = \arccos x$  se obține

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x. \end{aligned} \quad (38)$$

# Polinoamele Cebîșev de speța I II

- De exemplu,

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

ș.a.m.d.

- Din relația (38) se obține pentru coeficientul dominant al lui  $T_n$  valoarea  $2^{n-1}$  (dacă  $n \geq 1$ ), deci polinomul Cebîșev de speța I monic este

$$\overset{\circ}{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), \quad n \geq 0, \quad \overset{\circ}{T}_0 = T_0. \quad (39)$$

- Din (37) se pot obține rădăcinile lui  $T_n$

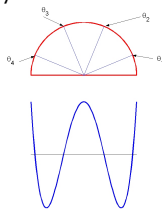
$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}, \quad \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (40)$$

# Polinoamele Cebîșev de speța I III

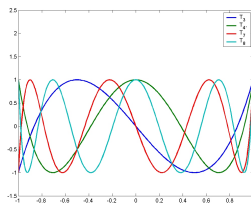
- Ele sunt proiecțiile pe axa reală ale punctelor de pe cercul unitate de argument  $\theta_k^{(n)}$ .
- Pe intervalul  $[-1, 1]$   $T_n$  oscilează de la  $+1$  la  $-1$ , atingând aceste valori extreme în punctele

$$y_k^{(n)} = \cos \eta_k^{(n)}, \quad \eta_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

$T_4$  și rădăcinile sale



$T_3, T_4, T_7, T_8$  pe  $[-1, 1]$



- Polinoamele Cebîșev de speța I sunt ortogonale în raport cu măsura

$$d\lambda(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{pe } [-1, 1].$$

- Se verifică ușor din (37) că

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_k(x) T_\ell(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^\pi T_k(\cos \theta) T_\ell(\cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos k\theta \cos \ell\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k \neq \ell \\ \pi & \text{dacă } k = \ell = 0 \\ \pi/2 & \text{dacă } k = \ell \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

# Polinoamele Cebîșev de speța I V

- Dezvoltarea în serie Fourier de polinoame Cebîșev este dată de

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \quad (42)$$

unde

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

- Păstrând în (42) numai termenii de grad cel mult  $n$  se obține o aproximare polinomială utilă de grad  $n$

$$\tau_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x), \quad (43)$$

având eroarea

$$f(x) - \tau_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j T_j(x) \approx c_{n+1} T_{n+1}(x). \quad (44)$$

- Aproximanta din (43) este cu atât mai bună cu cât coeficienții din extremitatea dreaptă tind mai repede către zero. Eroarea (44) oscilează în esență între  $+c_{n+1}$  și  $-c_{n+1}$  și este deci de mărime „uniformă”. Acest lucru contrastează puternic cu dezvoltarea Taylor în jurul lui  $x = 0$ , unde polinomul de grad  $n$  are eroarea proporțională cu  $x^{n+1}$  pe  $[-1, 1]$ .

## Teoremă

Pentru orice polinom monic  $\overset{\circ}{p}_n$  de grad  $n$  are loc

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \overset{\circ}{p}_n(x) \right| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \overset{\circ}{T}_n(x) \right| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (45)$$

unde  $\overset{\circ}{T}_n(x)$  este dat de (39).

**Demonstrație.** Se face prin reducere la absurd. Presupunem că

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \overset{\circ}{p}_n(x) \right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (46)$$

Atunci polinomul  $d_n(x) = \overset{\circ}{T}_n(x) - \overset{\circ}{p}_n(x)$  (de grad  $\leq n-1$ ) satisface

$$d_n\left(y_0^{(n)}\right) > 0, \quad d_n\left(y_1^{(n)}\right) < 0, \quad d_n\left(y_2^{(n)}\right) > 0, \dots, (-1)^n d_n\left(y_n^{(n)}\right) > 0. \quad (47)$$

Deoarece  $d_n$  are  $n$  schimbări de semn, el este identic nul; aceasta contrazice (47) și astfel (46) nu poate fi adevărată. ■

Rezultatul (45) se poate interpreta în modul următor: cea mai bună aproximare uniformă din  $\mathbb{P}_{n-1}$  pe  $[-1, 1]$  a lui  $f(x) = x^n$  este dată de  $x^n - \overset{\circ}{T}_n(x)$ , adică, de agregarea termenilor până la gradul  $n-1$  din  $\overset{\circ}{T}_n$  luați cu semnul minus. Din teoria aproximațiilor uniforme se știe că cea mai bună aproximare polinomială uniformă este unică. Deci, egalitatea în (45) poate avea loc numai dacă  $\overset{\circ}{p}_n(x) = \overset{\circ}{T}_n(x)$ .

# Polinoamele Cebîșev de speța a II-a

- Se definesc prin

$$Q_n(t) = \frac{\sin[(n+1) \arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1]$$

- Ele sunt ortogonale pe  $[-1, 1]$  în raport cu măsura  $d\lambda(t) = w(t)dt$ ,  $w(t) = \sqrt{1-t^2}$ .
- Relația de recurență este

$$Q_{n+1}(t) = 2tQ_n(t) - Q_{n-1}(t), \quad Q_0(t) = 1, \quad Q_1(t) = 2t.$$



Figura: Pafnuti Levovici Cebîșev (1821-1894)

# Polinoamele lui Laguerre I

- Sunt ortogonale pe  $[0, \infty)$  în raport cu ponderea  $w(t) = t^\alpha e^{-t}$ .
- Se definesc prin

$$\ell_n^\alpha(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t}) \text{ pentru } \alpha > -1$$

- Relația de recurență pentru polinoamele monice este

$$\ell_{k+1}^\alpha(t) = (t - 2k - \alpha - 1)\ell_k^\alpha(t) - \beta_k \ell_{k-1}^\alpha(t),$$

unde

$$\beta_k = \begin{cases} \Gamma(1 + \alpha), & \text{pentru } k = 0; \\ k(k + \alpha), & \text{pentru } k > 0. \end{cases}$$

- Exemple pentru  $\alpha = 0$ :

$$\ell_0^{(0)}(t) = 1,$$

$$\ell_1^{(0)}(t) = t - 1,$$

$$\ell_2^{(0)}(t) = t^2 - 4t + 2,$$

$$\ell_3^{(0)}(t) = t^3 - 9t^2 + 18t - 6$$



Figura: Edmond Laguerre (1834-1886)

- Se definesc prin

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}).$$

- Ele sunt ortogonale pe  $(-\infty, \infty)$  în raport cu ponderea  $w(t) = e^{-t^2}$  și verifică relația de recurență

$$H_{k+1}(t) = tH_k(t) - \beta_k H_{k-1}(t)$$

unde

$$\beta_k = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & \text{pentru } k = 0; \\ \frac{k}{2}, & \text{pentru } k > 0. \end{cases}$$

- Exemple:

$$H_0(t) = 1,$$

$$H_1(t) = t,$$

$$H_2(t) = t^2 - \frac{1}{2},$$

$$H_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t.$$



Figura: Charles Hermite (1822-1901)

- Sunt ortogonale pe  $[-1, 1]$  în raport cu ponderea

$$w(t) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta.$$

- Coeficienții din relația de recurență sunt

$$\alpha_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 2)}$$

și

$$\beta_0 = 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha + 1, \beta + 1),$$

$$\beta_k = \frac{4k(k + \alpha)(k + \alpha + \beta)(k + \beta)}{(2k + \alpha + \beta - 1)(2k + \alpha + \beta)^2(2k + \alpha + \beta + 1)}, \quad k > 0.$$

- Exemple pentru  $\alpha = 1/2$  și  $\beta = -1/2$

$$\pi_0^{(\alpha,\beta)}(t) = 1,$$

$$\pi_1^{(\alpha,\beta)}(t) = t,$$

$$\pi_2^{(\alpha,\beta)}(t) = t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4},$$

$$\pi_3^{(\alpha,\beta)}(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}.$$

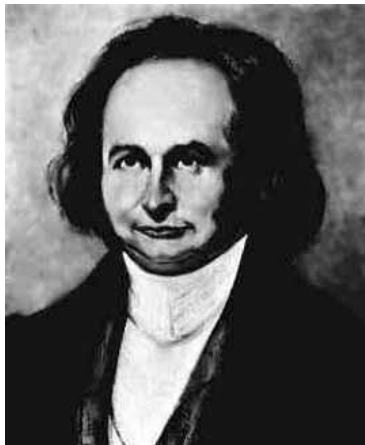


Figura: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

## Exemplu

Pentru funcția  $f(t) = \arccos t$ ,  $t \in [-1, 1]$ , obțineți aproximanta în sensul celor mai mici pătrate,  $\hat{\varphi} \in P_n$  a lui  $f$  relativ la funcția pondere  $w(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  adică, găsiți soluția  $\varphi = \hat{\varphi}$  a problemei

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 [f(t) - \varphi(t)]^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} : \varphi \in P_n \right\}.$$

Exprimați  $\varphi$  cu ajutorul polinoamelor Cebîșev  $\pi_j(t) = T_j(t)$ .

**Soluție.**  $\hat{\varphi}(t) = \frac{c_0}{2} + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x)$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} = \frac{2}{\pi} (f, T_k) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} \cos(k \arccos t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos ku du = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{u \sin ku}{k} \Big|_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin ku du \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k} \frac{\cos ku}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = -\frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1]$$

$k$  par  $c_k = 0$

$$k \text{ impar } c_k = -\frac{2}{\pi k^2}(-2) = \frac{4}{\pi k^2} \quad \blacksquare$$

-  Å. Björk, *Numerical Methods for Least Squares Problem*, SIAM, Philadelphia, 1996.
-  E. Blum, *Numerical Computing: Theory and Practice*, Addison-Wesley, 1972.
-  P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1990.
-  Gheorghe Coman, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.
-  W. Gautschi, *Numerical Analysis. An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 1997.

-  W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibilă prin [www, http://www.nr.com/](http://www.nr.com/).
-  D. D. Stancu, *Analiză numerică – Curs și culegere de probleme*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1977.
-  J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.