

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Atmosferele stelare sunt descrise de obicei pe baza modelelor teoretice, aceste modele fiind confirmate sau infirmate de observații și măsurători. În ultimul caz este necesară o modificare sau o schimbare a modelului matematic propus.

Un model de atmosferă trebuie să permită interpretarea teoretică a tuturor fenomenelor produse în atmosferă și în primul rând variația parametrilor fizici cu adâncimea atmosferei:

$$T = T(x), P = P(x), \rho = \rho(x)$$

Atmosfera stelară este, în general, un mestec de gaz și radiație. Gazul atmosferic este fierbinte, parțial ionizat (plasmă) și suficient de rarefiat pentru a fi considerat un gaz ideal.

Ecuția transferului radiativ

Energia stelei este produsă în interiorul ei prin reacții termonucleare de unde este transferată atmosferei stelare și apoi spre exterior. Transferul energiei se face prin: conductibilitate termică (conducție), convecție (prin curenți) și radiație.

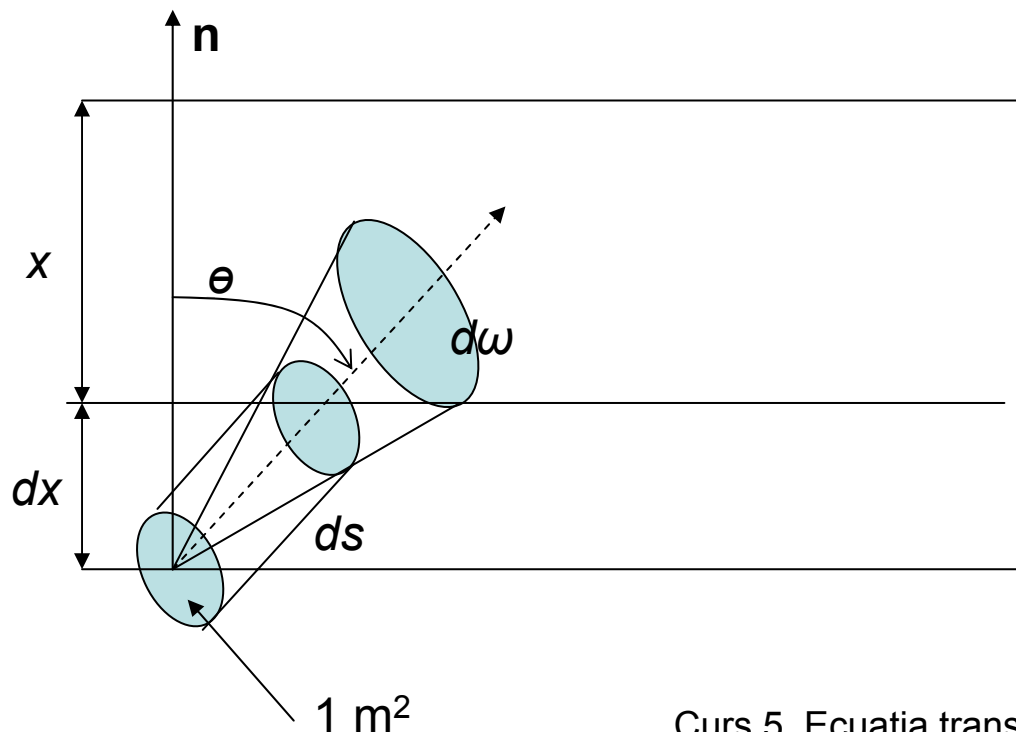
Conducția: - transferul energiei se face din aproape în aproape, de la un element de volum la altul vecin. Energia este transportată prin intermediul particulelor. Deoarece transferul prin conducție presupune o densitate mare, pentru majoritatea stelelor, care au densități mici, este neglijabil. Există totuși stele pentru care acest tip de transfer de energie este important: pitice albe, stele neutronice, etc.

Convecția: - transferul de energie se face prin intermediul curenților de materie stelară. În regiunile adânci, datorită temperaturii ridicate, se formează curenți ascendenți care transportă energia spre exterior, iar la suprafață se formează curenți descendenți care transportă energia de la suprafață la interior. În general nici convecția nu joacă un rol important.

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Radiația: - este principalul fenomen de transfer din interiorul stelelor. Cuantele de radiație transportă energia dinspre interior spre exterior. Reacțiile termonucleare au loc în nucleul stelei, temperatura acestuia fiind foarte ridicată (aproximativ 1.000.000 K) și deci nucleul emite radiația de mare energie. Radiația emisă de nucleu este absorbită de straturile mai reci din vecinătatea nucleului, care la rândul lor emit cuante de radiație cu energie mai mică.

Transferul radiativ din atmosfera stelară este descris de ecuația transferului radiativ.



Considerăm un strat de materie de adâncime x din fotosfera stelei, pe care o considerăm formată din straturi plan-paralele (fotosfera este subțire în raport cu raza stelei). Considerăm în acest strat un substrat de grosime dx și în substrat un element cilindric de volum cu baza 1 m^2 și înălțime ds , formând unghiul θ cu normala la suprafața stelei.

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Energia emisă de baza cilindrului în frecvența ν este: $I_\nu(x, \theta) \cdot d\omega$. Considerând densitatea gazului din cilindru ρ și coeficientul de absorbție al gazului κ_ν energia absorbită pe drumul ds va fi:

$$- \kappa_\nu \rho I_\nu(x, \theta) ds d\omega \quad (1)$$

În același timp materia din interiorul cilindrului emite în unghiul solid $d\omega$ energia:

$$j_\nu \rho ds \frac{d\omega}{4\pi} \quad (2)$$

unde j_ν este coeficientul de emisie pe unitatea de masă.

Atunci variația energiei va fi dată de:

$$dI_\nu(x, \theta) d\omega = -\kappa_\nu \rho I_\nu(x, \theta) ds d\omega + \frac{1}{4\pi} j_\nu \rho ds d\omega \quad (3)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Dacă materia este în echilibru termodinamic atunci are loc legea lui Kirchhoff:

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = 4\pi B_\nu(T) \quad (4)$$

care ne dă legătura dintre coeficientul de emisie și coeficientul de absorbție. Dar, în general acest echilibru nu este îndeplinit și de aceea în ecuația (4) se folosește în locul funcției lui Planck, B , o funcție sursă, $\mathcal{J}_\nu(x)$:

$$j_\nu = 4\pi \kappa_\nu \mathcal{J}_\nu(x) \quad (5)$$

Utilizând (5) în (3) obținem:

$$dI_\nu(x, \theta) = -\kappa_\nu \rho I_\nu(x, \theta) ds + \kappa_\nu \rho \mathcal{J}_\nu(x) ds \quad (6)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Ținând cont de faptul că: $ds = -dx \frac{1}{\cos \theta}$

și introducând adâncimea optică monocromatică:

$$d\tau_v = \kappa_v \rho dx \quad \tau_v = \int_0^x \kappa_v \rho dx \quad (7)$$

Ecuția (6) devine:

$$\cos \theta \frac{dI_v(\tau_v, \theta)}{d\tau_v} = I_v(\tau_v, \theta) - \mathcal{J}_v(\tau_v) \quad (8)$$

Ecuția (8) poartă denumirea de **ecuația transferului radiativ pentru radiația monocromatică**.

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

În cazul în care coeficientul de absorbție κ_ν nu depinde de frecvență:

$$\kappa_\nu = \kappa \quad \tau_\nu = \tau$$

spunem că atmosfera stelară este gri. Atunci ecuația (8) se înmulțește cu $d\nu$ și integrând pe întreg spectrul avem:

$$\cos \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} = I(\tau, \theta) - \mathcal{J}(\tau) \quad (9)$$

Ecuția (9) poartă denumirea de ecuația transferului radiativ pentru radiația integrală. Ecuția (9) se poate folosi și în cazul atmosferelor “non-gri”, dar coeficientul de absorbție din (9) – care intervine în adâncimea optică, τ , se înlocuiește cu o valoare medie: $\kappa = \bar{\kappa}$

În cazul echilibrului radiativ un element de volum emite în unitatea de timp o energie egală cu energia absorbită, atunci fluxul integral nu depinde de adâncimea optică, τ :

$$F = \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos \theta d\omega = \text{const.} \quad (10)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Înmulțim (9) cu $\frac{d\omega}{4\pi}$ și integrăm după toate direcțiile:

$$\int_{4\pi} \cos \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\omega - \int_{4\pi} \mathcal{J}(\tau) \frac{d\omega}{4\pi}$$

↑
nu depinde de ω

$$\frac{d}{d\tau} \left[\underbrace{\int_{4\pi} \cos \theta I(\tau, \theta) \frac{d\omega}{4\pi}}_{= F} \right] = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\omega - \mathcal{J}(\tau) \quad (11)$$

obținem:

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\omega \equiv \mathcal{J}(\tau) \quad (12)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Din relația (12) deducem că funcția sursă se reduce la intensitatea medie (după toate direcțiile) $\mathcal{J}$ a radiației integrale.

Ecuția (12) se numește ecuația **echilibrului radiativ** sau ecuația **continuității radiației**, exprimând conservarea energiei radiației integrale.

Ținând cont că: $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ ecuația (12) devine ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\pi I(\tau, \theta) \sin \theta d\theta \equiv \mathcal{J}(\tau) \quad (13)$$

Utilizând (13) în (9) obținem:

$$\cos \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} = I(\tau, \theta) - \frac{1}{2} \int_0^\pi I(\tau, \theta) \sin \theta d\theta \quad (14)$$

Ecuția (14) se numește **ecuația integro-diferențială a transferului radiativ**. Găsind soluția ei se poate determina distribuția temperaturii în fotosferă.

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Soluția aproximativă a lui Eddington

Rescriem (9) punând $\mathcal{J}=\mathcal{J}$:

$$\cos \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} = I(\tau, \theta) - \mathcal{J}(\tau) \quad (15)$$

Eddington a considerat următoarele valori medii:

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\omega \quad (16)$$

$$\mathcal{H}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos \theta d\omega \quad (17)$$

$$\mathcal{K}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos^2 \theta d\omega \quad (18)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

unde $\mathcal{J}(\tau)$ este intensitatea medie după toate direcțiile, $\mathcal{H}(\tau)$ este fluxul mediu, iar $\mathcal{K}(\tau)$ este produsul dintre presiunea de radiație medie și viteza luminii.

Înmulțim (15) cu $\frac{d\omega}{4\pi}$ și integrăm după toate direcțiile:

$$\cos \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} \frac{d\omega}{4\pi} = I(\tau, \theta) \frac{d\omega}{4\pi} - \mathcal{J}(\tau) \frac{d\omega}{4\pi} \quad \Bigg| \int_{4\pi}$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \cos \theta I(\tau, \theta) d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \mathcal{J}(\tau) d\omega$$

Avem:

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\tau} = \mathcal{J} - \mathcal{J} = 0 \quad \mathcal{H} = \text{const.} \quad (19)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Înmulțim (15) cu $\cos \theta \frac{d\omega}{4\pi}$ și integrăm după toate direcțiile:

$$\cos^2 \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} \frac{d\omega}{4\pi} = \cos \theta I(\tau, \theta) \frac{d\omega}{4\pi} - \cos \theta \mathcal{J}(\tau) \frac{d\omega}{4\pi} \quad \Bigg|_{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \cos^2 \theta I(\tau, \theta) d\omega = \\ \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \cos \theta I(\tau, \theta) d\omega - \frac{1}{4\pi} \mathcal{J}(\tau) \int_{4\pi} \cos \theta d\omega \end{aligned}$$

Dar,

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_{4\pi} \cos \theta d\omega$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

și atunci obținem:

$$\frac{d\mathcal{K}}{d\tau} = \mathcal{H}(\tau) \quad (20)$$

Eddington a făcut presupunerea că la adâncimi mari intensitatea I este independent de unghiul θ și atunci avem:

$$\mathcal{K}(\tau) = \frac{I(\tau)}{4\pi} \int_{4\pi} \cos^2 \theta d\omega = I(\tau) \overline{\cos^2 \theta} \quad (21)$$

unde

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \cos^2 \theta d\omega = \frac{1}{3} \quad (22)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Analog avem:

$$\mathcal{J} \cong \frac{I(\tau)}{4\pi} \int_{4\pi} d\omega = I(\tau) \quad (23)$$

Atunci din (21) –(23) :

$$\mathcal{K}(\tau) = \frac{1}{3} \mathcal{J}(\tau) \quad (24)$$

și din (24) și (20) obținem:

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} = 3\mathcal{H} \quad \stackrel{(19)}{\Rightarrow} \quad \mathcal{J} = 3\mathcal{H}\tau + A \quad (25)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Pentru a determina constanta A din ecuația (25) punem condițiile la limită:

$$I_0 = I(\tau = 0, \theta) = \begin{cases} F = \frac{1}{\pi} H, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

unde F este fluxul integral mediu spre exterior (fluxul integral mediudinspre exterior spre interior este nul).

Din (12) și (26) obținem:

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}(\tau = 0) = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_0 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi F \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} F \quad (27)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Din (17) și (26) obținem:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\tau = 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I(\tau, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4} F \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} F\end{aligned}\tag{28}$$

Deoarece $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ (fluxul constant), rezultă că la $\tau = 0$ (din (27) și (28)) obținem condiția la limită pentru $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}_0 = 2\mathcal{H}\tag{29}$$

Din (29) și (25) avem:

$$A = 2\mathcal{H}\tag{30}$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Obținem deci din (25), (28) și (30):

$$\mathcal{J} = 2\mathcal{H}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \quad (31)$$

Din definiția densității medii a radiației integrale

$$u = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I d\omega \quad (32)$$

și (16) avem:

$$u = \frac{4\pi \mathcal{J}}{c} \stackrel{(31)}{=} \frac{2\pi F}{c} \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) = aT^4(\tau) \quad (33)$$

aproximația de
corp negru $\rightarrow a = \frac{4\sigma}{c}$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Știind că $\pi F = \sigma T_e^4$ unde T_e este temperatura efectivă a stelei, atunci (33) devine:

$$T^4(\tau) = \frac{T_e^4}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right) \quad (34)$$

iar relația (34) este cunoscută sub numele de **distribuția Eddington a temperaturii**.

La suprafața stelei (a atmosferei stelare) avem $\tau = 0$ și din (34) obținem:

$$T_0 = T_e \sqrt[4]{2}$$
$$T_{e_{\text{Soare}}} = 5770 \text{ K}, \quad T_{0_{\text{Soare}}} = 4850 \text{ K}$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Cilindrul elementar considerat inițial emite într-un sterradian energia integrală:

$$\frac{1}{4\pi} j \rho dx \sec \theta$$

Punând $j = 4\pi \bar{\kappa} \mathcal{J}(x)$ (analog cu ecuația (5)) energia emisă va fi:

$$\bar{\kappa} \rho \mathcal{J} dx \sec \theta = \mathcal{J} \sec \theta d\tau \quad (35)$$

Ținând cont că slăbirea radiației pentru drumul optic de grosime $\tau \sec \theta$ este:

$$I = I_0 e^{-\tau \sec \theta}$$

Din energia (35) ajunge la suprafața stelei energia:

$$dI = \mathcal{J} e^{-\tau \sec \theta} \sec \theta d\tau \quad (36)$$

Structură și Evoluție Stelară – Atmosfere stelare

Intensitatea radiației emergente se obține atunci dacă integrăm (36) după toate adâncimile optice:

$$I(0, \theta) = \int_0^{\infty} \mathcal{J}(\tau) e^{-\tau \sec \theta} \sec \theta d\tau \quad (37)$$

Ecuția (37) reprezintă **legea generală de întunecare spre margine**.

Utilizând (31) și (37) avem:

$$I(0, \theta) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right) \quad (38)$$

Atunci în centrul discului $I(0,0) = \frac{5}{4} F$ și din (38) se poate obține:

$$\frac{I(0, \theta)}{I(0,0)} = 1 - \chi + \chi \cos \theta, \quad \chi = \frac{3}{5} \quad (39)$$

unde χ este coeficientul de întunecare spre margine.