

I.2.3. Metoda dezvoltării în serie Taylor

Considerăm din nou problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (\text{I.18})$$



Sir Brook Taylor (1685 – 1731)

Având în vedere că metoda lui Euler s-a obținut prin trunchierea unei serii Taylor la doi termeni, o nouă metodă se poate obține în mod natural, așa cum a propus chiar Euler, prin reținerea mai multor termeni în serie. Considerăm o rețea de puncte în intervalul $[a, b]$

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + ih, \dots, a + (N - 1)h, b$$

sau

$$t_i = a + ih, \quad i = 1, \dots, N$$

Astfel putem scrie într-un punct t_{i+1} :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \quad (\text{I.19})$$

unde $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. Prin diferențieri succesive ale soluției problemei (I.18) avem:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y''(t) &= f'(t, y(t)) \\ &\dots \\ y^{(n)}(t) &= f^{(n-1)}(t, y(t)) \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

și înlocuind relațiile (I.20) în ecuația (I.19) avem:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(t_i, y_i)(\xi_i) \quad (\text{I.21})$$

Renunțând la rest obținem metoda dezvoltării în serie Taylor:

$$\begin{aligned} y_0 &= y_a \\ y_{i+1} &= y_i + h \phi^{(n)}(t_i, y_i, h), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

unde

$$\phi^{(n)}(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, y_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i)$$

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

Se poate observa că metoda lui Euler este un caz particular al metodei dezvoltării în serie Taylor și are loc pentru $n = 1$.

Exemplu 1: Fie problema Cauchy

$$y'(t) = te^{-y(t)}, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 3]$$

care are soluția analitică $y(t) = \ln\left(e + \frac{t^2}{2}\right)$ și care se poate obține folosind Mathematica

```
In[2]:= DSolve[{Y'[t] == t Exp[-Y[t]], Y[0] == 1}, Y[t], t]
```

```
Out[2]= {{Y[t] -> Log[E + t^2/2]}}
```

Putem scrie dezvoltarea în serie Taylor de ordinul 3:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) + \frac{h^3}{6!} f''(t_i, y_i)$$

unde ținând cont că $y = y(t)$ avem:

$$\begin{aligned} f(t, y) &= te^{-y} \\ f'(t, y) &= e^{-y} - ty'e^{-y} = e^{-y}(1 - ty') = e^{-y}(1 - t^2e^{-y}) \\ f''(t, y) &= -y'e^{-y}(1 - t^2e^{-y}) + e^{-y}(-2te^{-y} + t^2y'e^{-y}) \\ &= e^{-y}(-3t + 2t^3e^{-y}) \end{aligned}$$

Rezolvăm numeric folosind metoda lui Taylor pentru $n = 1, 2, 3$, iar programul Matlab

este:

```
%exemplu Taylor
a=0;b=3;          %capetele intervalului
N=10;            %pasul rețelei
h=(b-a)/(N-1);   %numarul de noduri
y1=zeros(N,1); %initializam vectorul solutie pentru n=1
y2=zeros(N,1); %initializam vectorul solutie pentru n=2
y3=zeros(N,1); %initializam vectorul solutie pentru n=3
y1(1)=1; y2(1)=1; y3(1)=1;          %conditia initiala

t=a:h:b
for i=2:N
    y1(i)=y1(i-1)+h*t(i-1)*exp(-y1(i-1));
    y2(i)=y2(i-1)+h*t(i-1)*exp(-y2(i-1))+...
        0.5*h^2*exp(-y2(i-1))*(1-t(i-1)^2*exp(-y2(i-1)));
    y3(i)=y3(i-1)+h*t(i-1)*exp(-y3(i-1))+...
        0.5*h^2*exp(-y3(i-1))*(1-t(i-1)^2*exp(-y3(i-1)))+...
        1/6*h^3*exp(-2*y3(i-1))*(-3*t(i-1)+2*t(i-1)^3*exp(-y3(i-1)));
end
hold on
plot(a:h:b,y1,'-k') %reprezentam grafic solutia numerica
plot(a:h:b,y2,':k')
plot(a:h:b,y3,':k')

t1=a:h:b;
```

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

```
yexact=log(exp(1)+t1.^2/2);  
plot(t1, yexact, 'r')%reprezentam grafic solutia analitica
```

și obținem valorile:

Nodul	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	exact
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.3333	1.0000	1.0204	1.0204	1.0202
0.6667	1.0409	1.0797	1.0789	1.0786
1.0000	1.1194	1.1712	1.1692	1.1688
1.3333	1.2282	1.2864	1.2832	1.2829
1.6667	1.3583	1.4170	1.4129	1.4127
2.0000	1.5012	1.5561	1.5516	1.5514
2.3333	1.6497	1.6986	1.6939	1.6939
2.6667	1.7991	1.8409	1.8364	1.8364
3.0000	1.9462	1.9808	1.9766	1.9766

Tabel 2. Comparație între metoda lui Taylor pentru $n = 1, 2, 3$ și soluția analitică

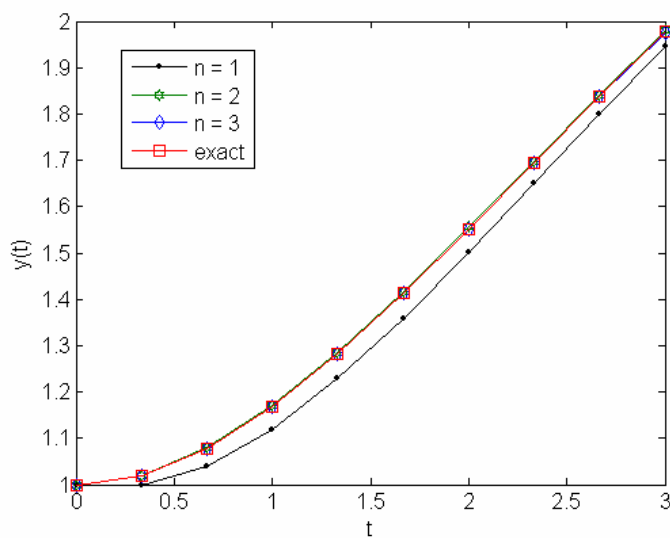


Figura 6. Reprezentarea grafică a soluțiilor aproximative pentru $n = 1, 2, 3$ și soluția analitică

Calculăm în continuare, conform definiției, eroarea locală de trunchiere a metodei

$$\begin{aligned}
 T(t_i, y_i, h) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{y}(t_i)}{h} = \phi^{(n)}(t_i, y_i, h) - \frac{\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{y}(t_i)}{h} = \\
 &= \phi^{(n)}(t_i, y_i, h) - \frac{1}{h} \left[\tilde{y}(t_i) + h\tilde{y}'(t_i) + \frac{1}{2}h^2 + \dots + \frac{h^n}{n!} \tilde{y}^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \tilde{y}^{(n+1)}(\xi) - \tilde{y}(t_i) \right] \\
 &= -\frac{h^n}{(n+1)!} \tilde{y}^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [t_{i+1}, t_i]
 \end{aligned}$$

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

unde am considerat că $\tilde{y}(t_i)$ este soluția exactă, iar $f^{(k)}$ reprezintă diferențiala de ordinul k funcției f . Avem atunci:

$$\|T(t_i, y_i, h)\| \leq \frac{C_n}{(n+1)!} h^n \quad (I.23)$$

deci metoda este de ordinul $O(h^n)$ iar funcția de eroare principală va fi

$$\tau(t_i, y_i) = -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(t_i, y_i) \quad (I.24)$$

Se observă că pentru a obține o metodă de ordin mare este necesar să calculăm mai multe derivate parțiale, lucru care poate fi efectuat cu ajutorul calculului simbolic.

I.2.3. Metode de tip Euler îmbunătățite

În metoda lui Euler trecerea de la pasul i la pasul următor $i+1$ se face urmând panta soluției în punctul curent. Se poate încerca îmbunătățirea metodei dacă evaluarea se face mai repede, de exemplu în mijlocul intervalului $[t_i, t_{i+1}]$, vezi Figura 7.

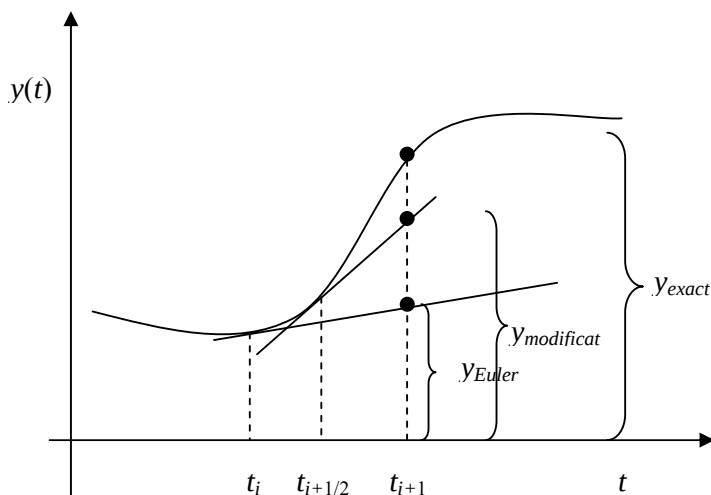


Figura 7. Aproximarea în metoda Euler modificată

Dacă evaluarea se face în mijlocul intervalului $[t_i, t_{i+1}]$, adică în punctul $t_{i+1/2} = t_i + \frac{1}{2}h$ atunci metoda se scrie:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = y(t_i) + h f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(t_i, y_i)\right) \quad (I.25)$$

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

unde pentru a calcula $y_{i+1/2}$ am folosit metoda lui Euler explicită cu pasul $\frac{1}{2}h$. Se observă că pentru a trece la pasul următor este necesară o „îmbricare”, adică avem de calculat $f(x_2, f(x_1, y_1))$ și din motive de implementare vom scrie:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \underbrace{f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \underbrace{f(t_i, y_i)}_{K_1(t_i, y_i)}\right)}_{K_2(t_i, y_i, h)}$$

sau

$$\begin{aligned} K_1(t_i, y_i) &= f(t_i, y_i) \\ K_2(t_i, y_i, h) &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ y_{i+1} &= y_i + hK_2 \end{aligned} \tag{I.26}$$

Metoda descrisă de ecuațiile (I.26) poartă denumirea de **metoda lui Euler modificată**.

O altă posibilitate de îmbunătățire a metodei lui Euler este să evaluăm panta în punctele (t_i, y_i) și $(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))$ și să alegem ca și pantă de continuare media lor aritmetică. Se obține astfel o nouă metodă numită **metoda lui Heun** (Karl Heun, 1859 – 1929) sau metoda explicită a trapezului:

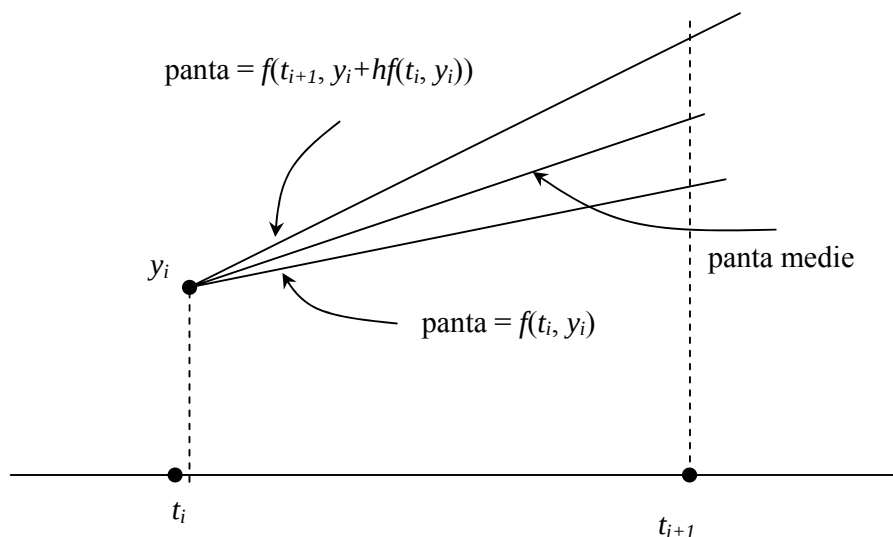


Figura 8. Aproximarea în metoda lui Heun

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

$$\begin{aligned} K_1(t_i, y_i) &= f(t_i, y_i) \\ K_2(t_i, y_i, h) &= f(t_i + h, y_i + hK_1) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h(K_1 + K_2) \end{aligned} \quad \text{I.27)}$$

Vom arăta ulterior că ordinul de exactitate al metodei lui Euler modificate și a metodei lui Heun este $O(h^2)$.

Exemplu 1: Fie problema Cauchy

$$y'(t) = y(t) - e^t, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

care are soluția analitică $y(t) = -te^t$ și care se poate obține folosind Mathematica

```
In[1]:= DSolve[{Y'[t] == Y[t] - Exp[t], Y[0] == 0}, Y[t], t]
Out[1]:= {{Y[t] -> -E^t t}}
```

Dam în continuare programul Matlab care rezolvă ecuația diferențială folosind metoda modificată a lui Euler:

```
%exemplu metoda Euler modificată
a=0;b=1;      %capetele intervalului
N=11;        %pasul rețelei
h=(b-a)/(N-1) %numarul de noduri

y=zeros(N,1); %initializam vectorul solutie pentru Euler modificat
ye=zeros(N,1); %solutia exacta
y(1)=0; ye(1)=0; %conditia initiala
t=a:h:b; %pasii de timp

for i=2:N
    K1=y(i-1)-exp(t(i-1));
    K2=y(i-1)+0.5*h*K1-exp(t(i-1)+0.5*h);
    y(i)=y(i-1)+h*K2;
    ye(i)=-t(i)*exp(t(i));
end

plot(a:h:b,y,'.k') %reprezentam grafic solutia numerica
hold on
plot(a:h:b,ye,'b') %reprezentam grafic solutia exacta
[t' ye y abs(ye-y)] %afisam valorile in noduri si eroarea
```

și programul Matlab pentru metoda lui Heun:

```
%exemplu Heun
a=0;b=1;      %capetele intervalului
N=11;        %pasul rețelei
h=(b-a)/(N-1) %numarul de noduri

y=zeros(N,1); %initializam vectorul solutie pentru Heun
ye=zeros(N,1); %solutia exacta
y(1)=0; ye(1)=0; %conditia initiala
t=a:h:b; %pasii de timp

for i=2:N
```

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

```

K1=y(i-1)-exp(t(i-1));
K2=y(i-1)+h*K1-exp(t(i));
y(i)=y(i-1)+0.5*h*(K1+K2);
ye(i)=-t(i)*exp(t(i));
end

plot(a:h:b,y,'.k') %reprezentam grafic solutia numerica
hold on
plot(a:h:b,ye,'b') %reprezentam grafic solutia exacta
[t' ye y abs(ye-y)] %afisam valorile in noduri si eroarea

```

Nodul	y , exact	y_E	$ y - y_E $	y_{Em}	$ y - y_{Em} $	y_H	$ y - y_H $
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.1105	-0.1000	0.0105	-0.1101	0.0004	-0.1103	0.0003
0.2	-0.2443	-0.2321	0.0122	-0.2434	0.0009	-0.2437	0.0006
0.3	-0.4050	-0.3908	0.0141	-0.4035	0.0015	-0.4039	0.0010
0.4	-0.5967	-0.5804	0.0163	-0.5945	0.0022	-0.5952	0.0015
0.5	-0.8244	-0.8056	0.0188	-0.8212	0.0032	-0.8222	0.0022
0.6	-1.0933	-1.0717	0.0216	-1.0890	0.0043	-1.0903	0.0030
0.7	-1.4096	-1.3848	0.0248	-1.4040	0.0056	-1.4057	0.0040
0.8	-1.7804	-1.7520	0.0285	-1.7732	0.0072	-1.7753	0.0051
0.9	-2.2136	-2.1810	0.0326	-2.2045	0.0092	-2.2071	0.0065
1.0	-2.7183	-2.6810	0.0373	-2.7068	0.0115	-2.7100	0.0082

Tabel 3. Comparație între soluția analitică (y) și valorile obținute prin metodele lui Euler (y_E) metoda modificată a lui Euler (y_{Em}) și metoda lui Heun (y_H)

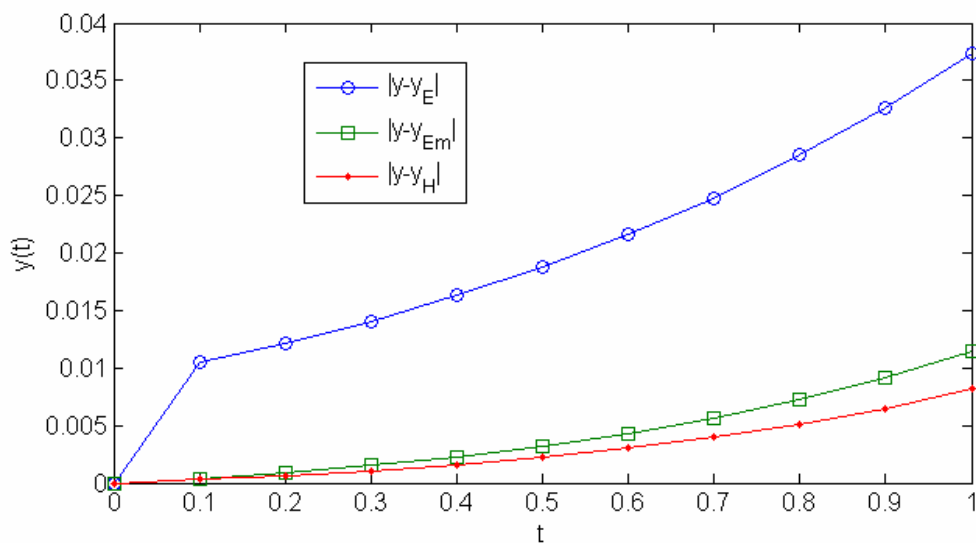


Figura 9. Variația erorii pentru metoda lui Euler, metoda lui Euler modificată și metoda lui Heun

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

În Tabelul 3 sunt date valorile obținute folosind metoda lui Euler, metoda lui Euler modificată și metoda lui Heun. De asemenea se sunt date și erorile pentru fiecare nod. Se observă că metodele modificate sunt mult mai bune decât metoda nemodificată și că metoda lui Heun este în acest caz cea mai bună. În Figura 9 sunt prezentate grafic variațiile erorilor obținute cu cele 3 metode.

I.2.4. Metode de tip Runge – Kutta

Considerăm problema cu valori inițiale (I.18) și dezvoltarea în serie Taylor (I.19). Am văzut că pentru a obține o metodă de ordin superior folosind (I.22) apare necesitatea calculului derivatelor de ordin superior. Runge a arătat în 1885 că pentru calculul derivatelor superioare se pot folosi pași intermediari de timp $t_i + ph \in [t_i, t_{i+1}]$, iar mai tarziu Kutta (1901) a implementat metoda.



Carl David Tolmé Runge (1856 – 1927)



Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944)

Vom exemplifica în continuare calculul metodei Runge-Kutta de ordin 2. Considerăm dezvoltarea în serie Taylor (I.19) pe care o trunchiem la derivata de ordinul 2:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i \quad (\text{I.28})$$

Din (I.18) avem că $y'_i = f(t_i, y_i)$ iar prin derivare avem $y''_i = \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) f(t_i, y_i)$ și

înlocuind în (I.28) avem:

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right](t_i, y_i) \\ &= y_i + h\phi(t_i, y_i, h) \end{aligned} \quad (I.29)$$

Folosind ideea lui Runge trebuie să găsim în continuare o aproximantă a lui ϕ astfel încât să difere de ϕ printr-o mărime de ordinul $O(h^2)$ sau de ordin mai mare și care să nu depindă de y' . Pentru aceasta vom dezvolta formal pe f considerată funcție de două variabile (t, y) în serie Taylor:

$$f(t + \Delta t, y + \Delta y) = f(t, y) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \Delta t \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right] \quad (I.30)$$

În ideea folosirii pașilor intermediari vom considera $\Delta t = ph$. Din relația (I.28) avem că $\Delta y = hy_i' + O(h^2)$, dar din considerentele expuse mai sus vom lua $\Delta y = qhy_i' = qhf(t_i, y_i)$. Înlocuim în ecuația (I.30) și avem:

$$f(t_i + ph, y_i + qhf(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + ph \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + qhf(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) + O(h^2) \quad (I.30)$$

Considerăm în continuare o funcție corespunzătoare unei metode cu un pas de forma:

$$\tilde{\phi}(t_i, y_i, h) = c_1 f(t_i, y_i) + c_2 f(t_i + ph, y_i + qhf(t_i, y_i)) \quad (I.31)$$

unde c_1, c_2, p și q sunt constante ce trebuie determinate. Înmulțind (I.30) cu c_2 și înlocuim în (I.31) obținem:

$$\tilde{\phi}(t_i, y_i, h) = (c_1 + c_2) f(t_i, y_i) + h \left[c_2 p \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + c_1 q f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) \right] + O(h^2) \quad (I.32)$$

Se observă că diferența dintre (I.31) și (I.32) este de $O(h^2)$, iar pentru determinarea constantelor c_1, c_2, p și q comparăm ecuațiile (I.29) și (I.32). Astfel se obține:

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 p = \frac{1}{2}, \quad c_2 q = \frac{1}{2} \quad (I.33)$$

Se observă că $p = q = \frac{1}{2c_2}$ și $c_1 = 1 - c_2$, deci metoda nu are soluție unică. Fixând valori pentru c_2

se obține o familie de metode. De exemplu alegând $c_2 = \frac{1}{2}$ ($c_1 = \frac{1}{2}, p = q = 1$) obținem metoda lui Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h (f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)))$$

APLICAȚII ALE ANALIZEI NUMERICE

iar alegând $c_2 = 1$ ($c_1 = 0, p = q = \frac{1}{2}$) se obține metoda lui Euler modificată:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(t_i, y_i)\right)$$

Din ecuația (I.30) se poate obține eroarea de trunchiere pentru metodele de tip Runge-Kutta:

$$c_2 \frac{h^2}{2} \left[p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\eta, \xi) + 2pq \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\eta, \xi) + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta, \xi) \right], \quad (\eta, \xi) \in [t_i, t_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$$

și se observă că pentru metoda lui Heun avem:

$$\frac{1}{2} \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\eta, \xi) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\eta, \xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta, \xi) \right]$$

iar pentru metoda lui Euler modificată

$$\frac{1}{4} \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\eta, \xi) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\eta, \xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta, \xi) \right].$$

Deci metodele Heun și Euler modificată sunt de metode cu ordinul de exactitate $O(h^2)$, iar eroarea de trunchiere a metodei lui Euler modificate este jumătate din cea a metodei lui Heun.