

Cursul 0

INTRODUCERE

Despre această disciplină

Până acum ați învățat matematică în principal ca cititori: teoremele pe care le-ați studiat aveau deja enunțuri precise, demonstrații verificate și un loc bine stabilit în teorie. Disciplina Proiect de cercetare în matematică vă propune să schimbați perspectiva și să deveniți autori. Asta înseamnă să formulați întrebări pentru care nu există încă un răspuns scris într-un manual, să căutați acel răspuns cu instrumentele pe care le aveți, să îl demonstrați riguros (sau să arătați, printr-un contraexemplu, că răspunsul așteptat este fals) și să îl comunicați într-o formă pe care comunitatea matematică o poate verifica și folosi.

La finalul semestrului, fiecare dintre dumneavoastră va redacta un raport de cercetare în forma unui articol/referat matematic și îl va fi susținut public. Nu va fi vorba de a rezolva o problemă celebră. Vă cer să parcurgeți onest și complet ciclul unei cercetări pe o problemă de dimensiune potrivită (de preferință legată de tema lucrării de licență), iar acesta este un lucru care se învață.

Ce înseamnă să faci cercetare în matematică

„Atâta vreme cât o ramură a științei oferă probleme din belșug, ea este plină de viață; lipsa problemelor înseamnă stingerea sau încetarea dezvoltării ei de sine stătătoare.”

David Hilbert, Mathematische Probleme, Paris, 1900.

1.1 De la exercițiu la problema de cercetare

Merită să distingem de la început trei tipuri de activitate matematică, pe care studiile de licență le amestecă adesea.

	Răspunsul	Metoda	Exemplu
Exercițiu	cunoscut	cunoscută	Arătați că funcția $f(x) = 1/2 \sin x$ este o contracție pe $\mathbb{R}$ și aproximați punctul ei fix.
Problemă	cunoscut (de cineva)	necunoscută vouă	Arătați că o aplicație strict contractivă pe un spațiu metric compact are un unic punct fix (Edelstein, 1962).
Problemă de cercetare	necunoscut	necunoscută	Ce proprietăți calitative (stabilitate, bună punere) păstrează o clasă dată de operatori într-o structură nouă și cu ce constante optime?

Răspunsul trebuie întâi căutat în literatură. O problemă de cercetare bună are trei calități:

Este nouă: răspunsul nu se găsește în literatura de specialitate.

Este relevantă: răspunsul spune ceva care interesează comunitatea, fiindcă leagă teorii, simplifică demonstrații sau rezolvă o problemă aplicată.

Este abordabilă: există o șansă rezonabilă ca ea să fie rezolvată cu mijloacele și în timpul de care dispuneți.

Un proiect de cercetare eșuează de cele mai multe ori din cauza celei de-a treia condiții, nu a primei.

1.2 Ce înseamnă un rezultat nou

„Nou” nu înseamnă neapărat „o teoremă spectaculoasă”. Literatura de specialitate recunoaște mai multe tipuri de contribuții legitime.

Existență: o concluzie care nu era cunoscută

Slăbirea ipotezelor: aceeași concluzie din ipoteze mai slabe

Optimalitate: o ipoteză sau o constantă nu poate fi îmbunătățită

Demonstrație: nouă, mai scurtă, constructivă sau cu o idee transferabilă

Transfer: rezultatul trece într-o structură nouă

Proprietăți calitative: completarea unor rezultate existente

Caracterizări: o proprietate de caracterizare (dacă și numai dacă)

Aplicații: teoria rezolvă o problemă din afara ei

Algoritmi: o metodă iterativă nouă sau mai rapidă, cu analiza convergenței.

Primele articole ale unui tânăr cercetător se încadrează aproape întotdeauna în tipurile „slăbirea ipotezelor”, „transfer”, „proprietăți calitative” sau „aplicații”. Este perfect legitim, cu o condiție: generalizarea trebuie să fie reală.

1.3 Ciclul unui proiect de cercetare

Cercetarea nu este un proces liniar. Ciclul de mai jos arată etapele prin care trece, de regulă, un proiect, dar ordinea lor reală este plină de reveniri: o demonstrație eșuată vă trimite înapoi la exemple, iar un contraexemplu vă obligă să reformulați conjectura. Etapa a treia merită o atenție specială. Studenții sar adesea direct de la întrebare la încercarea de demonstrație. Cercetătorii experimentați petrec mult timp cu exemple: calculează cazuri particulare, desenează, programează un experiment numeric, caută cel mai simplu obiect care ar putea contrazice afirmația.

Poincaré a formulat această dualitate astfel: „**Prin logică demonstrăm, prin intuiție descoperim**”. Exemplele sunt materia primă a intuiției.

Despre euristica rezolvării problemelor merită citite clasicul lui Pólya și cartea lui Tao.

1 Întrebarea (formulare precisă, provizorie)

2 Documentarea (ce se știe, cine, cum)

3 Exemple (cazuri particulare, experimente)

4 Conjectura (un enunț precis, credibil)

5 Demonstrație (sau contraexemplu) Eșec? Ajustăm conjectura...

6 Redactare (articol, prezentare, recenzie) Pot apărea întrebări noi

1 Întrebarea