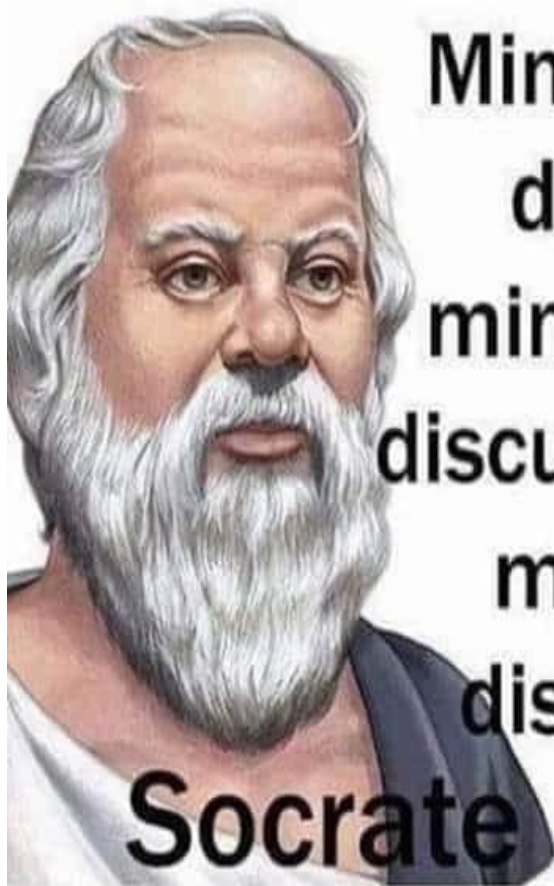


Adrian Petrușel

Ecuatii Diferențiale



**Mințile puternice
discută idei,
mințile mediocre
discută evenimente,
mințile slabe
discută oameni.**

Socrate

Cuprins

Introducere	iii
1 Noțiunea de ecuație diferențială	1
1.1 Noțiunea de ecuație diferențială. Tipuri de soluții	1
1.2 Probleme asociate unor ecuații diferențiale	5
1.3 Exerciții rezolvate și propuse	8
1.4 Concluzii	13
2 Ecuații diferențiale rezolvabile efectiv	15
2.1 Ecuații cu variabile separabile	16
2.2 Ecuații omogene în sens Euler	17
2.3 Ecuații diferențiale liniare	18
2.4 Ecuații cu diferențială totală exactă	19
2.5 Ecuații Bernoulli	20
2.6 Ecuații Riccati	20
2.7 Ecuații Clairaut. Metoda parametrului	21
2.8 Exerciții rezolvate și propuse	22
3 Modele guvernate de ecuații diferențiale	27
3.1 Proces de modelare matematică	27
3.2 Derivata	30
3.3 Modele din chimie, biologie și medicină	30
3.4 Modele din fizică	38

3.5	Exerciții rezolvate și propuse	40
4	Principiul contracției	47
4.1	Noțiunea de normă. Spații Banach	47
4.2	Principiul contracției al lui Banach	50
4.3	Exerciții rezolvate și propuse	52
5	Problema lui Cauchy	59
5.1	Teoreme de existență și unicitate	59
5.1.1	Teorema globală de existență și unicitate	59
5.1.2	Teorema locală de existență și unicitate	66
5.2	Exerciții rezolvate și propuse	71
6	Dependența de date a soluției problemei Cauchy	77
6.1	Lema Gronwall	78
6.2	Dependența continuă de date a soluției problemei lui Cauchy	80
6.3	Aspecte dinamice în teoria ecuațiilor diferențiale	83
6.4	Exerciții rezolvate și propuse	85
7	Sisteme de ecuații diferențiale liniare	89
7.1	Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene	89
7.2	Sisteme de ecuații diferențiale liniare și neomogene	94
7.3	Exerciții rezolvate și propuse	96
8	Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți	101
8.1	Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene cu coeficienți constanți	101
8.2	Exerciții rezolvate și propuse	106
9	Ecuații diferențiale liniare de ordinul 2	109
9.1	Ecuații diferențiale liniare de ordinul 2	109

9.2	Ecuatii diferențiale liniare de ordinul 2 cu coeficienți constanți	112
9.3	Exerciții rezolvate și propuse	114
10	Aspecte dinamice în teoria sistemelor de două ecuații diferențiale liniare	117
10.1	Noțiunea de sistem dinamic	117
10.2	Exerciții rezolvate și propuse	124
11	Recapitularea noțiunilor fundamentale	127
11.1	Cazul ecuațiilor diferențiale	127
11.2	Cazul sistemelor de ecuații diferențiale	131
11.3	Exerciții rezolvate	133
	Bibliografie	136

Introducere

Scopul acestui curs este de a prezenta principalele noțiuni și rezultate din teoria ecuațiilor diferențiale și a sistemelor dinamice generate de acestea. În plus, vom discuta tangențial și despre unele clase de ecuații integrale, ce se leagă în mod natural de unele probleme asociate ecuațiilor diferențiale de ordinul 1 sau ordinul 2. Principalele teme sunt: 1. Ecuații diferențiale și ecuații integrale rezolvabile efectiv; 2. Modele matematice guvernate de ecuații diferențiale; 3. Teoreme de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unei ecuații diferențiale via principiul contracției al lui Banach; 4. Sisteme de ecuații liniare de ordinul 1; 5. Sisteme dinamice generate de ecuații diferențiale.

Materialul de față este împărțit pe capitole, fiecărui capitol corespunzând unui curs și unui seminar. Cursul explică pe larg noțiunile și rezultatele fundamentale mai sus enumerate, iar seminarul va considera exerciții și probleme aplicative (rezolvate și propuse). Seminariile sunt susținute de mine și de colega mea conf.dr. Monica Bota. Cât privește laboratorul, doctoranda Cristina Gheorghe va fi cea care va gestiona activitatea de laborator. Tematica acestuia este următoarea:

1. Introducere în Maple/Sage;
2. Ecuații diferențiale de ordinul 1;
3. Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul 1
4. Ecuații diferențiale de ordinul 2;
5. Modele matematice guvernate de ecuații diferențiale;
6. Metoda aproximațiilor succesive și noțiuni de stabilitate;
7. Evaluare.

Prezența este obligatorie la seminar și laborator, absența la mai mult de un laborator sau mai mult de trei seminarii atrăgând după sine neprim-

irea în examenul din sesiunea și, astfel, nepromovarea examenului. Temele rezolvate (12 exerciții dintre cele propuse în primele 10 capitole, câte două din capitolele 2, 8 și 9 și câte unul din restul capitolelor, la alegerea studentului) se predau la ultimul curs din ianuarie 2025. În caz de similitudine între una sau mai multe teme, ambele/toate se anulează și punctajul acordat va fi zero. De asemenea, în ceea ce privește conectarea la activitatea de seminar și laborator, se va respecta componența anunțată a grupelor/subgrupelor.

Nota finală la disciplina *Ecuatii diferențiale* este compusă din: 10% - activitatea la curs și seminar, 10% - realizarea temelor propuse, 10% - lucrarea de control de la seminar (săptămâna a șasea), 10% - realizarea proiectului de laborator (minim nota 5,00), 50% - nota de la examenul scris din sesiune (care trebuie să fie minim 5,00). Un punct se acordă din oficiu.

Alte informații: A. Petrușel (<http://math.ubbcluj.ro/petrusel/>).

Adrian Petrușel

Septembrie 2024

Capitolul 1

Noțiunea de ecuație diferențială

1.1 Noțiunea de ecuație diferențială. Tipuri de soluții

O ecuație diferențială este o ecuație în care necunoscuta este o funcție de o variabilă reală (să zicem $x = x(t), t \in I$, cu I interval al axei reale) și ea apare în ecuație împreună cu derivatele sale.

Comentariu istoric. Se pare că termenul de "equatio differentialis" a fost folosit pentru prima dată în 1676 de Gotfried Wilhelm von Leibnitz pentru a desemna problema determinării unei funcții ce satisface o relație în care apare ea și unele derivate ale ei.

O ecuație diferențială ordinară este o ecuație diferențială în care funcția necunoscută și derivatele sale apar pe aceeași argument notat, de exemplu, cu t . Un exemplu de ecuație diferențială ordinară este ecuația

$$x''(t) - t^2 x'(t) + 3tx^2(t) = \arctan t, t \in [0, \infty[.$$

Dacă în ecuația diferențială există o modificare a argumentului, atunci ecuația respectivă se numește ecuație diferențială cu argument modificat.

De exemplu, dacă $\tau > 0$ este o constantă reală dată, atunci ecuația

$$x''(t) + 2x'(t) - x(t - \tau) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

este o ecuație cu argument modificat, mai exact cu argument întârziat. O ecuație diferențială de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ este o ecuație în care funcția necunoscută apare împreună cu derivatele sale, iar ordinul cel mai mare al derivatei este n . De exemplu, ecuația

$$x''(t) - tx(t) = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$$

este o ecuație diferențială ordinară de ordinul 2.

În ceea ce urmează, dacă I este un interval al axei reale, vom nota cu $C(I, \mathbb{R}^n)$ spațiul funcțiilor continue pe I cu valori în \mathbb{R}^n , iar cu $C^m(I, \mathbb{R}^n)$ spațiul funcțiilor continue pe I cu toate derivatele continue pe I până la ordinul m . Dacă $n = 1$ vom scrie pe scurt $C(I)$ sau $C^m(I)$.

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție continuă pe D . Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1 în formă normală Cauchy este dat de

$$X'(t) = f(t, X(t)). \quad (1.1)$$

Printr-o soluție a sistemului (1.1) pe intervalul I al axei reale înțelegem o funcție $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ce satisface:

- (i) $\text{Grafic}(\varphi) := \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset D$;
- (ii) φ este derivabilă pe I ;
- (iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, oricare ar fi $t \in I$.

Să remarcăm faptul că, din (ii) și (iii), folosind faptul că f este continuă, avem că $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Observație. Dacă explicităm

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

1.1. NOȚIUNEA DE ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ. TIPURI DE SOLUȚII

respectiv

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix},$$

atunci (1.1) se reprezintă desfășurat ca un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1 de forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (1.2)$$

unde $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pentru $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Corespunzător, soluția sistemului (1.2) se reprezintă

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \dots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

Observație. În particular, $X'(t) = f(X(t))$ este un sistem autonom de ecuații diferențiale de ordinul 1. Deseori, mai ales în procesul de modelare matematică, suntem interesați de găsirea soluțiilor sistemelor autonome ce sunt constante în timp. Acestea se numesc soluții echilibru sau soluții staționare ale sistemului dat. Evident, în aceste cazuri avem că $X'(t) = 0, t \in I$ și, în consecință, soluțiile echilibru ale sistemului $X' = f(X)$ se obțin rezolvând sistemul $f(X) = 0$.

Comentariu istoric. Notățiile derivatei unei funcții $x = x(t)$ date de-a lungul timpului:

$\frac{dx}{dt}$ – a fost dată de Leibnitz,

$\dot{x}(t)$ – a fost dată de Newton,

$x'(t)$ – a fost dată de Lagrange.

Definiție. Fie $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe E . O ecuație diferențială de ordinul n în formă implicită este dată de

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (1.3)$$

unde $x^{(n)}$ notează derivata de ordinul n a funcției x .

Printr-o soluție a ecuației (1.3) pe intervalul I al axei reale înțelegem o funcție $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ce satisface:

- (i) $\varphi \in C^n(I, \mathbb{R})$;
- (ii) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) \in E$, oricare ar fi $t \in I$;
- (iii) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$, oricare ar fi $t \in I$.

Observație. În anumite condiții, ecuația (1.3) poate fi rescrisă sub forma

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (1.4)$$

ceea ce reprezintă forma normală Cauchy a unei ecuații diferențiale de ordinul n .

Exemplu. Fie ecuația diferențială de ordinul 1 $x'(t) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Funcția $\varphi(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ este o soluție explicită a ecuației pe \mathbb{R} . Mulțimea tuturor soluțiilor ecuației date este $S = \{\varphi(t) = ce^t, t \in \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}$.

Definiție. Fie J un interval al axei reale, $g : D := J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și ecuația diferențială de ordinul 1

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in J. \quad (1.5)$$

Prin definiție, relația

$$h(t, \varphi(t)) = 0, t \in I \quad (1.6)$$

este o soluție în formă implicită a ecuației (1.5) pe intervalul $I \subseteq J$ dacă orice funcție $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ ce verifică (1.6) pe intervalul I este o soluție a ecuației (1.5) pe intervalul I .

Exemplu. Fie ecuația diferențială de ordinul 1 $x'(t) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Relația

$$\ln |\varphi(t)| = t, t \in \mathbb{R}$$

definește o soluție în formă implicită a ecuației date pe \mathbb{R} .

Exemplu. Asemănător, relația $5x - x^5 + t^5 - 1 = 0$ definește o soluție $x = x(t)$ în formă implicită a ecuației $x'(t) = \frac{t^4}{x^4(t)-1}$. Intr-adevăr, dacă derivăm relația $5x - x^5 + t^5 - 1 = 0$ în raport cu t avem: $5x'(t) - 5x^4(t)x'(t) + 5t^4 = 0$, ceea ce conduce exact la relația $x'(t) = \frac{t^4}{x^4(t)-1}$.

Definiție. Fie J un interval al axei reale, $g : D := J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și ecuația diferențială de ordinul 1

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in J. \quad (1.7)$$

Prin definiție, relațiile

$$\begin{cases} t = \psi(s), \\ x = \zeta(s), s \in I \end{cases} \quad (1.8)$$

(unde $\psi, \zeta \in C^1(I, \mathbb{R})$ sunt funcții cunoscute) definesc o soluție în formă parametrică a ecuației (1.7) pe intervalul $I \subseteq J$ dacă:

(a) $\psi'(s) \neq 0$, oricare ar fi $s \in I$ și $(\psi(s), \zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\psi'(s)}) \in D$ oricare ar fi $s \in I$;

(b) $g(\psi(s), \zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\psi'(s)}) = 0$, oricare ar fi $s \in I$.

Exemplu. Fie ecuația diferențială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$.
Relațiile

$$\begin{cases} t = s, \\ x = 2e^s, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

definesc o soluție în formă parametrică a ecuației date.

Definiție. Prin definiție, graficul unei soluții de ecuație diferențială se numește curbă integrală.

1.2 Probleme asociate unor ecuații diferențiale

În teoria ecuațiilor diferențiale și, mai ales, în aplicațiile în lumea reală ale acestora, câteva probleme asociate ecuațiilor se studiază.

A. Problema cu condiții inițiale (Problema lui Cauchy).

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție continuă pe D și sistemul de ecuații diferențiale de ordinul 1 dat de

$$X'(t) = f(t, X(t)). \quad (1.9)$$

Problema cu condiții inițiale asociată sistemului (1.9) constă în determinarea soluțiilor sistemului de mai sus se satisfac suplimentar condiția

$$X(t_0) = X^0, \quad (1.10)$$

unde valoarea $(t_0, X^0) \in D$ este cunoscută.

În acest caz, problema cu condiții inițiale este reprezentată prin

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases}$$

Observație. Fie o ecuație diferențială de ordinul n în forma normală Cauchy, de forma

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (1.11)$$

unde $G : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă dată.

Ecuația de mai sus este echivalentă cu un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1. Într-adevăr, notăm: $x_1 := x, x_2 := x', x_n := x^{(n-1)}$. Atunci (1.11) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \dots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = G(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (1.12)$$

Astfel, dacă notăm

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \dots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

și

$$X^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

folosind observația de mai sus, problema cu valori inițiale asociată ecuației (1.11) este:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \\ x(t_0) = x_1^0 \\ x'(t_0) = x_2^0 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \quad (1.13)$$

unde valoarea $(t_0, X^0) \in D$ (cu $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$) este dată.

Cometariu istoric. Jean le Rond D'Alembert observă în 1770 că orice ecuație diferențială de ordin superior se poate reduce în mod echivalent la un sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1.

B. Problema cu condiții pe frontieră (Probleme de tip Dirichlet/Neumann).

Fie o ecuație diferențială de ordinul 2 în forma normală Cauchy, de forma

$$x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), \quad (1.14)$$

unde $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă dată, iar $[a, b]$ este un interval nedegenarat al axei reale.

Printr-o problemă cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet asociată ecuației (1.14) înțelegem următoarea problemă

$$\begin{cases} x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), t \in [a, b] \\ x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta, \end{cases} \quad (1.15)$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt valori cunoscute.

Printr-o problemă cu condiții pe frontieră de tip Neumann asociată ecuației (1.14) înțelegem următoarea problemă

$$\begin{cases} x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), t \in [a, b] \\ x'(a) = \alpha \\ x'(b) = \beta, \end{cases} \quad (1.16)$$

Dacă ecuației (1.14) asociem condiții pe frontieră de tipul

$$\begin{cases} a_1x(a) + a_2x'(a) = \alpha \\ b_1x(b) + b_2x'(b) = \beta, \end{cases} \quad (1.17)$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt valori date, avem o problemă cu condiții pe frontieră de tip mixt.

1.3 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Fie ecuația diferențială $x'(t) = g(t), t \in I$ (unde $g \in C(I)$ iar $I \subset \mathbb{R}$ este un interval).

Se cere:

- să se scrie mulțimea soluțiilor ei;
- să se rezolve explicit în cazurile $g(t) = t \cos t, g(t) = t^2 \ln t, g(t) = \arcsin t, g(t) = \arctan t$, precizându-se de fiecare dată domeniul maxim.
- să se rezolve problema

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(1) = 1, \end{cases}$$

unde $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de relația

$$g(t) = \begin{cases} 2t - 1, & t \in [0, 1], \\ te^{t-1}, & t \in]1, 2]. \end{cases}$$

Soluție. a) $x(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ iar $t_0 \in I$ poate fi ales arbitrar.

b) exercițiu !

c) Deoarece g este continuă, ea admite primitive. Prin integrare pe ramuri, obținem

$$x(t) = \int g(t)dt = \begin{cases} t^2 - t + c_1, & t \in [0, 1], \\ (t - 1)e^{t-1} + c_2, & t \in]1, 2]. \end{cases}$$

Din condiția de continuitate asupra lui x rezultă $c_1 = c_2$. Deci soluția ecuației date este

$$x(t) = \begin{cases} t^2 - t + c, & t \in [0, 1], \\ (t - 1)e^{t-1} + c, & t \in]1, 2], \end{cases}$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă reală arbitrară. Se observă ca $x \in C^1([0, 2])$. Din condiția inițială $x(1) = 1$ rezultă $c = 1$. Concluzie: unica soluție pe intervalul $[0, 2]$ a problemei date este

$$x(t) = \begin{cases} t^2 - t + 1, & t \in [0, 1], \\ (t - 1)e^{t-1} + 1, & t \in]1, 2], \end{cases}$$

2) Fie ecuația diferențială

$$x'(t) = 2x(t), t \in [0, \infty[.$$

a) Dați exemple de soluții ale ecuației: soluție în formă explicită, soluție în formă implicită și soluție în formă parametrică.

b) Precizați o soluție a problemei cu valori inițiale formată din ecuația dată și condiția $x(0) = -1$.

Soluție. a) Se observă că funcția $x(t) = e^{2t}$ satisface ecuația dată. Mai mult, orice funcție de forma $x(t) = ce^{2t}$ (unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă

arbitrară) satisface ecuația. Aceasta reprezintă soluția explicită a ei. O soluție în formă implicită este, de exemplu,

$$\ln|x(t)| = 2t, t \in [0, \infty[.$$

De asemenea, pentru orice constantă arbitrară $c \in \mathbb{R}$, relațiile

$$\begin{cases} t = s, \\ x = ce^{2s}, s \in [0, \infty[\end{cases}$$

definesc o soluție în formă parametrică a ecuației date.

b) Dacă $x(t) = ce^{2t}$ este soluție a ecuației (cu orice constantă reală c), atunci din condiția $x(0) = -1$ deducem $c = -1$. Deci, soluția problemei lui Cauchy este $x(t) = -e^{2t}$. Să observăm că este unica soluție a problemei.

3) Fie problema cu valori inițiale (problema lui Cauchy)

$$\begin{cases} x'(t) = -2t, t \in \mathbb{R} \\ x(1) = \eta, \end{cases} \quad (1.18)$$

unde $\eta \in \mathbb{R}$ este dată. Precizați o soluție a acestei probleme.

Soluție. Integrând ecuația dată avem

$$x(t) = -t^2 + c, t \in \mathbb{R} \text{ (unde } c \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Din condiția inițială avem $c = \eta + 1$, deci unica soluție a problemei Cauchy date este $x(t) = -t^2 + \eta + 1, t \in \mathbb{R}$.

4) Fie ecuația diferențială $x''(t) = g(t), t \in I$ (unde $g \in C(I)$, iar $I \subset \mathbb{R}$ este un interval). Se cere să se scrie mulțimea soluțiilor ei.

Soluție. Integrând succesiv de două ori avem

$$x(t) = \int_{t_0}^t (t-s)g(s)ds + c_1t + c_2,$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ iar $t_0 \in I$ poate fi ales arbitrar.

Intr-adevăr, integrând o dată, avem

$$x'(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds + c_1.$$

Notăm $h(t) := \int_{t_0}^t g(s)ds + c_1$. Integrând acum ecuația $x'(t) = h(t)$ avem

$$x(t) = \int_{t_0}^t h(p)dp + c_2 = \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^p g(s)ds + c_1 \right) dp + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^p g(s)dsdp + c_1(t - t_0) + c_2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t v(s, p)dsdp + c_1(t - t_0) + c_2,$$

unde am notat

$$v(s, p) = \begin{cases} g(s), & s \leq p, \\ 0, & s > p. \end{cases}$$

Schimbând ordinea de integrare, avem

$$x(t) = \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t v(s, p)dp \right] ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s v(s, p)dp + \int_s^t v(s, p)dp \right] ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s 0dp + \int_s^t g(s)dp \right] ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^t \left(\int_s^t g(s)dp \right) ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^t g(s) \left(\int_s^t dp \right) ds + c_1(t - t_0) + c_2 = \int_{t_0}^t (t - s)g(s)ds + c_1(t - t_0) + c_2.$$

5) Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) = x(t), t \in [0, 1] \\ x(0) = 1, x(1) = \frac{2}{e} - e. \end{cases} \quad (1.19)$$

Precizați o soluție a a acestei probleme.

Soluție. Se observă că funcția $x_1(t) = e^t, t \in [0, 1]$ este soluție a ecuației. Mai mult, orice funcție de forma $x(t) = c_1 e^t, t \in [0, 1]$ (unde c_1 este o constantă reală arbitrară) este de asemenea soluție a ecuației. Ceea ce mai putem observa este că orice funcție de forma $x_2(t) = e^{-t}, t \in [0, 1]$ verifică ecuația, și mai mult, orice funcție de forma $x(t) = c_2 e^{-t}, t \in [0, 1]$ (unde c_2 este o constantă reală arbitrară) este, de asemenea, soluție a ecuației. Interesant este și faptul că și combinația liniară a celor două funcții x_1, x_2 este soluție a ecuației, i.e.

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, t \in [0, 1] \quad (c_1, c_2 \text{ sunt două constante reale arbitrare}).$$

Impunând cele două condiții pe frontiera domeniului problemei rezultă un sistem în necunoscutele c_1, c_2 care dă $c_1 = -1, c_2 = 2$. Deci, unica soluție a problemei este

$$x(t) = -e^t + 2e^{-t}, t \in [0, 1].$$

B. Exerciții propuse.

1) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

unde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de relația

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, & t \in [0, \infty[, \\ \ln(t^2 + 1), & t \in] - \infty, 0[. \end{cases}$$

2) Fie ecuația diferențială $x'(t) = -x(t), t \in \mathbb{R}$. Dați exemple de soluții ale ecuației: soluție în formă explicită, soluție în formă implicită și soluție în formă parametrică.

3) Fie problema cu valori inițiale (problema lui Cauchy)

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), t \in [0, \infty[\\ x(0) = \eta, \end{cases} \quad (1.20)$$

unde $\eta \in \mathbb{R}$ este dată. Precizați o soluție a acestei probleme.

4) Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) = \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Precizați o soluție a a acestei probleme.

1.4 Concluzii

În acest paragraf am prezentat câteva clase de ecuații și sisteme de ecuații diferențiale, precum și cele mai importante tipuri de probleme asociate lor. A fost definită noțiunea de soluție, în cele trei ipostaze în care ea poate să apară: soluție în formă explicită, soluție în formă implicită și soluție în formă parametrică. Prin exemple și exerciții, ”am ghicit” expresii ale soluțiilor, fără să avem (deocamdată) o metodă riguroasă și clară de rezolvare.

În ceea ce urmează ne va interesa:

- 1) metode de rezolvare efectivă a ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale (până la ordinul 2);
- 2) studiul existenței, unicității, aproximării și a dependenței continue de date pentru probleme asociate unor clase de ecuații diferențiale;
- 3) aspecte dinamice în teoria ecuațiilor diferențiale.

Capitolul 2

Ecuatii diferențiale rezolvabile efectiv

Prezentăm în continuare, pe scurt, câteva clase de ecuații diferențiale ordinare de ordinul 1 ce pot fi rezolvate efectiv. Vom indica metoda de rezolvare efectivă ce permite determinarea soluției într-una din formele deja prezentate: explicită, implicită sau parametrică. În fapt, rezolvarea efectivă a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații diferențiale este posibilă într-un număr relativ mic de cazuri.

La Congresul Internațional al Matematicienilor din 1908 de la Roma (pentru o istorie a acestor congrese internaționale se poate consulta <https://www.mathunion.org/icm/past-icms>), Henri Poincaré spunea că rezolvarea efectivă este posibilă "one time in one hundred" și îndemna matematicienii la trecerea spre studiul calitativ al teoriei ecuațiilor, ceea ce înseamnă: existența, unicitatea, aproximarea și dependența de date a soluției. Prin studiile sale Henri Poincaré a dat un impuls major teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale și, mai mult, este considerat creatorul teoriei sistemelor dinamice, domeniu al matematicii intrat începând cu anul 2000 în clasificarea subiectelor matematice propusă de American Mathematical Society (<https://www.ams.org/home/page>)

și European Mathematical Society (<https://euro-math-soc.eu/>), cele mai importante două societăți profesionale internaționale ale matematicienilor, alături desigur de International Mathematical Union (<https://www.mathunion.org/>). Pentru clasificarea subiectelor matematice (Mathematics Subject Classification (pe scurt MSC)) a se vedea <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html> sau <https://zbmath.org/classification/>.

2.1 Ecuații cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuații diferențiale cu variabile separabile este

$$x'(t) = g(t)h(x). \quad (2.1)$$

Presupunem:

- (i) g e o funcție continuă pe intervalul $]t_1, t_2[$ (unde $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ sunt acceptate);
- (ii) h e o funcție continuă pe intervalul $]x_1, x_2[$ (unde $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$ sunt acceptate).

Necunoscuta ecuației este $x = x(t), t \in I$ (unde $I \subseteq]t_1, t_2[$ este un interval al axei reale) și ea se caută în clasa de funcții C^1 .

Vom presupune, de asemenea, că $h(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in]x_1, x_2[$. În fapt, dacă $h(x) = 0$ pentru o funcție constantă $x(t) = \tilde{c}, t \in I$, atunci această funcție este soluție a ecuației (2.1).

\Rightarrow Fie $x = x(t), t \in I$ o soluție a ecuației (2.1). Atunci putem scrie ecuația dată astfel:

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$$

Integrând în raport cu t de la un punct $t_0 \in I$ fixat avem

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{h(x(s))} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds + c, c \in \mathbb{R}.$$

Facem schimbarea de variabilă $u = x(s)$ și atunci (deoarece $du = x'(s)ds$) avem

$$\int_{x_0(t)}^{x(t)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^t g(s)ds + c, c \in \mathbb{R}$$

sau, utilizând notația $x_0 := x(t_0)$, putem scrie mai simplu

$$\int_{x_0}^x \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^t g(s)ds + c, c \in \mathbb{R}.$$

Notăm cu $H(x) := \int_{x_0}^x \frac{du}{h(u)}$, $x \in]x_1, x_2[$ primitiva funcției $\frac{1}{h(u)}$ și putem observa că, în ipotezele făcute asupra lui h , avem că h păstrează semn constant pe $]x_1, x_2[$. Să presupunem că $h(x) > 0$, oricare ar fi $x \in]x_1, x_2[$. În mod evident, H este derivabilă cu derivata continuă și strict crescătoare pe $]x_1, x_2[$. În consecință, H admite inversă pe mulțimea $H(]x_1, x_2[)$, iar inversa ei, notată cu H^{-1} are aceleași proprietăți ca și H . Din ecuație, folosind notația cu H avem

$$H(x) = \int_{t_0}^t g(s)ds + c, c \in \mathbb{R},$$

formulă care dă soluția ecuației date în formă implicită.

În situația în care, din relația precedentă, putem exprima pe x avem

$$x(t) = H^{-1}\left(\int_{t_0}^t g(s)ds + c\right), t \in I \text{ (unde } c \in \mathbb{R}),$$

soluția explicită a ecuației date.

2.2 Ecuații omogene în sens Euler

Forma generală a unei ecuații diferențiale omogene în sensul lui Euler este

$$x'(t) = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad (2.2)$$

unde g este o funcție continuă pe un interval J , iar ecuația este considerată pe un interval ce nu include originea.

Pentru rezolvarea efectivă a ecuației se face schimbarea de variabilă $y := \frac{x}{t}$, prin care variabila dependentă a ecuației se schimbă din x în y .

Din schimbarea de variabilă $y := \frac{x}{t}$ deducem $x = ty$ și $x' = y + ty'$. Inlocuind în ecuația dată avem

$$y + ty' = g(y) \Leftrightarrow ty' = g(y) - y.$$

S-a obținut astfel o ecuație cu variabile separabile în $y = y(t)$. După rezolvarea ecuației în necunoscuta $y = y(t)$ (prin metoda indicată în paragraful anterior) se determină soluția ecuației inițiale sub forma $x(t) = ty(t)$.

2.3 Ecuații diferențiale liniare

Forma generală a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul 1 este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

unde p, q sunt funcții continue pe un interval I al axei reale.

Mulțimea tuturor soluțiilor ecuației notată cu \mathcal{S} are reprezentarea

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{x}\},$$

unde \mathcal{S}_0 este mulțimea soluțiilor ecuației omogene asociate (i.e., $x'(t) = p(t)x(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, în care recunoaștem o ecuație cu variabile separabile), iar \tilde{x} este o soluție (oarecare) a ecuației neomogene (2.3). Aceasta din urmă se poate determina prin metoda variației constantei, metodă cunoscută sub denumirea de metoda lui Lagrange. Astfel, dacă s-a determinat

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = ce^{\int_{t_0}^t p(s)ds} : c \in \mathbb{R}\}$$

(unde $t_0 \in I$), atunci $\tilde{x}(t)$ se caută sub forma

$$\tilde{x}(t) = \varphi(t)e^{\int_{t_0}^t p(s)ds},$$

unde φ este o funcție de clasă C^1 care se determină din condiția ca $\tilde{x}(t)$ să verifice ecuația (2.3).

Cometariu istoric. Rezolvarea ecuației diferențiale liniare de ordinul 1 este prezentată pentru prima dată de Sir Isaac Newton în 1687. În 1778, Joseph Lagrange redescoperă metoda variației constantei, iar în literatura de specialitate această metodă este deseori prezentată ca metoda lui Lagrange. Tot lui Lagrange i se atribuie următoarea afirmație (valabilă și astăzi): "I have always observed that the pretensions of all people are in exact inverse ratio to their merits; this is one of the axioms of morals".

2.4 Ecuații cu diferențială totală exactă

O ecuație diferențială de ordinul 1 de forma

$$g(t, x)x'(t) + h(t, x) = 0, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

unde g, h sunt funcții continue pe un domeniu $D \subseteq I \times \mathbb{R}$ din \mathbb{R}^2 (cu $g \neq 0$ pe D) se numește ecuație cu diferențială totală exactă dacă există o funcție $F \in C^1(D)$ astfel ca următoarele relații să aibă loc pe D :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = h \\ \frac{\partial F}{\partial x} = g. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ca o consecință, ecuația (2.4) se poate rescrie

$$dF(t, x) = 0$$

și astfel soluția în formă implicită a ecuației date este

$$F(t, x) = c, \quad t \in I \quad (\text{unde } c \in \mathbb{R}).$$

Determinarea lui F se poate face prin integrarea sistemului (2.5).

Observație. Verificarea faptului că o ecuație este cu diferențială totală exactă se poate face mai ușor folosind următoarea caracterizare.

Lemă. Fie g, h două funcții de clasă C^1 pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Atunci expresia $g(t, x)x'(t) + h(t, x)$ (sau echivalent $g(t, x)dx + h(t, x)dt$) este o diferențială totală exactă pe D dacă și numai dacă

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial h}{\partial x}(t, x), \text{ oricare ar fi } (t, x) \in D. \quad (2.6)$$

2.5 Ecuații Bernoulli

Forma generală a unei ecuații diferențiale de tip Bernoulli este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^\alpha(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

unde p, q sunt funcții continue pe un interval I , iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Pentru rezolvarea ei efectivă se face schimbarea de variabilă

$$y = x^{1-\alpha}$$

prin care se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$. După ce se rezolvă prin metoda indicată la secțiunea 2.3, se revine la determinarea expresiei lui $x = x(t)$ corespunzătoare din relația $y = x^{1-\alpha}$.

2.6 Ecuații Riccati

Forma generală a unei ecuații diferențiale de tip Riccati este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^2(t) + r(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

unde p, q, r sunt funcții continue pe un interval I .

În general, ecuațiile Riccati nu sunt rezolvabile efectiv. Totuși, dacă se știe o soluție (oarecare) a ecuației (să zicem $\tilde{x}(t) = \rho(t), t \in I$, atunci

prin schimbarea de variabilă

$$x = \rho + \frac{1}{y}$$

se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$. După ce se rezolvă prin metoda indicată la secțiunea 2.3, se revine la determinarea expresiei lui $x = x(t)$ corespunzătoare.

2.7 Ecuații Clairaut. Metoda parametrului

O ecuație Clairaut pe un interval I al axei reale are forma

$$x(t) = tx'(t) + g(x'(t)), t \in I, \quad (2.9)$$

unde $g \in C^1(J)$, $J \subseteq \mathbb{R}$.

Dacă $x = x(t)$ este soluție a ecuației, atunci prin derivarea membru cu membru a ecuației deducem

$$x''(t + g'(x')) = 0,$$

ceea ce arată că avem două variante:

1) $x'' = 0$, ceea ce implică $x'(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$ și apoi, din ecuația Clairaut (2.9), deducem

$$x(t) = ct + g(c), c \in \mathbb{R}.$$

2) $t + g'(x') = 0$, caz în care, notând $x' = p$, $p \in \mathbb{R}$ și folosind din nou forma ecuației Clairaut (2.9), implică următoarea reprezentare a soluției (în formă parametrică, depinzând de parametrul real p)

$$\begin{cases} t = -g'(p), \\ x = -pg'(p) + g(p), p \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Reciproc, orice funcție de forma $x(t) = ct + g(c)$, $c \in \mathbb{R}$ și funcția dată de (2.10) sunt soluțiile ecuației date. Prima familie se numește soluția generală a ecuației Clairaut, iar a doua este soluția singulară ecuației (2.9). În general, funcția (2.10) este înfășurătoarea familiei de drepte definite relația $x(t) = ct + g(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

2.8 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Să se rezolve ecuația $x'(t) = -2tx(t), t \in \mathbb{R}$.

Soluție. Este o ecuație cu variabile separabile. Avem $g(t) = -2t, t \in \mathbb{R}, h(x) = x$.

Presupunând $h(x) = 0$ obținem soluția constantă $x = 0$. Atunci funcția $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației date.

Să presupunem acum că $x \neq 0$. Atunci ecuația dată (este o ecuație cu variabile separabile) poate fi scrisă, prin separarea variabilelor, astfel

$$\frac{1}{x}dx = -2tdt.$$

Integrând avem

$$\ln|x| = -t^2 + c, \text{ pentru } c \in \mathbb{R}.$$

Am obținut astfel soluția în formă implicită. De aici putem deduce imediat că

$$|x(t)| = e^{-t^2+c},$$

sau, după ce notăm $c_1 := e^c$, putem scrie

$$|x(t)| = c_1 e^{-t^2}, \quad c_1 > 0.$$

Explicitând avem

$$x(t) = +/- c_1 e^{-t^2}, \quad c_1 > 0.$$

Notând $c := +/- c_1$, obținem

$$x(t) = ce^{-t^2}, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

Putem include soluția constantă $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ în reprezentarea noastră dând voie constantei c să ia și valoarea 0. În concluzie, funcția

$$x(t) = ce^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ (pentru orice constantă } c \in \mathbb{R})$$

este soluția generală a ecuației date.

2) Să se rezolve problema cu valori inițiale formată din ecuația diferențială $x'(t) = 2t(1+x^2(t))$, $t \in \mathbb{R}$ și condiția de tip Cauchy $x(0) = 1$.

Soluție. Este o ecuație cu variabile separabile. În acest caz $g(t) = 2t$ iar $h(x) = 1 + x^2$, ambele definite pe \mathbb{R} și cu proprietatea că $h(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

După separarea variabilelor, avem

$$\frac{1}{1+x^2} dx = 2t dt.$$

Integrând avem

$$\arctan x = t^2 + c,$$

unde c este o constantă reală. Din condiția Cauchy $x(0) = 1$ obținem $c = \frac{\pi}{4}$. Soluția în formă implicită este

$$\arctan x = t^2 + \frac{\pi}{4}, t \in I,$$

unde I este caracterizat de faptul că $t^2 + \frac{\pi}{4} \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Rezolvând acest sistem de inecuații avem $t \in] - \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}[$. În final, conchidem că

$$x(t) = \operatorname{tg} \left(t^2 + \frac{\pi}{4} \right), t \in] - \infty, \frac{\sqrt{\pi}}{2}[$$

este unica soluție a ecuației. Observați că soluția "explodează" în timp finit, căci

$$\lim_{t \nearrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}} x(t) = \infty.$$

3) Să se rezolve problema cu valori inițiale formată din ecuația diferențială

$$t^2 x'(t) = tx(t) - 2x^2(t), t \in] - \infty, 0[$$

și condiția de tip Cauchy $x(-1) = 1$.

Soluție. Recunoaștem o ecuație omogenă în sensul lui Euler cu $g\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} - 2\left(\frac{x}{t}\right)^2$. Facem schimbarea de variabilă $y := \frac{x}{t}$ și deducem $x = ty$ și $x' = y + ty'$. Înlocuind, avem

$$y + ty' = y - 2y^2 \text{ sau echivalent } ty' = -2y^2.$$

Să rezolvăm această ecuație cu variabile separabile. Observăm că funcția $y(t) = 0, t \in] - \infty, 0[$ verifică ecuația. Aceasta generează soluția ecuației inițiale $x(t) = 0, t \in] - \infty, 0[$. Având în vedere condiția lui Cauchy $x(-1) = 1$, constatăm că această soluție a ecuației nu generează o soluție a problemei cu valori inițiale date. Căutăm soluții nebanale ale ecuației cu variabile separabile $ty' = -2y^2$. După separarea variabilelor obținem

$$y^{-2}dy = -\frac{2}{t}dt$$

iar prin integrare avem

$$\frac{1}{y} = 2 \ln(-t) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Din $x(-1) = 1$ deducem $y(-1) = -1$, ceea ce permite determinarea constantei c de mai sus. Rezultă $c = -1$. Astfel, soluția explicită a problemei în necunoscuta y este $y(t) = \frac{1}{2 \ln(-t) - 1}$ iar a problemei inițiale

$$x(t) = \frac{t}{2 \ln(-t) - 1}.$$

Deoarece expresia anterioară trebuie să fie bine definită, rezultă că soluția problemei Cauchy date (ținând cont că $\sqrt{e} = 1.6487212707\dots$) este

$$x(t) = \frac{t}{2 \ln(-t) - 1}, t \in] - \sqrt{e}, 0[.$$

(De ce ? Căci $-1 \in] - \sqrt{e}, 0[$.)

4) Să se rezolve ecuația $x'(t) \cos t - x(t) \sin t = 2t, t \in I :=] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ cu condiția adițională $x(0) = 1$.

Soluție. Avem de a face cu o ecuație liniară. Rezolvăm problema în 2 etape.

I. Găsim mulțimea \mathcal{S}_0 a soluțiilor ecuației omogene asociate: $x'(t) \cos t - x(t) \sin t = 0$. Să notăm că $x(t) = 0, t \in I$ este soluție. Pentru funcții neidentice nule, separând variabilele avem

$$\frac{1}{x} dx = \tan t.$$

Integrând avem

$$\ln |x(t)| = -\ln(\cos t) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Explicitând obținem soluția generală $x(t) = \frac{c}{\cos t}, t \in I$ ($c \in \mathbb{R}$), familie de funcții ce înglobează și soluția nulă pusă inițial în evidență. Deci

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \frac{c}{\cos t}, t \in I : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

II. Găsim \tilde{x} , o soluție oarecare a ecuației neomogene $x'(t) \cos t - x(t) \sin t = 2t$. Caut $\tilde{x}(t) = \frac{\varphi(t)}{\cos t}$, unde φ este o funcție de clasă C^1 , deocamdată necunoscută. Cerem ca \tilde{x} să verifice ecuația neomogenă și avem

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(t) \cos t + \varphi(t) \sin t}{\cos^2 t} \cos t - \frac{\varphi(t)}{\cos t} \sin t &= 2t \Leftrightarrow \\ \varphi'(t) &= 2t \Leftrightarrow \varphi(t) = t^2. \end{aligned}$$

In consecință, avem $\tilde{x}(t) = \frac{2t}{\cos t}$

Concluzia este că mulțimea tuturor soluțiilor ecuației date este

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{c}{\cos t} + \frac{2t}{\cos t}, t \in I : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Din condiția inițială $x(0) = 1$ găsim $c = 1$ și astfel unica soluție pentru problema Cauchy dată este

$$x^*(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{2t}{\cos t} = \frac{2t+1}{\cos t}, t \in I.$$

B. Exerciții propuse.

- 1) Să se rezolve ecuația $x'(t) = 3t^2 x^3(t), t \in \mathbb{R}$.
- 2) Să se rezolve ecuația diferențială $t^2 x'(t) = -2tx(t) + x^2(t), t \in]0, \infty[$.
- 3) Dintre soluțiile ecuației

$$t^2 x'(t) \cos(x(t)) = -2, t > 0$$

26 CAPITOLUL 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE REZOLVABILE EFECTIV

aflați-le pe acelea care au proprietatea $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\pi}{6}$. Să se precizeze și domeniul maxim de definiție al soluției.

4) Să se rezolve problema cu valori inițiale formată din ecuația diferențială $x'(t) = (x(t) + t)^3 + 1, t \in \mathbb{R}$ și condiția de tip Cauchy $x(0) = -1$.

5) Să se rezolve ecuația $x'(t) - x(t) \sin t = -2 \sin t, t \in \mathbb{R}$.

Capitolul 3

Modele guvernate de ecuații diferențiale

3.1 Proces de modelare matematică

Câteva definiții:

1) "Mathematical modeling is the art of translating problems from an application area into tractable mathematical formulations whose theoretical and numerical analysis provides insight, answers, and guidance useful for the originating application." *Arnold Neumaier*, <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/papers.html#model>

2) "A mathematical model is a description of a system using mathematical concepts and language. The process of developing a mathematical model is termed mathematical modeling. Mathematical models are used in the natural sciences (such as physics, biology, earth science, chemistry) and engineering disciplines (such as computer science, electrical engineering), as well as in the social sciences (such as economics, psychology, sociology, political science). A model may help to explain a system and to study the effects of different components, and to make predictions about behaviour." *Wikipedia*

3) "What is mathematical modelling ?

Models describe our beliefs about how the world functions. In mathematical modelling, we translate those beliefs into the language of mathematics. This has many advantages:

1. Mathematics is a very precise language. This helps us to formulate ideas and identify underlying assumptions.

2. Mathematics is a concise language, with well-defined rules for manipulations.

3. All the results that mathematicians have proved over hundreds of years are at our disposal.

4. Computers can be used to perform numerical calculations.

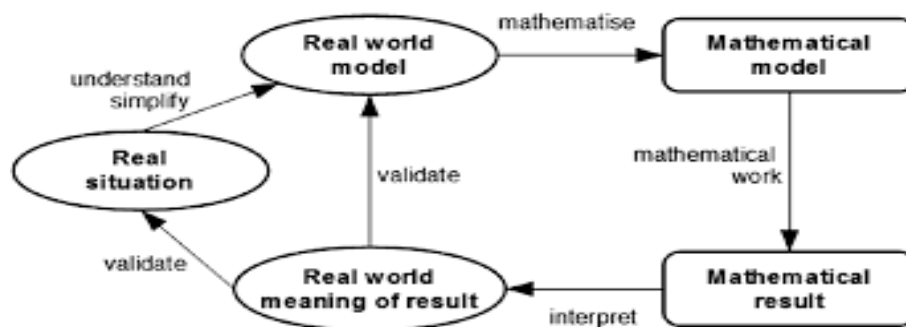
There is a large element of compromise in mathematical modelling. The majority of interacting systems in the real world are far too complicated to model in their entirety. Hence the first level of compromise is to identify the most important parts of the system. These will be included in the model, the rest will be excluded. The second level of compromise concerns the amount of mathematical manipulation which is worthwhile. Although mathematics has the potential to prove general results, these results depend critically on the form of equations used. Small changes in the structure of equations may require enormous changes in the mathematical methods. Using computers to handle the model equations may never lead to elegant results, but it is much more robust against alterations." *Glenn Marion, An Introduction to Mathematical Modelling*, https://people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf

4) "Mathematical modelling is the activity by which a problem involving the real-world is translated into mathematics to form a model which can then be used to provide information about the original real problem." *Huw Fox, Bill Bolton*, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780750655446500047>

5) "... a model is a conceptual or mathematical representation

of a system that serves to understand and quantify it. The difference between conceptual and mathematical resides only on the way the representation is formulated. A model is always a simplified representation of the reference system, which the scientist wishes to understand and quantify.” *Nestor V. Torres, Guido Santos*, <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fgene.2015.00354/full>

O figură reprezentând etapele procesului de modelare matematică este



preluată din lucrarea: *G. Kaiser, P. Stender*, Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In *G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, J. Brown* (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 277-293), Springer, 2013.

A se vedea și lucrarea: *K. Vorhölter, G. Greefrath, R. Borromeo Ferri, D. Leiss, S. Schukajlow*, *Mathematical Modelling*. In: *Jahnke H., Hefendehl-Hebeker L.* (eds), *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham, 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_4, pentru o sinteză privind învățarea modelării matematice în sistemul german de educație.

În concluzie: ”A theory has only the alternative of being right or wrong. A model has a third possibility: it may be right, but irrelevant.” *Manfred Eigen*, *The Origins of Biological Information*, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-94-010-2602-4_30

3.2 Derivata

În modelarea matematică, derivata are un rol esențial. Astfel:

1) În Fizică, dacă $x = x(t)$ reprezintă poziția unui punct material la momentul t , atunci $x'(t)$ reprezintă viteza, iar $x''(t)$ accelerația acestuia la momentul t .

2) În Economie, dacă $c = c(x)$ reprezintă funcția cost (costul necesar producerii a x itemi), atunci $c'(x)$ reprezintă costul marginal, adică cu cât crește costul de producție la creșterea cu o unitate a producției. La fel, dacă $p = p(x)$ reprezintă funcția profit, atunci $p'(x)$ este profitul marginal.

3) În Biologie, dacă $p = p(t)$ reprezintă populația unei specii la momentul t , atunci $p'(t)$ este viteza (rata) de creșterea populației.

4) În Inginerie, dacă $x = x(t)$ reprezintă sarcina electrică la momentul t , atunci $x'(t)$ este curentul electric corespunzător.

5) În Matematică, dacă $(t, x(t))$ reprezintă poziția unui punct pe graficul funcției $x = x(t)$, atunci $x'(t)$ este panta tangentei la graficul funcției în acel punct.

3.3 Modele din chimie, biologie și medicină

1. Dezintegrarea radioactivă.

Din experiențele efectuate se constată că radioactivitatea este direct proporțională cu cantitatea de substanță radioactivă. Mai exact, la momentul de timp t , viteza de dezintegrare $x'(t)$ a unei substanțe radioactive este invers proporțională cu cantitatea de substanță radioactivă $x(t)$. Modelul matematic al dezintegrării radioactive a unei substanțe radioactive date este dat de ecuația

$$x'(t) = -\alpha x(t), t \in [t_0, \infty[,$$

unde $\alpha > 0$ este factorul de proporționalitate depinzând de natura mate-

rialului radioactiv, iar $t_0 \geq 0$ este momentul inițial de la care se studiază (începe) procesul de dezintegrare. Cum, de regulă, se cunoaște cantitatea inițială de substanță, mai avem informația că

$$x(t_0) = x^0,$$

unde x^0 este cantitatea de substanță radioactivă ce se supune dezintegrării. Astfel, modelul matematic al procesului de dezintegrare radioactivă este definit de următoare problemă cu condiție inițială (problema lui Cauchy):

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t), t \in [t_0, \infty[\\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Soluția problemei lui Cauchy de mai sus este

$$x(t) = x^0 e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0,$$

soluție care arată cantitatea de substanță radioactivă existentă la fiecare moment at reacției.

Deseori, în chimie, este importantă determinarea, pentru o anumită substanță, a factorului de proporționalitate α , factor esențial în rezolvarea modelului. Acest lucru se poate face, dacă se cunoaște cantitatea de substanță nedeintegrată la două momente de timp distincte. Să presupunem că la momentul t_0 avem cantitatea de substanță radioactivă x^0 iar la momentul t_1 avem cantitatea x^1 . Atunci, folosind expresia $x(t) = x^0 e^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \geq t_0$ pentru $t = t_1$ găsim

$$x^1 = x(t_1) = x^0 e^{-\alpha(t_1-t_0)}$$

de unde prin logaritmare se obține

$$\alpha = -\frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{x^1}{x^0}.$$

Un alt element important în chimie este timpul de înjumătățire al unei substanțe radioactive. Acesta este timpul în care cantitatea de substanță

radioactivă se reduce la jumătate. Să-l notăm pe acesta cu t_{jum} . Atunci avem condiția

$$x(t_0 + t_{jum}) = \frac{x^0}{2}.$$

Folosind expresia $x(t) = x^0 e^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \geq t_0$ obținem

$$\frac{x^0}{2} = x(t_0 + t_{jum}) = x^0 e^{-\alpha t_{jum}},$$

relație care ne permite să deducem că, pentru o substanță radioactivă dată, timpul de înjumătățire este

$$t_{jum} = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

2. Modele de evoluție a populației/populațiilor.

2A. Modele de evoluție pentru o specie

Să considerăm o specie ce trăiește izolată pe un teritoriu dat, fără imigrări sau emigrări. Fie $p(t)$ numărul de indivizi din această populație la momentul t . Atunci, viteza de creștere $p'(t)$ a acestei populații este egală cu $d(t, p)$, simbol ce notează diferența dintre rata natalității și rata mortalității. Mai exact

$$d(t, p) = n(t, p) - m(t, p),$$

adică diferența dintre numărul de indivizi care se nasc și numărul de indivizi care mor în intervalul de timp $[t, t + 1]$. Deci, avem

$$p'(t) = d(t, p).$$

Cel mai simplu model de evoluție al unei populații a fost propus de Malthus (1826 - "Essay on the Principles of Population") și el presupune că nașterile și decesele sunt direct proporționale cu numărul de indivizi din specia respectivă, adică

$$n(t, p) = \alpha p(t), \quad m(t, p) = \beta p(t),$$

unde $\alpha > 0$, respectiv $\beta > 0$ reprezintă rata nașterii per capita, respectiv rata mortalității per capita. Atunci avem

$$d(t, p) = (\alpha - \beta)p(t),$$

iar $k := \alpha - \beta$ este rata de creștere per capita. Presupunem $k > 0$. În concluzie, modelul lui Malthus de creștere a populației este

$$p'(t) = kp(t), t \in [t_0, \infty[.$$

Dacă este cunoscut numărul de indivizi din populație la momentul inițial t_0 (să spunem că acesta este $p^0 > 0$), atunci avem o problemă cu condiție inițială, de forma

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t), t \in [t_0, \infty[\\ p(t_0) = p^0, \end{cases} \quad (3.2)$$

cu soluția unică dată de expresia

$$p(t) = p^0 e^{k(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Să observăm că din formula de mai sus rezultă că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty,$$

ceea ce nu corespunde realității cunoscute. De fapt, din analiza datelor pentru diverse populații (sau țări) se constată că modelul lui Malthus este rezonabil și oferă o estimare corectă asupra evoluției unei specii pe un interval scurt (mărginit) de timp, dar nu și pe termen lung.

Un model mai evoluat, modelând mai corect evoluția unei specii este cel prezentat de Verhulst în 1838. Pornind de la observația anterioară (anume că modelul lui Malthus nu oferă o prognoză corectă pe termen lung), Verhulst a modificat ecuația lui Malthus, introducând un termen ce ia în considerare efectul inhibitor al densității speciei respective în

spațiul pe care-l ocupă. Astfel, modelul lui Verhust este dat de problema lui Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t) \left(1 - \frac{p(t)}{L}\right), t \in [t_0, \infty[\\ p(t_0) = p^0, \end{cases} \quad (3.3)$$

unde $k > 0$ este (ca și mai sus) rata de creștere per capita, $L > 0$ este constanta de suport relativ la mediul înconjurător (nr maxim de indivizi pe care mediul respectiv îi suportă), iar $p^0 > 0$ este numărul inițial de indivizi din specie (la momentul inițial t_0). Soluția unică a acestei probleme este dată de expresia

$$p(t) = \frac{Lp^0}{p^0 + (L - p^0)e^{-k(t-t_0)}}, t \geq t_0.$$

Să notăm că termenul $\frac{kp^2(t)}{L}$ din ecuația de mai sus este cel care ține cont de efectul inhibitor al aglomerării. Observăm că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = L,$$

ceea ce justifică denumirea pentru L . Ecuația de mai sus (care modelează și alte fenomene ale lumii reale) se mai numește ecuația logistică.

Să mai remarcăm că ecuația logistică are două soluții echilibru, și anume $x(t) = 0$ și $x(t) = L$, $t \geq t_0$.

Observație. Verhust a prognozat, pe baza datelor din vremea sa, că populația Belgiei va fi în anul 2000 de 9,4 milioane locuitori. În realitate, populația Belgiei a fost de 11,3 milioane locuitori, dar să ne amintim despre restricțiile modelului, anume că avem o populație izolată pe un teritoriu fixat, ceea ce nu corespunde realităților ultimului secol.

În finalul acestei părți, să amintim și de modelul lui Verhulst cu recoltare, definit de ecuația

$$p'(t) = kp(t) \left(1 - \frac{p(t)}{L}\right) - h(p(t)), t \in [t_0, \infty[\quad (3.4)$$

unde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție dată, indicând valoarea recoltării de indivizi din populație la momentul de timp t . În funcție de expresia lui h se pot analiza diverse evoluții.

2B. Modele de evoluție pentru două specii

În cazul în care presupunem că avem două specii (pradă $p = p(t)$ și răpitor $r = r(t)$) care împart același teritoriu și în care nu există intrări sau ieșiri. Să mai presupunem că specia p se hrănește cu resursele mediului, iar indivizii din specia r se hrănesc cu indivizi ai speciei p . Atunci, evoluția unui astfel de binom de specii se poate realiza după modelul Lotka-Volterra, definit astfel

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - bp(t)r(t), \\ r'(t) = -cr(t) + dp(t)r(t), t \in [t_0, \infty[, \end{cases} \quad (3.5)$$

unde $a, b, c, d > 0$ sunt constante pozitive date, iar semnificația expresiei $p(t)r(t)$ este numărul de contacte dintre prada și răpitor.

Recunoaștem mai sus un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întâi neliniare, având ca soluții echilibru perechile de funcții constante $(0, 0)$ și $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$. Sistemul de mai sus se mai numește și sistemul pradă-răpitor și el nu poate fi integrat (rezolvat) explicit.

3. Modele din medicină.

3A. Modelul lui Gompertz-Laird

În medicină este considerată următoarea ecuație diferențială ce modelează creșterea tumorilor canceroase

$$x'(t) = ke^{-\alpha t}x(t), t \in [t_0, \infty[,$$

unde $k, \alpha > 0$. Acest model este construit pe ipoteza că există o autolimitare a dezvoltării tumorii (datorită condițiilor în care aceasta se dezvoltă) și că rata dezvoltării tumorii descrește exponențial în timp. În ecuația de mai sus $x(t)$ notează mărimea tumorii la momentul t . Dacă se cunoaște mărimea tumorii la începutul studiului $x(0) = x^0$, atunci soluția problemei Cauchy aferente este

$$x(t) = x^0 e^{\frac{k}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}.$$

Observăm că evoluția mărimii tumorii este limitată, căci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^0 e^{\frac{k}{\alpha}},$$

expresie ce depinde nu numai de coeficienții k și α , dar și de condiția inițială din model.

Un model mai evoluat a fost propus de Laird și el este descris de ecuația diferențială

$$x'(t) = \alpha \ln \left(\frac{K}{x(t)} \right) x(t), t \geq 0,$$

la care se adaugă condiția inițială $x(0) = x^0$. În acest model, $\alpha > 0$ este o constantă pozitivă determinată de capacitatea de proliferare a celulelor canceroase, iar $K > 0$ este mărimea maximă pe care tumoarea o poate atinge. Soluția ecuației este dată de expresia

$$x(t) = K e^{\ln\left(\frac{x^0}{K}\right)e^{-\alpha t}},$$

pentru care observăm din nou fenomenul de autolimitare

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K.$$

Comentariu istoric. Pentru alte realizări ale lui B. Gompertz și dezvoltări ulterioare, precum și informații istorice se poate vedea <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstb.2014.0379>.

3B. Modelul Kermac și McKendric

Modelul Kermac-McKendric este un model clasic (1927) de propagare a epidemiilor, el fiind ulterior dezvoltat în variate direcții de alți matematicieni.

Să considerăm o populație izolată formată din T indivizi și o infecție care se răspândește prin contact direct (de exemplu SARS-COV-2,...). SE presupune că indivizii infectați vor fi, fie izolați, fie devin imuni prin vindecare (model optimist: infecția nu e letală ...). În consecință, populația este compusă la momentul t din trei categorii:

$N(t)$ - indivizi neinfecțați (dar susceptibili la infectare);

$B(t)$ - indivizi infecțați (bolnavi) care se mișcă liber;

$I(t)$ - indivizi izolați.

În cadrul modelului se presupune că viteza de infectare $-N'(t)$ este direct proporțională cu expresia $N(t) \cdot B(t)$, reprezentând numărul contactelor dintre indivizii neinfecțați și cei infecțați și că indivizii infecțați devin izolați cu o viteză proporțională cu numărul $B(t)$ al lor. În aceste condiții sistemul

$$\begin{cases} N'(t) = -\beta N(t)B(t) \\ B'(t) = \beta N(t)B(t) - \gamma B(t), t \in [t_0, \infty[\\ N(t) + B(t) + I(t) = T, \end{cases} \quad (3.6)$$

la care se aduagă condițiile inițiale $N(0) = N^0, B(0) = B^0$, modelează evoluția infecției în cadrul acestei populații.

Un model mai complex este modelul SIR, în care se presupune, de asemenea, existența unei epidemii, în care populația este divizată în următoarele trei clase de indivizi:

$S = S(t)$ - numărul de indivizi susceptibili a se îmbolnăvi, dar care nu s-au îmbolnăvit

$I = I(t)$ - numărul de indivizi infecțați

$R = R(t)$ - numărul de indivizi vindecați și care au căpătat astfel imunizare.

Modelul matematic este descris de sistemul

$$\begin{cases} S'(t) = -\frac{\beta}{N}S(t)I(t), \\ I'(t) = \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \\ S(t) + I(t) + R(t) = N, t \in [t_0, \infty[. \end{cases} \quad (3.7)$$

În sistemul de mai sus, coeficienții $\beta, \gamma > 0$ semnifică:

β este rata efectivă de contact a infecției: un individ infectat intră în contact cu βN alți indivizi în unitatea de timp, dintre care fracția de

indivizi susceptibili să contracteze boala este $\frac{S(t)}{N}$,
 γ este rata medie de vindecare: $\frac{1}{\gamma}$ este media perioadelor de timp în care un individ infectat se vindecă.

3.4 Modele din fizică

A. Legea transferului termic a lui Isaac Newton.

Dacă considerăm un corp cu temperatura uniformă T_0 pe care îl așezăm la momentul t_0 într-un mediu exterior de temperatură constantă T_e , atunci:

- dacă $T_e < T_0$, atunci corpul se răcește
- dacă $T_e > T_0$, atunci corpul se încălzește.

Legea lui Newton a transferului termic, stabilită prin experimente, stipulează că rata schimbării de temperatură este proporțională cu diferența de temperatură dintre corp și mediul în care acesta a fost plasat. Într-adevăr, dacă $T(t)$ notează temperatura corpului la momentul t , avem:

- dacă $T - T_e > 0$, atunci $T \searrow T_e$ și astfel trebuie ca $T' < 0$;
- dacă $T - T_e < 0$, atunci $T \nearrow T_e$ și astfel trebuie ca $T' > 0$.

Această lege se scrie matematic în următoarea ecuație diferențială de ordinul 1

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - T_e), t \geq t_0$$

unde $\alpha > 0$ este coeficientul de transfer termic. Acest coeficient depinde de proprietățile termice ale corpului și se determină experimental. Cum se cunoaște temperatura corpului la momentul inițial (căci $x(t_0) = T_0$), rezolvarea problemei lui Cauchy astfel obținute conduce la soluția unică

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Observăm că $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_e$, ceea ce înseamnă că pe perioada mai lungi de timp temperatura corpului se apropie de temperatura mediului în care a fost plasat.

B. Legea a doua a mișcării a lui Isaac Newton.

Se consideră un punct material de masă $m > 0$ ce se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe F ce depinde de timp, poziția punctului material și viteza acestuia. Modelul matematic al deplasării acestuia este dat de legea a doua a lui I. Newton: "variația cantității de mișcare este proporțională cu forța activă aplicată și are loc în direcția drepte de-a lungul căreia acționează forța". Adică avem $m \vec{a} = \vec{F}$ sau echivalent, dacă notăm cu $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vectorul de poziție al punctului material, avem $m \vec{r}'' = \vec{F}$. Proiectând pe axa Ox , obținem $mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$ cu condițiile inițiale $x(t_0) = x^0, x'(t_0) = v^0$. Avem astfel de-a face cu o problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială de ordinul doi:

$$\begin{cases} mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)), t \in I \\ x(t_0) = x^0, x'(t_0) = v^0, t_0 \in I. \end{cases} \quad (3.8)$$

Dacă, de exemplu, F este forța gravitațională (adică $F = -mg$, unde g este accelerația gravitațională), atunci problema de mai sus, considerată de la momentul inițial $t_0 = 0$, se scrie

$$\begin{cases} mx''(t) = -mg, t \geq 0 \\ x(0) = x^0, x'(0) = v^0, t_0 \in [0, \infty[. \end{cases} \quad (3.9)$$

Soluția ecuației este $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2, t \geq 0$ iar soluția problemei lui Cauchy de mai sus este $x^*(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v^0t + x^0$.

Un alt caz particular interesant apare dacă considerăm modelul oscilațiilor libere ale pendulului matematic. Să notăm cu $\theta = \theta(t)$ unghiul făcut de pendul cu axa verticală $O'O$ la momentul t . Atunci modelul presupune că avem un pendul de masă $m > 0$ cu brațul rigid de lungime $l > 0$ ce se mișcă în plan vertical. Ecuația mișcării (dedusă de mai sus, ținând cont că pentru componenta activă a forței gravitaționale (\vec{G}_t în figura de mai jos, vezi <https://math.wikia.org/ro/wiki/Pendul>) ce acționează asupra pendulului este $mg \sin \theta(t)$ (g este accelerația gravitațională), iar lungimea arcului de cerc corespunzător poziției $\theta(t)$ a brațului pendulului

este $s(t) = l\theta(t)$, obținem ecuația diferențială

$$m(l\theta(t))'' = -mgsin\theta(t), t \in I = [0, \infty[,$$

la care se adaugă condițiile inițiale $\theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = v^0$. Obținem problema lui Cauchy

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0, t \in I \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = v^0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Este interesant de observat că în cazul amplitudinilor mici ale pendulului, putem aproxima $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$, ceea ce conduce la problema lui Cauchy rezolvabilă efectiv

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0, t \in I \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = v^0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Vom vedea mai târziu că soluția problemei de mai sus este o funcție periodică de forma

$$\theta(t) = x^0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{v^0 l}{g} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

Perioada de oscilație a pendulului gravitațional este $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

□plain]

3.5 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Geometrie: Ecuația diferențială a unei familii de curbe.

În sistemul xOy fie familia de curbe plane

$$y = g(x, c), x \in I,$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este un parametru. Găsiți ecuația diferențială a acestei familii de curbe și ecuația diferențială a familiei de curbe ortogonale la familia

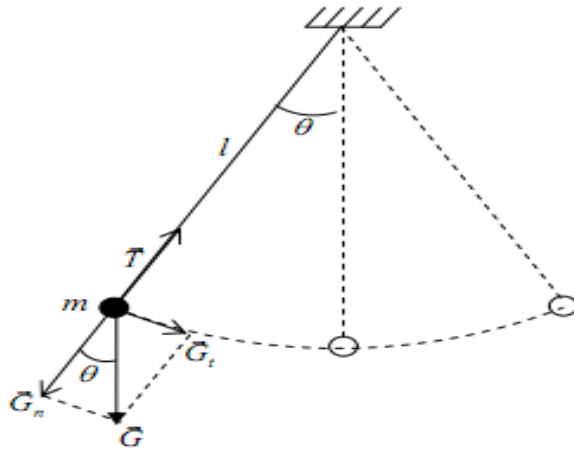


Fig. 1.

dată (trajectorii ortogonale = curbe care se intersectează cu cele din familia dată sub un unghi drept).

Soluție. Dacă derivăm relația $y = g(x, c)$ în raport cu x avem

$$y'(x) = g'(x, c).$$

Eliminând parametrul c între cele două relații obținem o relație de forma

$$F(x, y, y') = 0,$$

ceea ce reprezintă ecuația diferențială a familiei date. Ecuația diferențială a familiei de curbe ortogonale se obține din ecuația diferențială a familiei date prin înlocuirea lui y' cu $-\frac{1}{y'}$, adică are forma

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0.$$

Observație. Dacă familia de curbe plane nu este dată printr-o ecuație explicită în raport cu y , de exemplu de forma $h(x, y, c) = 0$, atunci ecuația diferențială a familiei de curbe date se obține prin derivarea, în raport

cu x a relației de mai sus (în care se va considera $y = y(x)$) și eliminarea parametrului c între cele două relații.

Exemplu. Să se determine ecuația diferențială a familiei de curbe plane $x^2 + y^2 = c$, $c > 0$ (familii de cercuri).

Soluție. Prin derivare în raport cu x avem $2x + 2yy' = 0$. Cum c nu mai apare, ecuația diferențială a familiei de cercuri este $x + yy' = 0$. Ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale este $x - \frac{y}{y'} = 0$. Rezolvând-o ca o ecuație cu variabile separabile, avem familia de drepte $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$.

2) **Biologie/Medicină: evoluția tumorilor.** Viteza de creștere a unei tumori sferice este direct proporțională cu volumul ei. În momentul descoperirii ei, tumora avea un volum de 1 cm^3 . Să se afle volumul și raza tumorii după o lună (o lună = 30 de zile) de la descoperirea ei, știind că volumul tumorii după 10 zile de la momentul identificării ei este de e^2 ori mai mare decât cea inițială.

Soluție. Fie $V = V(t)$ volumul tumorii la momentul $t \geq 0$. Ecuația diferențială ce modelează procesul este

$$V'(t) = \alpha V(t), t \geq 0 \text{ cu condiția inițială } V(0) = V^0,$$

unde α este factorul de proporționalitate aferent procesului. Se dă, de asemenea, $V^0 = 1$. Rezolvând ecuația cu variabile separabile și problema lui Cauchy asociată avem

$$V(t) = V^0 e^{\alpha t}, t \geq 0.$$

Din condiția $V(10) = e^2 V^0$ deducem $\alpha = \frac{1}{5}$, deci procesul e modelat de funcția

$$V(t) = V^0 e^{\frac{1}{5}t} = e^{\frac{1}{5}t}, t \geq 0.$$

Deoarece volumul tumorii sferice în funcție de raza tumorii este data de expresia

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t),$$

ținând cont că $V^0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, avem

$$V^0 e^{\frac{1}{5}t} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 e^{\frac{1}{5}t} = \frac{4}{3}\pi R^3(t),$$

de unde deducem legea de creștere a razei ca fiind

$$R(t) = R_0 e^{\frac{1}{15}t}.$$

Ținând cont că $V^0 = 1$ rezultă că $R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ și deducem că după o lună de la descoperirea ei avem

$$V(30) = e^6, \quad R(30) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} e^2.$$

3) Arheologie, Biomedicină, Geologie, Paleontologie ...:
Metoda datării cu radiocarbon. Metoda datării cu radiocarbon (cunoscută și ca metoda datării cu Carbon¹⁴) este folosită pentru a stabili vârsta organismelor vii ce conțin carbon și au cel mult 50.000-60.000 ani vechime. Se știe că organismele vii conțin, în afară de izotopul stabil de Carbon¹² și o mică cantitate de izotop radioactiv de Carbon¹⁴, rezultat al bombardamentului cosmic. C^{14} intră în aceste organisme datorită unor procese specifice, iar raportul dintre cantitățile de C^{14} și C^{12} este constant. Notăm această valoare cu r_0 . Ea depinde de tipul organismului studiat.

Dacă un organism moare, acest proces de schimb încetează, iar izotopul C^{14} începe să descrească cu o rată constantă cu o valoare (determinată experimental) de $\frac{1}{8000}$. Acest proces permite determinarea vârstei organismelor moarte. Dacă $x = x(t)$ este valoarea raportului $\frac{C^{14}}{C^{12}}$ după t ani de la moarte atunci evoluția este modelată de problema cu valori inițiale

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{8000}x(t), t \geq 0, \\ x(0) = r_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

În consecință, dacă cunosc $x(T)$ -valoarea la zi a raportului, se poate determina numărul T al anilor scurși de la moarte din relația

$$T = 8000 \ln \frac{r_0}{x(T)}.$$

Intr-adevăr, rezolvând problema de mai sus, găsim soluția în formă implicită

$$\ln |x(t)| = -\frac{1}{8000}t + \ln r_0,$$

de unde putem exprima timpul

$$t = 8000 \ln \frac{r_0}{x(t)}, t \geq 0.$$

Pentru $t = T$ găsim formula enunțată mai sus.

Comentariu istoric. Metoda datării cu radiocarbon a fost dezvoltată de Willard Libby și colaboratorii săi de la Universitatea din Chicago în anul 1949. Pentru această descoperire, Libby a fost răsplătit cu Premiul Nobel pentru Chimie pe anul 1960. Mai menționăm că metoda are limitările ei: Carbonul este absorbit numai de organisme vii (sau mai bine zis care au fost vii la un moment dat) precum lemnul sau fosilele, deci nu poate fi folosit la datarea pietrelor sau a ceramicii, de exemplu.

Exemplu. Să se găsească vârsta unor semințe de in descoperite urmare a unor săpături în piatră, știind că raportul dintre cantitățile de C^{14} și C^{12} este de e^{-6} , iar la momentul descoperirii valoarea raportului dintre aceleași tipuri de carbon a fost e^{-10} .

Soluție. Avem $r_0 = e^{-6}$, $x(T) = e^{-10}$. Deducem $T = 32.000$ ani.

Exerciții propuse.

1) Să presupunem că un corp omenesc a fost descoperit într-o cameră de hotel la ora 10.00 dimineața, iar temperatura corpului său este de $27^\circ C$. Temperatura camerei este constantă de valoare $16^\circ C$. Două ore mai târziu temperatura corpului a scăzut la $24^\circ C$. Să se afle ora decesului.

2) Perioada de înjumătățire pentru radioizotopul Cesium-137 este de 29 de ani. Determinați procentajul de substanță dezintegrată după 10 de ani.

3) Intr-o universitate cu n cadre didactice se trece gradual la procesul de susținere a cursurilor online. Pe bază de voluntariat, se selectează p^0 cadre didactice care trec imediat pe online, restul urmând

să intre pe parcurs. Rata de introducere a cursurilor online este direct proporțională cu numărul celor care au adoptat deja sistemul online și este invers proporțională cu cei care nu au adoptat sistemul. Să se afle ecuația diferențială ce modelează procesul și să se arate că într-un termen mediu spre lung de timp, toate cadrele didactice vor trece la online. (Indicație: dacă $x = x(t)$ este numărul celor ce au adoptat sistemul online la momentul t , atunci procesul este modelat de ecuația diferențială

$$x'(t) = \alpha x(t) \frac{1}{n - x(t)},$$

cu condiția inițială $x(0) = p^0$, unde $\alpha > 0$ este un parametru ce indică rezistența la trecerea în online: cu cât α este mai mic, cu atât rezistența este mai mare.)

Capitolul 4

Principiul contracției

4.1 Noțiunea de normă. Spații Banach

Fie $(X, +, \cdot, \mathbb{R})$ un spațiu liniar real. Notăm cu Θ elementul neutru al grupului $(X, +)$. O funcțională $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ se numește o normă pe X dacă următoarele axiome sunt satisfăcute:

- (i) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$;
- (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, oricare ar fi $x \in X$ și $\lambda \in \mathbb{R}_+$
- (iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, oricare ar fi $x, y \in X$.

Vom nota de aici înainte $p(x) := \|x\|$, $x \in X$.

Perechea $(X, \|\cdot\|)$, unde X este spațiu liniar iar $\|\cdot\|$ este o normă pe X se numește spațiu normat.

Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spațiu normat, $x_0 \in X$ și $r > 0$, atunci notăm:

$$B(x_0; r) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$$

și respectiv

$$\tilde{B}(x_0; r) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

bila deschisă, respectiv bila închisă de centru x_0 și rază r .

Prin $S(x_0; r) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| = r\}$ notăm sfera de centru x_0 și rază r .

Șiruri în spații normate

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din X se numește:

(i) Cauchy (sau fundamental), dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ există $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât oricare ar fi $n, m \geq N_\epsilon$, $m > n$ avem $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ (sau, în mod echivalent, $\|x_n - x_{n+p}\| \rightarrow 0$ când $n, p \rightarrow +\infty$ independent).

(ii) convergent la $x^* \in X$, dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ există $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\epsilon$ avem $\|x_n - x^*\| < \epsilon$. Scriem, $x_n \rightarrow x^*$, când $n \rightarrow \infty$.

Se poate arăta ușor că orice șir convergent în X este Cauchy în X .

Un spațiu normat $(X, \|\cdot\|)$ se numește complet dacă orice șir Cauchy din X este convergent în X .

Un spațiu normat și complet se numește spațiu Banach.

Observație. Norma $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ pe un spațiu liniar X este o funcție continuă, în sensul că, dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din X convergent la $x \in X$, atunci șirul $(p(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din \mathbb{R}_+ convergent la $p(x)$.

Exemple de spații Banach

1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ este spațiu Banach cu fiecare dintre următoarele funcționale:

$$\|x\|_E := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \text{norma euclidiană}$$

$$\|x\|_M := \sum_{i=1}^n |x_i| - \text{norma de tip Minkowski}$$

$$\|x\|_C := \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i| - \text{norma de tip Cebîșev.}$$

2) $(C[a, b], \|\cdot\|)$ este spațiu Banach cu fiecare dintre următoarele funcționale:

$$\|x\|_C := \max_{t \in [a, b]} |x(t)| - \text{norma de tip Cebîșev}$$

$$\|x\|_B := \max_{t \in [a, b]} (|x(t)| e^{-\tau|t-t_0|}) - \text{norma de tip Bielecki,}$$

unde $t_0 \in [a, b]$, $\tau > 0$ este arbitrar, iar prin $C[a, b]$ am notat spațiul funcțiilor continue definite pe intervalul $[a, b]$ al axei reale și cu valori reale.

Echivalența normelor

Fie X un spațiu liniar și $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ două norme pe X .

Prin definiție, două norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ pe X se numesc tare echivalente dacă și numai dacă, oricare ar fi $x \in X$ există $c_1, c_2 > 0$ astfel ca

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Dacă două norme sunt tare echivalente atunci o serie de proprietăți ce au loc în raport cu o normă au imediat loc și în raport cu orice normă tare echivalentă cu ea. De exemplu, dacă un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy în raport cu o normă $\|\cdot\|_1$, iar $\|\cdot\|_2$ este o normă echivalentă cu ea în spațiul normat X , atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy și în raport cu o normă $\|\cdot\|_2$. Intr-adevăr, dacă presupunem că $\|x_n - x_{n+p}\|_1 \rightarrow 0$ când $n, p \rightarrow +\infty$ independent, atunci, folosind definiția normelor tare echivalente avem

$$c_1 \|x_n - x_{n+p}\|_1 \leq \|x_n - x_{n+p}\|_2 \leq c_2 \|x_n - x_{n+p}\|_1,$$

ceea ce induce că $\|x_n - x_{n+p}\|_2 \rightarrow 0$ când $n, p \rightarrow +\infty$ independent.

Operatori în spații normate

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și $A : X \rightarrow X$ un operator (o funcție). Atunci A se numește:

(i) continuu în punctul x^* din X dacă oricare ar fi un șir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din X convergent la x^* , rezultă că șirul $(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent în X la $A(x^*)$.

ii) α -Lipschitz dacă $\alpha > 0$ și are loc relația

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \text{ oricare ar fi } x, y \in X;$$

iii) α -contractie dacă este α -Lipschitz cu $\alpha \in [0, 1[$.

Observație. (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i).

4.2 Principiul contractiei al lui Banach

Incepem cu câteva definiții necesare.

Definiție. Dacă X este o mulțime nevidă și $A : Y \subset X \rightarrow X$ este o funcție dată, atunci un element $x^* \in X$ se numește un punct fix pentru A dacă $x^* = A(x^*)$. Notăm cu $Fix(A)$ mulțimea tuturor punctelor fixe ale funcției/operatorului A .

De asemenea, notă cu $I(A) := \{Y \subset X \mid A(Y) \subset Y\}$ mulțimea tuturor submulțimilor invariante în raport cu funcția A .

Definiție. Fie X este o mulțime nevidă și $A : Y \subset X \rightarrow X$ este o funcție dată. Atunci, șirul aproximațiilor succesive pentru A pornind dintr-un element $x \in X$ (notat cu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$) este definit astfel:

$$x_0 = x, \quad x_n = A^n(x), \quad \text{for } n \in \mathbb{N},$$

unde $A^0 := 1_X$, $A^1 := A$, \dots , $A^{n+1} = A \circ A^n$, $n \in \mathbb{N}$ sunt iteratele operatorului A . Ca și consecință, observăm că șirul aproximațiilor succesive pentru A satisface următoarea relație de recurență

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = A(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Principiul contractiei al lui Banach

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și $A : X \rightarrow X$ o α -contractie. Atunci următoarele concluzii au loc:

(i) $Fix(A) = \{x^*\}$;

(ii) oricare ar fi $x \in X$ șirul aproximațiilor succesive pentru A pornind din x (i.e. $x_0 = x$, $x_n := A^n(x)$, $n \geq 1$) converge la x^* ;

(iii) $\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\|$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație.

(i) + (ii)

Etapa 1. Arătăm că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al aproximațiilor succesive pentru A pornind dintr-un element arbitrar x al spațiului X este Cauchy. Demonstrația se bazează pe evaluările:

$$(*) \quad \|x_n - x_{n+1}\| \leq \alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\|, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

și

$$(**) \quad \|x_n - x_{n+p}\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\|, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N} \text{ și } p \in \mathbb{N}^*.$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\| &= \|A(x_{n-1}) - A(x_n)\| \leq \alpha \cdot \|A(x_{n-2}) - A(x_{n-1})\| \leq \dots \\ &\leq \alpha^n \cdot \|x_0 - x_1\| = \alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\|. \end{aligned}$$

Pentru relația (***) avem

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+p}\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{n+p-1} - x_{n+p}\| \leq \\ &\alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\| + \dots + \alpha^{n+p-1} \cdot \|x_0 - A(x_0)\| = \\ &\alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\| (1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1}) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\| \leq \\ &\frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\|. \end{aligned}$$

Etapa 2. Din proprietatea de spațiu Banach a lui X , rezultă că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent în X . Notăm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$.

Etapa 3. Arătăm că $x^* \in \text{Fix}(A)$. Aceasta rezultă din relația $x_{n+1} = A(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, folosind continuitatea operatorului A .

Etapa 4. Unicitatea punctului fix x^* rezultă folosind metoda reducerii la absurd și condiția de contracție.

(iii) Evaluarea erorii de la (iii) rezultă folosind relația (**), prin trecere la limită după $p \rightarrow \infty$. \square

Observație. Principiul contracției al lui Banach este o teoremă de existență, unicitate și aproximare pentru soluția ecuației de punct fix $x = A(x)$.

Următoarea teoremă de dependență de date a punctului fix este foarte ușor de demonstrat (exercițiu).

Teorema de dependență continuă de date a punctului fix.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și $A, B : X \rightarrow X$ doi operatori.

Presupunem:

- (i) A este o α -contracție (notăm cu x_A^* unicul punct fix al lui A);*
 - (ii) există $x_B^* \in \text{Fix}(B)$;*
 - (iii) există $\eta > 0$ astfel încât $\|A(x) - B(x)\| \leq \eta$, oricare ar fi $x \in X$.*
- Atunci $\|x_A^* - x_B^*\| \leq \frac{\eta}{1-\alpha}$.*

4.3 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Considerăm pe \mathbb{R}^2 funcționalele $\|x\|_M := |x_1| + |x_2|$ și respectiv $\|x\|_C := \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Să se arate că $\|\cdot\|_M$ și $\|\cdot\|_C$ sunt norme pe \mathbb{R}^2 și să se determine, pentru fiecare în parte, $B((0, 0); 1)$.

Soluție. Se verifică ușor primele două axiome ale normei. Să verificăm acum cea de-a treia axiomă, i.e., inegalitatea triunghiului:

$$\|x + y\|_M \leq \|x\|_M + \|y\|_M, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Avem de arătat că $|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$, ceea ce este adevărat din inegalitatea triunghiului pentru modul.

În cazul funcționalei $\|x\|_C$ avem de arătat că

$$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ceea ce revine la a arăta $\max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}$. Această relație este, de asemenea, adevărată din proprietățile funcției \max și inegalitatea triunghiului pentru modul.

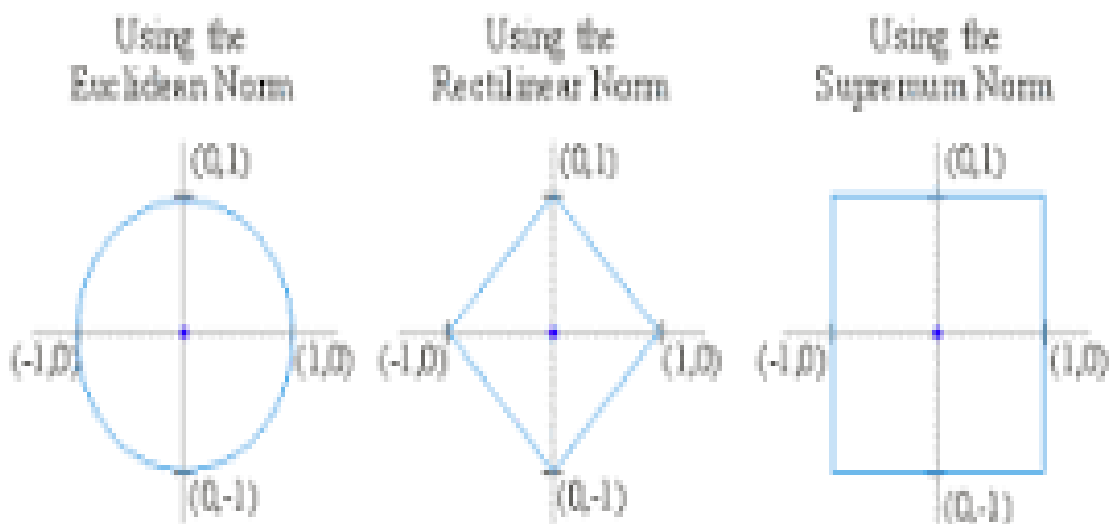
Mai departe, avem:

i) pentru $\|\cdot\|_M$

$$B((0,0);1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x - (0,0)\|_M < 1\} = \\ \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}.$$

ii) pentru $\|\cdot\|_C$

$$B((0,0);1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x - (0,0)\|_C < 1\} = \\ \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}.$$



2) Fie $f \in C^1(\mathbb{R})$. Atunci

$$f \text{ is } \alpha\text{-Lipschitz} \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \alpha, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Folosim Teorema lui Lagrange a creșterilor finite. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$. Pe intervalul $[x_1, x_2]$ aplicăm Teorema lui Lagrange. Atunci există $c \in]x_1, x_2[$ astfel ca

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1|.$$

” \Leftarrow ” Dacă $|f'(x)| \leq \alpha$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci, de mai sus, avem

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \alpha|x_2 - x_1|.$$

” \Rightarrow ” Dacă f este α -Lipschitz, atunci pentru x_0 fixat, dar oarecare și $x > x_0$ (și analog, pentru situația $x < x_0$) avem

$$|f'(x_0)| = \left| \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \lim_{x \searrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \alpha.$$

3) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$ este o $\frac{1}{2}$ -contractie.

Soluție. Observăm că $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$. Folosind exercițiul precedent, avem $|f'(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

4) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^2$ nu este Lipschitz pe \mathbb{R} .

Soluție. Deoarece $|f'(x)| = 2|x|$ este nemărginită pe \mathbb{R} , din exercițiul 2, rezultă că f nu e Lipschitz pe \mathbb{R} .

5) Să se verifice dacă ecuația

$$x' = -\frac{x(x+2t)}{t(2x+t)}, (t, x) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

este cu diferențială totală exactă și apoi, în caz afirmativ, să se rezolve.

Soluție. Putem scrie ecuația echivalent ca

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(x+2t)}{t(2x+t)} \Leftrightarrow t(2x+t)dx + x(x+2t)dt = 0$$

Recunoaștem $g(t, x) = t(2x+t)$ iar $h(t, x) = x(x+2t)$. Verifică condiția de diferențială totală exactă (vezi relația (2.6))

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial h}{\partial x}(t, x), \text{ oricare ar fi } (t, x) \in D.$$

Avem

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = 2x + 2t, \text{ oricare ar fi } (t, x) \in D.$$

Am arătat că ecuația dată este cu diferențială totală exactă. Atunci, soluția în formă implicită a ecuației date este

$$F(t, x) = c_1, t \in I \ (c_1 \in \mathbb{R}),$$

unde determinarea lui F se poate face prin integrarea sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = h \\ \frac{\partial F}{\partial x} = g. \end{cases}$$

Avem succesiv

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = x^2 + 2tx \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2tx + t^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(t, x) = tx^2 + t^2x + \varphi(x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2tx + t^2, \end{cases}$$

unde φ este o funcție de clasă C^1 deocamdată necunoscută. Înlocuind forma lui F în cea de-a doua ecuație avem

$$\begin{cases} F(t, x) = tx^2 + t^2x + \varphi(x) \\ 2tx + t^2 + \varphi'(x) = 2tx + t^2, \end{cases}$$

deducem că $\varphi'(x) = 0$, adică $\varphi(x) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}$. În concluzie, soluția în formă implicită a ecuației date este

$$tx^2 + t^2x = c, t \in I \ (c \in \mathbb{R}),$$

rezultată prin comasarea constantelor c_1, c_2 .

6) Să se rezolve ecuația: $tx'(t) = t^2\sqrt{x(t)} + 2x(t)$, pentru $t > 0$.

Soluție. Recunoaștem o ecuație Bernoulli, a cărei formă generală este (reamintesc)

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x^\alpha(t), \ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q sunt funcții continue pe un interval I , iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

În cazul nostru avem $p(t) = \frac{2}{t}, q(t) = t, \alpha = \frac{1}{2}$.

Pentru rezolvarea ei efectivă se face schimbarea de variabilă

$$y = x^{1-\alpha} = x^{\frac{1}{2}}$$

prin care ar trebui să obținem o ecuație diferențială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$.

Avem $x = y^2$ și $x' = 2yy'$. Astfel, ecuația în necunoscuta y este

$$2tyy' = t^2y + 2y^2.$$

Dând factor comun, avem cazul $y = 0$ care conduce (revenind la notația inițială) la soluția $x(t) = 0, t > 0$, iar, pe de altă parte, ecuația

$$2ty' = t^2 + 2y,$$

care este o ecuație diferențială liniară în necunoscuta $y = y(t)$. O scriem în forma ei generală $2ty' - 2y = t^2$ și o rezolvăm în cele două etape deja învățate.

Etapa 1: rezolvăm ecuația omogenă asociată: $2ty' - 2y = 0$. Fiind o ecuație cu variabile separabile avem (după împărțire cu 2)

$$t \frac{dy}{dt} = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{t} dt.$$

Integrând, obținem

$$y(t) = ct, t > 0 \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Astfel, am obținut

$$\mathcal{S}_0 = \{y(t) = ct, t > 0 : c \in \mathbb{R}\}.$$

Etapa 2: găsim o soluție particulară a ecuației neomogene. Caut $y_p(t) = \varphi(t)t$, unde φ este o funcție de clasă C^1 , deocamdată necunoscută. Punem condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă $2ty' - 2y = t^2$. Înlocuind avem

$$2t(\varphi't + \varphi) - 2t\varphi = t^2 \Leftrightarrow \varphi'(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi(t) = \frac{t}{2}.$$

Astfel, $y_p(t) = \frac{t^2}{2}$. În consecință, soluția generală a ecuației în necunoscuta y este

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_r + \{y_p\} = \{y(t) = ct + \frac{t^2}{2}, t > 0 : c \in \mathbb{R}\}.$$

Concluzionă că soluțiile ecuației date sunt

$$x(t) = 0, t > 0 \text{ și } x(t) = \left(ct + \frac{t^2}{2}\right)^2, t > 0 \text{ (unde } c \in \mathbb{R}\text{)}.$$

B. Exerciții propuse.

1) Considerăm funcționalele $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definite de

$$p(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

respectiv

$$q(x) = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

Studiați dacă p și q sunt norme pe \mathbb{R} și determinați (în ambele cazuri, indiferent dacă avem normă sau nu) $B(0; 2)$, $\tilde{B}(0; 3)$ și $S(0; 3)$.

2) Fie $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$, $f(x) = \frac{x}{3}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$. Arătați că f și g nu au puncte fixe. Comentați legătura cu principiul contracției al lui Banach.

3) Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1 - x)$ (operatorul logistic).

(a) Găsiți $Fix(f)$

(b) Este f o contracție pe $[0, 1]$?

(c) Găsiți un interval închis $J = [a, b]$ inclus în $[0, 1]$ cu proprietatea că $f(J) \subseteq J$ și $f : J \rightarrow J$ este o contracție.

4) Să se verifice dacă ecuația

$$x' = -\frac{3t(t + 2x^2)}{2x(3t^2 + 2x^2)}, (t, x) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

este cu diferențială totală exactă și apoi, în caz afirmativ, să se rezolve.

6) Să se rezolve problema cu condiții inițiale

$$\begin{cases} x' = x \cos t - x^2 \cos t, t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Capitolul 5

Problema lui Cauchy

În acest capitol vom demonstra și enunța două rezultate de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy. Cazul particular al sistemelor liniare va fi, de asemenea, considerat.

5.1 Teoreme de existență și unicitate

5.1.1 Teorema globală de existență și unicitate

Considerăm problema cu condiții inițiale (problema lui Cauchy) de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (5.1)$$

unde $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$, $f : \text{Dom}(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar $a > 0$ este oarecare. Fie $I := [t_0 - a, t_0 + a]$, cu $a > 0$ arbitrar.

În condițiile în care problema nu poate fi rezolvată efectiv, ne interesează un rezultat de existență, unicitate și aproximare a soluției problemei date. Există mai multe abordări ale acestei problematice în literatura de specialitate. Abordarea din acest curs se bazează pe folosirea principiului contracției a lui Banach și a tehnicii punctului fix. Metoda este

relativ nouă (A. Bielecki, 1956) și se bazează pe folosirea normei Bielecki pe spațiul funcțiilor continue.

Următorul rezultat auxiliar este foarte important în demersul nostru.

Lema. *In condițiile de mai sus, considerăm problema lui Cauchy (5.1). Atunci orice soluție a problemei (5.1) este soluție a ecuației integrale*

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + x^0, \quad t \in I \quad (5.2)$$

și reciproc. Cu alte cuvinte, problemele (5.1) și (5.2) sunt echivalente.

Demonstrație. Să notăm mai întâi că printr-o soluție a ecuației (5.2) înțelegem o funcție continuă x ce verifică ecuația pentru fiecare $t \in I$.

” \Rightarrow ” Fie x o soluție pentru problema (5.1). Integrând ecuația de la t_0 la $t \in I$ avem

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds.$$

Cum $x(t_0) = x^0$, rezultă că x e soluție pentru (5.2).

” \Leftarrow ” Fie x o funcție continuă, soluție pentru ecuația integrală (5.2). Atunci, din (5.2) rezultă că $x(t_0) = x^0$. Mai mult, derivând ecuația (5.2) obținem că $x'(t) = f(t, x(t))$, $t \in I$, ceea ce arată că x este derivabilă cu derivata continuă și e soluție pentru (5.1). \square

Comentariu istoric. *Ecuația (5.2) este o ecuație integrală de tip Volterra. Vito Volterra a fost un matematician italian cu contribuții însemnate în teoria ecuațiilor integrale. Pe de altă parte, matematicianul român Traian Lalescu este autorul primei monografii de ecuații integrale din lume (1911).*

Lema anterioară arată că studiul problemei (5.1) se poate reduce la studiul ecuației (5.2). Dar ecuația (5.2) este o ecuație de punct fix. Într-adevăr, dacă, pentru $x \in C(I)$, notăm

$$Tx(t) := \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + x^0, \quad t \in I,$$

atunci (din faptul că f este presupusă funcție continuă) am obținut operatorul

$$T : C(I) \rightarrow C(I), \quad x \mapsto Tx.$$

Folosind această notație, ecuația (5.2) se scrie ca o problemă de punct fix de forma

$$x = Tx, \quad x \in C(I). \quad (5.3)$$

Dacă observăm (vezi pag. 44) că $C(I)$ înzestrat cu oricare dintre normele Cebîșev sau Bielecki este spațiu Banach, atunci suntem foarte aproape de a putea utiliza principiul contracției la ecuația de punct fix (5.3). Mai trebuie doar ca operatorul T să fie contracție. Cu alte cuvinte, ar trebui să arătăm că există $\alpha \in]0, 1[$ astfel ca

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in C(I), \quad (5.4)$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă pe $C(I)$. Pornim acest calcul de la expresia ce apare în membrul stâng al relației de mai sus:

$$|Tx(t) - Ty(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right|.$$

Distingem două cazuri:

a) $t \geq t_0$. Avem

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds$$

Pentru a putea evalua cantitatea de mai sus în raport cu $|x(t) - y(t)|$ (ce apare în membrul drept al relației de demonstrat (5.4), impunem aici o condiție de tip Lipschitz asupra lui f . Mai precis, presupunem că există $L_f > 0$ astfel încât

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq L_f |u - v|, \quad \text{oricare ar fi } u, v \in \mathbb{R} \text{ și } s \in I. \quad (5.5)$$

Atunci avem

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \int_{t_0}^t |(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))| ds \leq L_f \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds$$

$$\begin{aligned}
&= L_f \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| e^{-\tau|s-t_0|} e^{\tau|s-t_0|} ds \leq L_f \|x - y\|_B \int_{t_0}^t e^{\tau|s-t_0|} ds \\
&\leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B e^{\tau|t-t_0|}, \text{ oricare ar fi } t \in I, t \geq t_0.
\end{aligned}$$

Impărțind relația cu $e^{\tau|t-t_0|}$ și luând maximum după t obținem

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(I). \quad (5.6)$$

b) $t \leq t_0$. Presupunem și în acest caz, că are loc condiția Lipschitz (5.5). Atunci avem

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)| &\leq \int_t^{t_0} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \leq L_f \int_t^{t_0} |x(s) - y(s)| ds \\
&= L_f \int_t^{t_0} |x(s) - y(s)| e^{-\tau|s-t_0|} e^{\tau|s-t_0|} ds \leq L_f \|x - y\|_B \int_t^{t_0} e^{\tau|s-t_0|} ds \\
&\leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B e^{\tau|t-t_0|}, \text{ oricare ar fi } t \in I, t \leq t_0.
\end{aligned}$$

Impărțind relația cu $e^{\tau|t-t_0|}$ și luând maximum după t obținem și în acest caz

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(I). \quad (5.7)$$

În concluzie, am arătat că pentru orice $x, y \in C(I)$ avem

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B, \quad (5.8)$$

unde $\|\cdot\|_B$ este norma Bielecki pe $C(I)$. Cum $\tau > 0$ este arbitrar, alegând $\tau > L_f$ obținem că $\alpha := \frac{L_f}{\tau} < 1$, ceea ce arată că T este o α -contractie pe $C(I)$ în raport cu norma Bielecki a spațiului.

Astfel, toate ipotezele principiului contractiei a lui Banach pentru operatorul $T : (C(I), \|\cdot\|_B) \rightarrow (C(I), \|\cdot\|_B)$ definit de relația

$$Tx(t) := \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + x^0, t \in I$$

sunt îndeplinite. În concluzie, ecuația $x = Tx$ are în $C(I)$ o unică soluție (punct fix pentru T) pe care-l notăm cu x^* . Mai mult, șirul recurent definit de relația

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds + x^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

(unde x_0 poate fi orice element din $C(I)$) este convergent la x^* atât în raport cu norma Bielecki cât și în raport cu norma Cebîșev a spațiului $C(I)$.

Din considerațiile de mai sus, rezultă că am demonstrat teorema.

Teorema globală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy. *Fie problema lui Cauchy (5.1), unde valorile $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$ sunt date. Presupunem:*

(i) *(condiția de continuitate a datelor) $f : \text{Dom}(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar $a > 0$ este oarecare.*

(ii) *(condiția Lipschitz asupra lui f în raport cu al doilea argument) există $L_f > 0$ astfel încât*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L_f |u - v|, \text{ oricare ar fi } u, v \in \mathbb{R} \text{ și } t \in I.$$

Atunci, problema lui Cauchy (5.1) are soluție unică x^ și oricare ar fi $x_0 \in C(I)$ șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $C(I)$, definit recurent de relația*

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds + x^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la x^ .*

Să considerăm acum problema cu condiții inițiale (problema lui Cauchy) pentru un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1, de forma

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X^0, \end{cases} \quad (5.9)$$

unde $t_0 \in \mathbb{R}$, $X^0 \in \mathbb{R}^n$, iar $f : \text{Dom}(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție continuă, cu $a > 0$ oarecare.

Repetând considerațiile de mai sus, dar lucrând în spațiul Banach $C(I, \mathbb{R}^n)$ înzestrat cu norma Bielecki

$$\|X\|_B := \max_{t \in [a, b]} (\|X(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau|t-t_0|}),$$

se poate demonstra ușor (exercițiu !) teorema următoare.

Teorema globală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Fie problema lui Cauchy (5.9), unde valorile $t_0 \in \mathbb{R}$ și $X^0 \in \mathbb{R}^n$ sunt date. Presupunem:

(i) $f : \text{Dom}(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție continuă, iar $a > 0$ este oarecare.

(ii) există $L_f > 0$ astfel încât

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_f \|u - v\|_{\mathbb{R}^n}, \text{ oricare ar fi } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ și } t \in I.$$

Atunci, problema lui Cauchy (5.9) are soluție unică X^* și oricare ar fi $X_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ șirul $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $C(I, \mathbb{R}^n)$, definit recurent de relația

$$X_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, X_n(s)) ds + X^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la X^* .

În cazul în care sistemul (5.9) este liniar (ceea ce înseamnă că f este o funcție liniară în raport cu al doilea argument, i.e., $f(t, u) := A(t)u + B(t)$) problema cu condiții inițiale anterioară capătă următoarea formă:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Să notăm că A e o matrice de funcții continue

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

în timp ce B este un vector de funcții continue de forma

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

ceea ce justifică denumirea de sistem de ecuații diferențiale.

Din teorema anterioară deducem următorul rezultat.

Teorema de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem linear de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Fie problema lui Cauchy (5.10), unde valorile $t_0 \in \mathbb{R}$ și $X^0 \in \mathbb{R}^n$ sunt date. Presupunem că $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ și $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Atunci, problema lui Cauchy (5.10) are soluție unică X^* și oricare ar fi $X_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ șirul $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $C(I, \mathbb{R}^n)$, definit recurent de relația

$$X_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t (A(s)X_n(s) + B(s)) ds + X^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la X^* .

Demonstrație. Arătăm că $f(t, u) = Au + B$ satisface ipotezele Teoremei globale de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Avem de verificat doar ipoteza (ii). Avem

$$\begin{aligned} \|f(t, u) - f(t, v)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|A(t)(u - v)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c\|A(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\|u - v\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq cM_A\|u - v\|_{\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

unde $M_A > 0$ are proprietatea (rezultată din continuitatea funcției A pe compactul I) că

$$\|A(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \leq M_A, \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

Din relația de mai sus, notând $L_f := cM_A > 0$, observăm că are loc condiția lui Lipschitz pentru f . Concluzia rezultă aplicând Teorema

globală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. \square

Observație. Printr-un calcul asemănător cu cel din cazul scalar (folosind elemente de analiză matriceală) obținem că unica soluție a problemei lui Cauchy arată mai sus are reprezentarea

$$X^*(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} X^0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t A(p)dp} B(s)ds.$$

Exemplu. Fie problema cu condiții inițiale

$$\begin{cases} x'(t) = \arctan x(t) + t^2 \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (5.11)$$

Să se studieze existență și unicitatea soluției problemei date.

Soluție. Avem $t_0 = 0$, $x^0 = 1$, $f(t, u) = \arctan u + t^2$, unde presupunem $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $a > 0$ arbitrar. Verificăm ipotezele teoremei globale de existență și unicitate:

(i) f este continuă pe $[-a, a] \times \mathbb{R}$;

(ii) f este Lipschitz (cu constanta $L_f = 1$) în raport cu al doilea argument. Într-adevăr, avem $|\frac{\partial f}{\partial u}| = \frac{1}{1+u^2} \leq 1$, oricare ar fi $u \in \mathbb{R}$.

Atunci, din Teorema globală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi obținem că problema lui Cauchy are soluție unică x^* și aceasta se poate obține ca limită uniformă a șirului definit recurent de relația

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t (\arctan x_n(s) + s^2) ds + 1, t \in [-a, a], n \in \mathbb{N},$$

unde pe rol de funcție de start se poate lua orice funcție continuă, de exemplu se poate lua $x_0(t) = 1$, $t \in [-a, a]$.

5.1.2 Teorema locală de existență și unicitate

Deseori ne interesează existența și unicitatea soluției problemei lui Cauchy într-o anumită parte a spațiului. Pe de altă parte, condiția Lip-

schitz pentru f în raport cu al doilea argument pe \mathbb{R} sau un domeniu nemărginit este destul de restrictivă, nefiind verificată de destul de multe funcții. pentru atingerea celor două situații descrise mai sus (localizarea soluției și relaxarea condiției de funcție Lipschitz), vom prezenta în continuare un rezultat de existență și unicitate locală.

Considerăm problema cu condiții inițiale (problema lui Cauchy) de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (5.12)$$

unde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, $(t_0, x^0) \in \Omega$, iar Ω este un domeniu (mulțime deschisă și conexă) în \mathbb{R}^2 . Fie dreptunghiul $\tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega$, unde $a, b > 0$. Fie $0 < h \leq a$. Studiem existența și unicitatea soluției problema cu condiții inițiale de mai sus în $\tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$. Notăm $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ și desemnăm cu $M_f > 0$ numărul cu proprietatea

$$|f(t, u)| \leq M_f, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in \tilde{D}.$$

Vom presupune în continuare că f este local Lipschitz pe Ω în raport cu al doilea argument, ceea ce înseamnă că f este Lipschitz pe orice compact din domeniul de definiție respectiv.

Următorul rezultat auxiliar se obține în mod identic cu paragraful anterior.

Lema. *Considerăm problema lui Cauchy (5.12), unde $f : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă. Atunci orice soluție a problemei (5.12) este soluție a ecuației integrale*

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + x^0, \quad t \in J \quad (5.13)$$

și reciproc.

Ca și mai sus, pentru $x \in \tilde{B}(x^0; b)$, notăm

$$Tx(t) := \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + x^0, t \in J.$$

Obținem astfel operatorul

$$T : \tilde{B}(x^0; b) \rightarrow C(J), x \mapsto Tx.$$

Folosind această notație, ecuația integrală (5.13) se scrie ca o problemă de punct fix de forma

$$x = Tx, x \in \tilde{B}(x^0; b). \quad (5.14)$$

Să observăm că analog cu abordarea din secțiunea precedentă, $C(J)$ înzestrat cu oricare dintre normele Cebîșev sau Bielecki este spațiu Banach. Cum $\tilde{B}(x^0; b)$ este o mulțime închisă în $C(J)$, rezultă că $\tilde{B}(x^0; b)$ înzestrat cu oricare dintre normele Cebîșev sau Bielecki este, de asemenea, spațiu Banach.

Pentru a putea utiliza principiul contracției la ecuația de punct fix (5.14), mai trebuie să arătăm ca operatorul T acționează de la $\tilde{B}(x^0; b)$ la $\tilde{B}(x^0; b)$ și că este o contracție. Cu alte cuvinte, ar trebui să arătăm cumulativ:

- (i) oricare ar fi $x \in \tilde{B}(x^0; b)$ avem că $Tx \in \tilde{B}(x^0; b)$;
- (ii) există $\alpha \in]0, 1[$ astfel ca

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \alpha \|x - y\|_B, \text{ oricare ar fi } x, y \in \tilde{B}(x^0; b), \quad (5.15)$$

unde $\|\cdot\|_B$ este o norma Bielecki pe $C(J)$.

Intr-adevăr, avem:

(i) $|Tx(t) - x^0| = |\int_{t_0}^t f(s, x(s))ds|$, oricare ar fi $t \in J$. Dacă presupunem $t \geq t_0$, atunci avem

$$|Tx(t) - x^0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))|ds \leq M_f(t - t_0) \leq M_f h.$$

Analog obținem și în situația $t \leq t_0$.

Dacă presupunem că $h := \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$ atunci am obținut $|Tx(t) - x^0| \leq b$, oricare ar fi $t \in J$, cu h ca mai sus. Trecând la maxim după $t \in J$, avem

$$\|Tx - x^0\|_C \leq b,$$

ceea ce arată că $Tx \in \tilde{B}(x^0; b)$.

(ii) se obține la fel ca în secțiunea anterioară (exercițiu!).

În consecință, am demonstrat următoarea teoremă de existență și unicitate locală.

Teorema locală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unei ecuații diferențiale de ordinul întâi. *Fie problema lui Cauchy (5.12), unde $(t_0, x^0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Presupunem:*

- (i) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă;
- (ii) f este Lipschitz pe $\tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega$ în raport cu al doilea argument, i.e., există $L_f > 0$ astfel încât

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L_f |u - v|, \text{ oricare ar fi } (t, u), (t, v) \in \tilde{D}.$$

Atunci, problema lui Cauchy (5.12) are soluție unică $x^* \in \tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$ definită cel puțin pe intervalul $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ (unde $h := \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$, cu $M_f > 0$ având proprietatea că $|f(t, u)| \leq M_f$, oricare ar fi $(t, u) \in \tilde{D}$) și oricare ar fi $x_0 \in \tilde{B}(x^0; b)$ șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $\tilde{B}(x^0; b) \subset C(J)$, definit recurent de relația

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds + x^0, t \in J, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la x^* .

Observație. În mod analog cu situația din cazul teoremei globale, se poate demonstra și enunța o teoremă locală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Exemplu. Fie problema cu valori inițiale

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - 3x^4(t) \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Să se stabilească un rezultat de existență și unicitate pentru această problemă și să se scrie primele trei aproximații succesive pentru soluția problemei.

Soluție. În raport cu teoria generală, avem $f(t, u) = 2t - 3u^4$, $t_0 = 0$ și $x^0 = 0$. Presupunem $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a > 0$ este arbitrar.

Studiem mai întâi aplicabilitatea teoremei globale. În mod evident, f este continuă pe $[-a, a] \times \mathbb{R}$. Verifică dacă f este Lipschitz în raport cu al doilea argument. Avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| = 12|u^3| \rightarrow \infty, \text{ când } u \rightarrow \infty.$$

Deci, f nu este Lipschitz în raport cu al doilea argument pe \mathbb{R} . În aceste condiții, teorema globală de existență și unicitate nu este aplicabilă.

Analizăm acum aplicabilitatea teoremei locale. Considerăm $f : \tilde{D} := [-a, a] \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a, b > 0$ sunt arbitrare. Atunci,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| = 12|u^3| \leq 12b^3.$$

În consecință, f este Lipschitz în raport cu al doilea argument pe \tilde{D} cu constanta $L_f = 12b^3$. De asemenea, avem

$$|f(t, u)| = |2t - 3u^4| \leq 2|t| + 3|u^4| \leq 2a + 3b^4 := M_f, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in \tilde{D}.$$

Atunci $h := \min\{a, \frac{b}{2a+3b^4}\}$. Concluzionăm că teorema locală de existență și unicitate este aplicabilă și deci problema lui Cauchy de mai sus are soluție unică x^* definită, cel puțin, pe intervalul $[-h, h]$. Mai mult, $x^* \in \tilde{B}(0; b) \subset C[-h, h]$, ceea ce înseamnă că $x(t) \in [-b, b]$, oricare ar fi $t \in [-h, h]$. De exemplu, dacă luăm $a = 1, b = 1$, rezultă $h = \frac{1}{5}$ și soluția unică este $x^* : [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] \rightarrow [-1, 1]$.

În plus, șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $\tilde{B}(0; b) \subset C[-h, h]$, definit recurent de relația

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t (2s - 3x_n^4(s)) ds + x_0, t \in J, n \in \mathbb{N}$$

(unde $x_0 \in C[-h, h]$ poate fi arbitrar ales) converge uniform la x^* . De exemplu, alegând $x_0(t) = 0$ obținem

$$x_1(t) = \int_0^t 2s ds = t^2$$

și

$$x_2(t) = \int_0^t (2s - 3x_1^4(s)) ds = t^2 - 3 \int_0^t s^8 ds = t^2 - \frac{t^9}{3}.$$

...

5.2 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Fie funcția $x(t) = t^2$, $t \in [0, 2]$. Să se afle $\|x\|_C$ și $\|x\|_B$.

Soluție. $\|x\|_C = \max_{t \in [0, 2]} |x(t)| = \max_{t \in [0, 2]} t^2 = 4$. Pe de altă parte, $\|x\|_B =$

$$\max_{t \in [0, 2]} (|x(t)|e^{-\tau t}). \text{ Iau } \tau = 1. \text{ Atunci } \|x\|_B = \max_{t \in [0, 2]} (t^2 e^{-t}) = \frac{4}{e^2}.$$

2) Să se stabilească un rezultat de existență și unicitate pentru problema

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t^2} + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Aceeași problemă pentru

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t^2} + k \ln(1 + x^2(t)) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

unde $k > 0$ este dat.

Soluție. Avem $t_0 = 0$, $x^0 = 0$ și $f(t, u) = e^{-t^2} + \frac{1}{2} \ln(1 + u^2)$. Evident, putem lua $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $a > 0$ oarecare.

Avem:

(i) f continuă pe $[-a, a] \times \mathbb{R}$;

(ii) f este Lipschitz în raport cu al doilea argument, deoarece

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| = \frac{|u|}{1 + u^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in [-a, a] \times \mathbb{R}.$$

Din teorema globală de existență și unicitate rezultă că există soluție unică x^* definită, cel puțin, pe intervalul $[-a, a]$. Cum $a > 0$ este arbitrar, rezultă că soluția este definită pe \mathbb{R} .

3) Să se stabilească un rezultat de existență și unicitate pentru problema

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-x(t)} + 2t(x(t) - 1) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluție. Avem $t_0 = 0$, $x^0 = 1$ și $f(t, u) = e^{-u} + 2t(u - 1)$. Evident, putem lua $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a > 0$ este oarecare.

Avem:

(i) f continuă pe $[-a, a] \times \mathbb{R}$;

(ii) f nu este Lipschitz în raport cu al doilea argument pe $[-a, a] \times \mathbb{R}$, deoarece derivata sa parțială în raport cu al doilea argument nu este mărginită pe \mathbb{R} , după cum rezultă din calculul de mai jos

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq e^{-u} + 2|t| \rightarrow \infty, \text{ când } u \rightarrow -\infty.$$

În aceste condiții, teorema globală de existență și unicitate nu este aplicabilă.

Analizăm pentru cazul teoremei locale.

Fie $f : \tilde{D} := [-a, a] \times [1 - b, 1 + b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a, b > 0$. Atunci, deoarece

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq e^{-u} + 2|t| \leq e^{b-1} + 2a, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in \tilde{D},$$

rezultă că f este Lipschitz pe \tilde{D} . Calculând M_f din

$$|f(t, u)| \leq e^{-u} + 2|t||u - 1| \leq e^{b-1} + 2ab := M_f,$$

obținem $h = \min\{a, \frac{b}{e^{b-1} + 2ab}\}$. Din teorema globală de existență și unicitate avem că problema lui Cauchy are soluție unică definită cel puțin pe intervalul $[-h, h]$. Mai mult $x^* \in \tilde{B}(1; b) \subset C[-h, h]$. De exemplu, dacă luăm $a = 2, b = 1$ atunci $M_f = 4$ și $h = \frac{1}{4}$. În consecință, există și este unică o soluție x^* definită cel puțin pe intervalul $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$. În plus, în acest caz, $x^* \in \tilde{B}(1; 1) \subset C[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$, ceea ce arată că $x^*(t) \in [0, 2]$, oricare ar fi $t \in [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$.

4) Să se rezolve problema cu condiția inițială $x(0) = 2$ asociată următoarei ecuații Riccati

$$x'(t) + x^2(t) \sin t = 2 \frac{\tan t}{\cos t}, t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

știind că $\rho(t) = \frac{1}{\cos t}$ este soluție a ecuației date.

Soluție. Recunoaștem mai sus o ecuație Riccati, ce are forma generală

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^2(t) + r(t), t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q, r sunt funcții continue pe un interval I .

Facem schimbarea de variabilă $x(t) = \rho(t) + \frac{1}{z(t)}$ și vom obține o ecuație diferențială liniară în necunoscuta $z = z(t)$. În cazul nostru, obținem

$$z'(t) - 2z \tan t = \sin t, t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Rezolvând avem soluția generală

$$z(t) = \frac{c}{\cos^2 t} - \frac{\cos t}{3} = \frac{3c - \cos^3 t}{3 \cos^2 t}.$$

Revenind la notația inițială, avem (pe lângă soluția dată ρ), familia de soluții

$$x(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{3 \cos^2 t}{3c - \cos^3 t}.$$

Din condiția lui Cauchy $x(0) = 1$, găsim $c = \frac{4}{3}$. Deci, soluția unică a problemei date este

$$x^*(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{3 \cos^2 t}{4 - \cos^3 t}.$$

5) Să se rezolve ecuația de tip Clairault

$$x(t) = tx'(t) + \sqrt{1 + (x'(t))^2}, t \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Prin derivare, obținem

$$x'(t) = x'(t) + tx''(t) + x''(t)x'(t) (1 + (x'(t))^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

După reducerea termenilor asemenea, și avem

$$x''(t) \left(t + x'(t) (1 + (x'(t))^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

a) Dacă $x''(t) = 0$ atunci $x'(t) = c, c \in \mathbb{R}$ și astfel obținem (din ecuație) soluția generală

$$x(t) = ct + \sqrt{1 + c^2}, c \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $t + x'(t) (1 + (x'(t))^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$, atunci, notând $x' = p, p \in \mathbb{R}$, obținem (folosind relația anterioară și ecuația) soluția singulară a ecuației lui Clairault

$$\begin{cases} t = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând p între cele două relații, obținem forma explicită a soluției singulare, anume

$$x(t) = \sqrt{1 - t^2}, t \in]-1, 1[$$

care reprezintă ecuația semicercului superior de centru $(0, 0)$ și rază 1. Acest semicerc este înfășurătoarea familiei de drepte reprezentată de soluția generală. (Notă: Verificați la *Geometrie* noțiunea de înfășurătoare a unei familii de drepte.)

B. Exerciții propuse.

1) Să se stabilească un rezultat de existență și unicitate pentru problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sin t + \frac{1}{3} \arctan(1 + x^2(t)) \\ x(1) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

2) Să se stabilească un rezultat de existență și unicitate pentru problema

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) + \cos t \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

precizându-se un interval al axei reale pe care problema există și este unică. În acest caz, să se scrie șirul aproximațiilor succesive corespunzător și să se calculeze primele trei aproximații.

3) Să se stabilească un rezultat de existență și unicitate pentru problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y^2(t) + -y + 1 \\ y'(t) = x^2(t) - x - y - 2t \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

precizându-se un interval al axei reale pe care problema există și este unică.

4) Să se rezolve ecuația Riccati $t^2x'(t) + tx(t) + t^2x^2(t) = 4$, $t > 0$, știind că $\rho(t) = \frac{2}{t}$, $t > 0$, este o soluție a sa.

5) Să se rezolve ecuația Clairault $x(t) = tx'(t) + 2 \ln(x'(t))$.

Capitolul 6

Dependența de date a soluției problemei Cauchy

Considerăm problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (6.1)$$

unde $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$, $f : \text{Dom}(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar $a > 0$ este oarecare. Fie $I := [t_0 - a, t_0 + a]$, cu $a > 0$ arbitrar. Dacă presupunem că f este Lipschitz în raport cu al doilea argument, atunci din teorema globală de existență și unicitate se știe că există și este unică o soluție x^* a problemei noastre, definită cel puțin pe intervalul $[t_0 - a, t_0 + a]$. Problema pe care ne-o punem acum (problemă importantă în procesele de aproximare a soluției) este:

Intrebare: Dacă în problema de mai sus, înlocuim f cu o funcție apropiată (într-un sens pe care-l vom defini) de ea notată cu g și înlocuim x^0 cu o valoare y^0 apropiată de x^0 , oare cât de apropiată este soluția (notată cu y^*) problemei Cauchy cu g și y^0 de x^* ? Dacă, atunci când g se apropie/tinde de/la f și y^0 tinde la x^0 obținem că y^* tinde spre x^* , spunem că are loc dependența continuă de date a soluției problemei lui

Cauchy, lucru ce este extrem de important în analiza numerică (calculul aproximativ) a soluției.

Comentariu istoric. Noțiunea de dependență continuă de date a fost formulată de Jacques Hadamard în 1902 în contextul studiilor sale asupra unor ecuații cu derivate parțiale. Hadamard a numit o problemă bine pusă (well-posed) dacă soluția sa există este unică și depinde continuu de datele problemei. În acest cadru, vom demonstra în acest capitol că problema lui Cauchy pentru ecuații/sisteme de ecuații diferențiale este (în ipotezele menționate mai sus) bine pusă.

6.1 Lema Gronwall

Următorul rezultat, cunoscut în literatura ca lema lui Gronwall, este important pentru demonstrația dependenței de date a soluției problemei lui Cauchy.

Teoremă (Lema Gronwall). Fie $\varphi, \psi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ două funcții continue pe un interval J . Fie $t_0 \in J$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$. Dacă

$$\psi(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s)\psi(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J,$$

atunci

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s)ds \right|} \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Demonstrație. Facem demonstrația în doi pași.

A. Presupunem $\alpha > 0$.

Notăm $F(t) := \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s)\psi(s)ds \right|$, situație în care ipoteza lemei este $\psi(t) \leq F(t)$, oricare ar fi $t \in J$. Avem 2 cazuri:

A1. Presupunem $t \geq t_0$.

Atunci $F(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^t \varphi(s)\psi(s)ds$ și $F'(t) = \beta\varphi(t)\psi(t)$. Rezultă, folosind ipoteza, că

$$F'(t) \leq \beta\varphi(t)F(t), \text{ oricare ar fi } t \geq t_0$$

și atunci

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq \beta\varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \geq t_0$$

Integrând de la t_0 la t avem

$$\ln F(t) - \ln F(t_0) \leq \beta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Cum $F(t_0) = \alpha$, obținem

$$F(t) \leq \alpha e^{\beta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \text{ oricare ar fi } t \geq t_0.$$

Folosind din nou ipoteza $\psi(t) \leq F(t)$, avem că

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta \int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \text{ oricare ar fi } t \geq t_0.$$

A2. Presupunem $t \leq t_0$.

Atunci $F(t) := \alpha + \beta \int_t^{t_0} \varphi(s)\psi(s) ds$. Avem

$$F'(t) = -\beta\varphi(t)\psi(t) \geq -\beta\varphi(t)F(t), \text{ oricare ar fi } t \leq t_0.$$

Separând, avem

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \geq -\beta\varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \leq t_0$$

Integrând de la t la t_0 avem

$$\ln F(t_0) - \ln F(t) \geq -\beta \int_t^{t_0} \varphi(s) ds.$$

In consecință, avem ca și mai sus, că

$$F(t) \leq \alpha e^{\beta \int_t^{t_0} \varphi(s) ds} = \alpha e^{\beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|} \text{ oricare ar fi } t \leq t_0.$$

Cum $\psi(t) \leq F(t)$, oricare ar fi $t \leq t_0$, concluzia este demonstrată și în acest caz.

B. Presupunem $\alpha = 0$.

Atunci ipoteza lemei este

$$\psi(t) \leq \beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s)\psi(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J,$$

iar ceea ce trebuie demonstrat

$$\psi(t) = 0, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Din ipoteza acestui caz rezultă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem

$$\psi(t) \leq \varepsilon + \beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s)\psi(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Aplicând **A.**, avem că

$$\psi(t) \leq \varepsilon e^{\beta \left| \int_{t_0}^t \varphi(s)ds \right|} \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, făcând $\varepsilon \searrow 0$ avem că

$$\psi(t) \leq 0, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Cum ψ ia valori pozitive, concluzia este $\psi(t) = 0$, oricare ar fi $t \in J$.

6.2 Dependența continuă de date a soluției problemei lui Cauchy

Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (6.2)$$

unde $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$, $f : \text{Dom}(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și Lipschitz în raport cu al doilea argument, iar $a > 0$ este oarecare. Fie $I := [t_0 - a, t_0 + a]$, cu $a > 0$ arbitrar.

6.2. DEPENDENȚA CONTINUĂ DE DATE A SOLUȚIEI PROBLEMEI LUI CAUCHY 81

Asociem problemei de mai sus o problemă Cauchy "apropiată", și anume

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0, \end{cases} \quad (6.3)$$

unde $g \in C(I)$, $y^0 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât:

(i) există $\rho_1 > 0$ astfel ca $|f(t, u) - g(t, u)| \leq \rho_1$, oricare ar fi $(t, u) \in I \times \mathbb{R}$;

(ii) există $\rho_2 > 0$ astfel ca $|x^0 - y^0| \leq \rho_2$.

Mai presupunem că problema (6.2) are cel puțin o soluție y^* definită pe I . Întrebarea este "**Cât de departe este y^* de x^* ?**"

Avem următorul rezultat ce arată că are loc dependența continuă de date a soluției problemei lui Cauchy.

Teorema. *Considerăm problemele (6.2) și (6.3) în ipotezele mai sus menționate. Notez cu $L_f > 0$ constanta Lipschitz a lui f , cu x^* unica soluție a problemei (6.2) și cu y^* o soluție a problemei (6.3). Atunci*

$$\|x^* - y^*\|_C \leq (\rho_1 a + \rho_2) e^{L_f a}.$$

Demonstrație. Știm de la capitolul cu teorema de existență și unicitate că problema (6.2) este echivalentă cu problema

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + x^0, t \in I,$$

iar, analog, problema (6.3) este echivalentă cu

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds + y^0, t \in I.$$

Deoarece $\|x^* - y^*\|_C = \max_{t \in I} |x^*(t) - y^*(t)|$, să evaluăm, folosind faptul că x^* respectiv y^* verifică ecuațiile integrale de mai sus, valoarea

$$|x^*(t) - y^*(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x^*(s)) ds + x^0 - \int_{t_0}^t g(s, y^*(s)) ds - y^0 \right| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, x^*(s)) ds - \int_{t_0}^t g(s, y^*(s)) ds \right| + |x^0 - y^0|.$$

Să presupunem mai întâi că $t \geq t_0$. Atunci avem

$$\begin{aligned} |x^*(t) - y^*(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x^*(s)) - g(s, y^*(s))| ds + |x^0 - y^0| \leq \\ &\int_{t_0}^t |f(s, x^*(s)) - f(s, y^*(s))| ds + \int_{t_0}^t |f(s, y^*(s)) - g(s, y^*(s))| ds + \rho_2 \leq \\ L_f \int_{t_0}^t |x^*(s) - y^*(s)| ds + \rho_1 \int_{t_0}^t ds + \rho_2 &\leq L_f \int_{t_0}^t |x^*(s) - y^*(s)| ds + \rho_1 a + \rho_2. \end{aligned}$$

Deci, am obținut relația

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leq (\rho_1 a + \rho_2) + L_f \int_{t_0}^t |x^*(s) - y^*(s)| ds, \quad t \in I.$$

Pentru această relație putem aplica lema Gronwall (cu $\alpha := \rho_1 a + \rho_2$, $\beta := L_f$, $\varphi(t) := 1$ și $\psi(t) := |x^*(t) - y^*(t)|$). Rezultă că avem

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leq (\rho_1 a + \rho_2) e^{L_f \int_{t_0}^t ds} = (\rho_1 a + \rho_2) e^{L_f a}, \quad t \in I.$$

Trecând la maxim după $t \in I$ avem

$$\|x^* - y^*\|_C \leq (\rho_1 a + \rho_2) e^{L_f a}.$$

Observă că, dacă $g \rightarrow f$ și $y^0 \rightarrow x^0$ (ceea ce conduce la $\rho_1, \rho_2 \searrow 0$), avem că $y^* \rightarrow x^*$, adică avem fenomenul dependenței continue de date pentru soluția problemei lui Cauchy.

Cazul $t \leq t_0$ este analog și este lăsat ca exercițiu. \square .

Observație. O altă metodă de a demonstra fenomenul dependenței continue de date pentru soluția problemei lui Cauchy este utilizarea teoremei abstracte de dependență de date a punctului fix (vezi problemele propuse de la capitolul principiul contracției). Acesta este un bun exercițiu pentru studenții interesați și o temă frumoasă pentru lucrarea de licență.

6.3 Aspecte dinamice în teoria ecuațiilor diferențiale

Vom introduce în ceea ce urmează câteva noțiuni importante pentru abordarea dinamică din teoria ecuațiilor diferențiale. Vom reveni asupra subiectului după capitolele referitoare la sisteme de ecuații diferențiale liniare.

Fie ecuația diferențială

$$x' = f(x),$$

unde $f : X \rightarrow X$ (cu $X := \mathbb{R}$) este o funcție de clasă C^1 .

Presupunem că oricare ar fi $\eta \in X$, problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \eta \end{cases} \quad (6.4)$$

are soluție unică (pe care o notăm cu x_η^*) definită pe $G := \mathbb{R}$. Considerăm, de asemenea, funcția $\varphi : G \times X \rightarrow X$ definită de relația $\varphi(t, \eta) = x_\eta^*(t)$.

Atunci, prin definiție, tripletul $(X := \mathbb{R}, G := \mathbb{R}, \varphi)$ se numește sistemul dinamic generat de sistemul autonom de ecuații diferențiale $x' = f(x)$. În tripletul de mai sus, domeniul $X = \mathbb{R}$ de definiție al funcției f se numește spațiul fazelor (stărilor), $G := \mathbb{R}$ este domeniul de definiție al soluției problemei lui Cauchy (6.4), iar φ este fluxul sistemului dinamic generat de sistemul autonom de ecuații diferențiale.

Desemnăm prin termenul *curbă integrală* graficul unei soluții de ecuație/sistem de ecuații diferențiale.

Traectoria sistemului dinamic ce trece prin η este $\varphi(\mathbb{R}, \eta)$, iar portretul fazic al sistemului dinamic este mulțimea traiectoriilor sistemului dinamic respectiv.

Așa cum s-a mai menționat, soluțiile echilibru (sau soluțiile staționare) ale sistemului $x' = f(x)$ sunt soluțiile constante în timp, adică funcțiile x ce se obțin rezolvând ecuația $f(x) = 0$.

Exemplu. Fie ecuația $x' = x$. Să se rezolve problema lui Cauchy formată din ecuația dată și condiția $x(0) = \eta$ ($\eta \in \mathbb{R}$). Precizați șirul aproximațiilor succesive corespunzător problemei de mai sus și calculați limita sa. Să se afle apoi soluțiile echilibru și să se precizeze sistemul dinamic generat, traiectoriile și portretul fazic.

Soluție. In cazul nostru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

(a) Pentru problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = \eta \end{cases}$$

unica soluție este $x_{*\eta}(t) = \eta e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Șirul aproximațiilor succesive este

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t x_n(s) ds + \eta, n \geq 0,$$

unde x_0 se poate lua orice funcție continuă pe $[-a, a]$, ($a > 0$). De exemplu, pentru $x_0(t) = \eta$ obținem

$$x_1(t) = \eta(1 + t), x_2(t) = \eta(1 + t + \frac{t^2}{2}), \dots, x_n(t) = \eta(1 + t + \dots + \frac{t^n}{n!}).$$

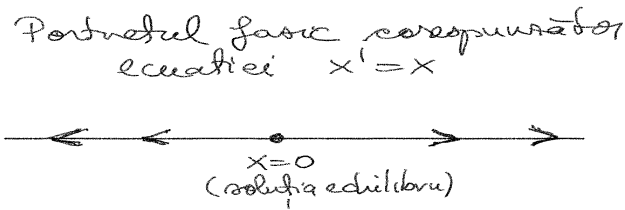
Calculând $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \eta e^t$ obținem (și pe această cale) soluția exactă a problemei.

(b) soluțiile echilibru se obțin rezolvând ecuația $f(x) = 0$. Rezultă că $x = 0$ este unica soluție echilibru. Mai exact, funcția $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ este unica soluție echilibru (staționară).

(c) sistemul dinamic generat: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$, unde $\varphi(t, \eta) := \eta e^t$ este fluxul sistemului dinamic corespunzător ecuației $x' = f(x)$ (se obține rezolvând problema Cauchy $x' = x, x(0) = \eta$).

(d) traiectoriile sistemului dinamic ce trec prin η (corespunzător cazurilor $\eta < 0$, $\eta = 0$, respectiv $\eta > 0$ sunt date de următoarele mulțimi: $] - \infty, 0[$, $\{0\}$, $]0, \infty[$, iar portretul fazic este $\{] - \infty, 0[, \{0\},]0, \infty[\}$.

O reprezentare sugestivă a soluției echilibru și a portretului fazic este \llbracket Phase Portrait \rrbracket



6.4 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Să se arate că unica soluție $x \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ a inecuației integrale

$$|x(t)| \leq \beta \int_a^t |x(s)| ds, t \geq a,$$

unde $a, \beta \geq 0$.

Soluție. Din Lema lui Gronwall deducem $|x(t)| \leq 0, t \geq a$.

2) Să se determine funcțiile continue $x \in C[0, \frac{\pi}{2}]$ cu proprietățile:

- a) $x(t) \geq e^{t^3}$, oricare ar fi $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
 b) x verifică relația $x(t) \leq 1 + 3 \int_0^t s^2 x(s) ds, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Soluție. Din b) deducem (via Lema lui Gronwall) că

$$x(t) \leq 1 \cdot e^{3 \int_0^t s^2 ds} = e^{t^3}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Din a) rezultă că $x(t) = e^{t^3}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Fie ecuația $x' = 1 - x$. Să se afle soluțiile echilibru și să se precizeze sistemul dinamic generat, traiectoriile și portretul fazic (în format de mulțime și format grafic).

Soluție. În acest caz $f(x) = 1 - x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soluțiile echilibru rezultă din rezolvarea ecuației $f(x) = 0$, adică $x(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$. Pentru a preciza portretul fazic aferent rezolvăm problema lui Cauchy

$$x' = 1 - x, x(0) = \eta.$$

Avem $x_\eta^*(t) = (\eta - 1)e^{-t} + 1$, $t \in \mathbb{R}$. Deci, sistemul dinamic generat este $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$, unde $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dat de relația

$$\varphi(t, \eta) = x_\eta^*(t) = (\eta - 1)e^{-t} + 1.$$

4) Să se rezolve problema lui Cauchy $x'(t) = \sqrt{x(t)}$, $x(0) = \eta$, unde $\eta > 0$. Există soluții ale problemei definite pe \mathbb{R} ?

Soluție. Să notăm faptul că ne interesează funcții $x \in C^1$ cu $x(t) \geq 0$ și $x'(t) \geq 0$, $t \in I$. Observăm că $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ e soluție a ecuației (dar nu și pentru problema lui Cauchy). Pentru x diferit de funcția nulă, prin separarea variabilelor și impunerea condiției lui Cauchy, obținem

$$x(t) = \frac{(t + 2\sqrt{\eta})^2}{4}, t \in \mathbb{R}.$$

Din $x'(t) \geq 0$ rezultă $t \geq -2\sqrt{\eta}$. Deci,

$$x(t) = \frac{(t + 2\sqrt{\eta})^2}{4}, t \in [-2\sqrt{\eta}, \infty[$$

este soluție a problemei. Unica soluție de clasă C^1 definită pe \mathbb{R} este

$$x_\eta^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < -2\sqrt{\eta} \\ \frac{(t+2\sqrt{\eta})^2}{4}, & \text{dacă } t \geq -2\sqrt{\eta} \end{cases}$$

5) Să se rezolve ecuațiile integrale:

$$(a) x(t) = 2 \int_0^t sx(s)ds + 1, t \geq 0.$$

$$(b) x(t) = \int_0^1 (t+s)x(s)ds + 1, t \in [0, 1].$$

Soluție. a) Este o ecuație integrală de tip Volterra. Derivăm membru cu membru, avem $x'(t) = 2tx(t), t \geq 0$. Considerând $t = 0$ în ecuația integrală avem $x(0) = 1$. Rezolvând problema lui Cauchy astfel obținută, găsim $x^*(t) = e^{t^2}, t \in [0, \infty[$.

(b) Este o ecuație integrală Fredholm. Scriem succesiv:

$$x(t) = \int_0^1 (t+s)x(s)ds + 1 \Leftrightarrow x(t) = t \int_0^1 x(s)ds + \int_0^1 sx(s)ds + 1.$$

Notăm $c_1 := \int_0^1 x(s)ds, c_2 := \int_0^1 sx(s)ds$. Atunci, forma soluției este $x(t) = c_1t + c_2 + 1$. Inlocuind pe $x(t) = c_1t + c_2 + 1$ în sistemul format din cele două notații, obținem:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 (c_1s + c_2 + 1) \\ c_2 = \int_0^1 s(c_1t + c_2 + 1). \end{cases}$$

Rezolvând sistemul algebric liniar în necunscutele c_1, c_2 găsim $c_1 = -12, c_2 = -7$. Astfel, unica soluție este $x^*(t) = -12t - 6$.

B. Exerciții propuse.

1) Să se determine soluțiile nenegative ale ecuației:

$$x(t) = 2 \int_0^t s^2 e^{-s^2} x(s)ds, t \in [0, 4].$$

2) Fie ecuația $x' = -x$. Să se afle soluțiile echilibru și să se precizeze sistemul dinamic generat, traiectoriile și portretul fazic (în format de mulțime și format grafic).

3) Să se rezolve problema lui Cauchy $x'(t) = \sqrt{x(t)}, x(0) = 0$.

4) Să se rezolve ecuațiile integrale:

$$(a) x(t) = \int_0^t (s^2 + x(s))ds, t \geq 0.$$

(b) $x(t) = \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds + \cos 3t, t \in [0, 1]$, unde λ este un parametru real.

Capitolul 7

Sisteme de ecuații diferențiale liniare

În acest capitol vom prezenta metode de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiale liniare de ordinul 1. La aplicații, vom studia doar cazul sistemelor de două ecuații diferențiale liniare de ordinul 1.

7.1 Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene

Fie sistemul de ecuații diferențiale liniare și omogene

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t), \end{cases} \quad (7.1)$$

unde $a_{ij} \in C[a, b]$ pentru $i, j \in \{1, \dots, n\}$, iar $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Vectorial, putem scrie sistemul de mai sus în forma

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (7.2)$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ este o matrice de funcții continue, iar

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

este funcția necunoscută.

Să notăm cu \mathcal{S}_0 mulțimea tuturor soluțiilor sistemului (7.2).

Scopul acestui capitol este să rezolvăm sistemul liniar și neomogen de forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad (7.3)$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ este o matrice de funcții continue, iar

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

este o funcție vectorială continuă dată (termenul liber al sistemului neomogen).

Să notăm cu \mathcal{S} mulțimea tuturor soluțiilor sistemului (7.3).

Din teoremele de existență și unicitate, știm că, oricare ar fi $t_0 \in [a, b]$ și oricare ar fi $X^0 \in \mathbb{R}^n$ există și este unică o soluție $X^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a problemei lui Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Conform teoriei sistemelor liniare, se știe că

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde \tilde{X} este o soluție oarecare a sistemului neomogen (7.3).

7.1. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE ȘI OMOGENE 91

În acest paragraf, vom studia sistemul omogen (7.2). Rezultatul teoretic principal cu privire la acest sistem este următorul.

Teorema (de structură a mulțimii soluțiilor). *Fie sistemul liniar și omogen (7.2), unde $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ este o matrice de funcții continue. Atunci mulțimea \mathcal{S}_0 a tuturor soluțiilor sale este un spațiu liniar de dimensiune n .*

Demonstrație. Avem de arătat două lucruri:

- 1) mulțimea \mathcal{S}_0 a soluțiilor sistemului (7.2) este un spațiu liniar;
- 2) $\dim \mathcal{S}_0 = n$.

Pentru 1), observăm că au loc relațiile:

- 1)-a $\forall X, Y \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow X + Y \in \mathcal{S}_0$;
- 1)-b $\forall X \in \mathcal{S}_0, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot X \in \mathcal{S}_0$.

Pentru a demonstra 2) să notăm că e suficient să arătăm că există un izomorfism de spațiu liniar între \mathcal{S}_0 și \mathbb{R}^n . Va rezulta concluzia 2). Fie $t_0 \in [a, b]$ oarecare, dar fixat. Definim $T : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, X \rightarrow T(X)$ prin

$$T(X) = X(t_0).$$

Atunci:

- 2)-a T este liniară, i.e., $T(\lambda X + \mu Y) = \lambda T(X) + \mu T(Y), \forall X, Y \in \mathcal{S}_0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- 2)-b T este bijectivă, căci oricare ar fi $X^0 \in \mathbb{R}^n$ există și este unică (din teorema de existență și unicitate a soluției problemei lui Cauchy liniare) o soluție $X^* \in \mathcal{S}_0$ a problemei lui Cauchy

$$X'(t) = A(t)X(t), X(t_0) = X^0$$

Cu aceasta, teorema e demonstrată. \square

Observație. Din Teorema anterioară rezultă că \mathcal{S}_0 admite o bază formată din n elemente, adică n elemente din \mathcal{S}_0 liniar independente. Fie (X^1, X^2, \dots, X^n) o bază în \mathcal{S}_0 . Aceasta înseamnă că fiecare vector

$$X^1 := \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ \dots \\ x_n^1(t) \end{pmatrix}, \dots, X^n := \begin{pmatrix} x_1^n(t) \\ \dots \\ x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

este o soluție a sistemului omogen (7.2).

Observație. Reamintesc că un sistem (X^1, X^2, \dots, X^n) se numește liniar independent dacă oricare ar fi $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ următoarea implicație are loc:

$$\text{dacă } \sum_{i=1}^n c_i X^i = 0 \text{ atunci } c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Definiție. Fie (X^1, X^2, \dots, X^n) o bază în \mathcal{S}_0 . Atunci matricea

$$U := (X^1 X^2 \dots X^n)$$

se numește o matrice fundamentală de soluții pentru sistemul omogen (7.2). În mod evident $U \in C^1([a, b], \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}))$.

Următoarele rezultate sunt importante pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare.

Lemă. Fie sistemul liniar și omogen (7.2), unde $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ este o matrice de funcții continue. Dacă $U = U(t)$ este o matrice fundamentală de soluții, atunci U verifică ecuația matriceală

$$U'(t) = A(t)U(t). \quad (7.5)$$

Și reciproc.

Demonstrație. Avem de arătat că

$$(X^1(t)X^2(t) \dots X^n(t))' = A \cdot (X^1 X^2 \dots X^n)$$

ceea ce revine la

$$((X^1)'(X^2)' \dots (X^n)') = A \cdot (X^1(t)X^2(t) \dots X^n(t)),$$

adică la $(X^i)' = AX^i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ceea ce e adevărat. \square

Observație. Este ușor de văzut că matricea fundamentală de soluții nu este unică. Dacă \tilde{C} este o matrice constantă nesingulară cu n linii și n coloane, atunci $Y(t) = U(t)\tilde{C}$ este o matrice fundamentală de soluții.

7.1. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE ȘI OMOGENE 93

Intr-adevăr, din Lema precedentă știm că $U' = AU$. Intrebarea este dacă avem și $Y' = AY$. Verificăm acest lucru

$$\left(U(t)\tilde{C} \right)' = A \left(U(t)\tilde{C} \right) \Leftrightarrow (U)' \tilde{C} = AU\tilde{C}$$

Dacă înmulțim la dreapta cu \tilde{C}^{-1} avem $U' = AU$, ceea ce este adevărat. Mai mult, reciproc, orice soluție $Y = Y(t)$ a sistemului omogen (7.2) poate fi reprezentată sub forma $Y(t) = U(t)C$, unde $C \in \mathbb{R}^n$. \square

Definiție. Fie

$$U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$$

o matrice fundamentală de soluții pentru sistemul omogen (7.2). Atunci Wronskianul asociat acestuia este funcția $W : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită de $W(t) := \det U(t)$.

Pentru a verifica că un sistem de soluții pentru (7.2) este liniar independent, teorema următoare este importantă.

Teorema. *Sistemul de soluții $U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$ formează o matrice fundamentală de soluții dacă și numai dacă există $t_0 \in [a, b]$ astfel ca $W(t_0) \neq 0$.*

Această teoremă ne arată că pentru a arăta că soluțiile sistemului omogen (7.2) sunt liniar independente dacă reușim să arătăm că Wronskianul nu se anulează în cel puțin un punct $t \in [a, b]$.

Concluzii. În acest paragraf, am arătat că pentru a afla toate soluțiile sistemului liniar și omogen (7.2) este suficient să găsim n soluții liniar independente ale acestuia. Dacă X^1, X^2, \dots, X^n sunt n soluții liniar independente ale sistemului (7.2) și notăm $U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$, atunci mulțimea tuturor soluțiilor sale este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C \mid C \in \mathbb{R}^n\}.$$

Din păcate, în cazul general în care A este o matrice oarecare de funcții continue nu avem o metodă generală de găsim a unei matrice fundamentale de soluții. Vom vedea că putem face acest lucru doar în cazul particular în care A este o matrice de numere reale.

7.2 Sisteme de ecuații diferențiale liniare și neomogene

Fie sistemul liniar și neomogen de ecuații diferențiale de ordinul 1 de forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (7.6)$$

Conform teoriei sistemelor liniare, se știe că

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde \tilde{X} este o soluție oarecare a sistemului neomogen (7.6) iar \mathcal{S}_0 este mulțimea soluțiilor sistemului liniar și omogen $X'(t) = A(t)X(t)$. Din paragraful precedent, știm că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C \mid C \in \mathbb{R}^n\},$$

unde U este o matrice fundamentală de soluții pentru sistemul omogen.

Scopul acestui paragraf este să arătăm cum se poate afla \tilde{X} dacă cunoaștem pe \mathcal{S}_0 . Metoda este cunoscută sub numele de metoda variației constantelor a lui Lagrange.

Căutăm pe \tilde{X} sub forma

$$\tilde{X} := U(t)\Phi(t),$$

unde Φ este o funcție de clasă C^1 , deocamdată necunoscută. Φ se determină din condiția ca \tilde{X} să fie soluție a sistemului neomogen (7.6). Înlocuind în (7.6) avem

$$U'(t)\Phi(t) + U(t)\Phi'(t) = A(t)U(t)\Phi(t) + B(t).$$

Dar $A(t)U(t) = U'(t)$ și astfel după reducerea celor doi termeni asemenea găsim

$$U(t)\Phi'(t) = B(t) \text{ adică } \Phi'(t) = U^{-1}(t)B(t).$$

7.2. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE ȘI NEOMOGENE 95

În final $\Phi(t) = \int_{t_0}^t U^{-1}(s)B(s)ds$ și astfel am găsit

$$\tilde{X}(t) = U(t) \int_{t_0}^t U^{-1}(s)B(s)ds.$$

În concluzie, mulțimea tuturor soluțiilor sistemului liniar și neomeogen (7.6) este

$$\mathcal{S} := \left\{ U(t)C + \int_{t_0}^t U(t)U^{-1}(s)B(s) \mid C \in \mathbb{R}^n \right\} ds.$$

În particular, pentru problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases} \quad (7.7)$$

unica sa soluție se reprezintă prin

$$X^*(t) = U(t)U^{-1}(t_0)X^0 + \int_{t_0}^t U(t)U^{-1}(s)B(s),$$

în care vectorul constant C s-a determinat din condiția $X(t_0) = X^0$.

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \cos^2(t) + x_2(t)(\sin t \cos t - 1) \\ x_2'(t) = x_1(t)(1 + \sin t \cos t) + x_2(t) \sin^2(t). \end{cases} \quad (7.8)$$

(a) Să se arate că

$$X^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \quad X^2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

sunt soluții ale sistemului.

(b) Să se arate că sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent.

(c) Să se scrie soluția generală a sistemului dat.

(d) Să se afle soluția problemei lui Cauchy corespunzătoare sistemului dat și condiției Cauchy $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

(e) Să se afle soluția sistemului liniar și neomogen

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \cos^2(t) + x_2(t)(\sin t \cos t - 1) \\ x_2'(t) = x_1(t)(1 + \sin t \cos t) + x_2(t) \sin^2(t) - \frac{1}{\sin t}, t \in]0, \pi[. \end{cases} \quad (7.10)$$

7.3 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = (1 + \frac{1}{t})x_1(t) - \frac{1}{t}x_2(t) \\ x_2'(t) = \frac{t-2}{t-1}x_1(t) + \frac{1}{t-1}x_2(t), t > 1. \end{cases} \quad (7.11)$$

(a) Să se arate că

$$X^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, X^2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

sunt soluții ale sistemului.

(b) Să se arate că sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent.

(c) Să se scrie soluția generală a sistemului dat.

(d) Să se afle soluția problemei lui Cauchy corespunzătoare sistemului dat și condiției Cauchy $x_1(2) = 1, x_2(2) = 4$.

(e) Să se afle soluția sistemului liniar și neomogen

$$\begin{cases} x_1'(t) = (1 + \frac{1}{t})x_1(t) - \frac{1}{t}x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) = \frac{t-2}{t-1}x_1(t) + \frac{1}{t-1}x_2(t) + t, t > 1. \end{cases} \quad (7.13)$$

Soluție. a) se verifică direct (prin înlocuire în sistem) că $(x_1, x_2) = (t, t^2)$ respectiv $(x_1, x_2) = (e^t, e^t)$ sunt soluții ale sistemului omogen dat.

b) se arată că

$$W(t) = \det U(t) = \det(X^1(t) \ X^2(t)) = \begin{vmatrix} t & e^t \\ t^2 & e^t \end{vmatrix}$$

este diferit de zero în cel puțin un punct $t \in]1, \infty[$ (de exemplu în $t = 2$). În consecință, matricea $U = U(t) = (X^1(t) \ X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluții pentru sistemul omogen.

c) Soluția generală a sistemului omogen este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

d) Din condițiile inițiale date $X(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, rezultă $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$.

Deci, soluția unică a problemei lui Cauchy este $X^*(t) = U(t) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$.

e) Folosind metoda variației constantelor, căutăm soluția particulară a sistemului neomogen sub forma $\tilde{X}(t) = U(t)\Phi(t)$, unde Φ este o funcție de clasă C^1 , deocamdată necunoscută. Ea se determină din condiția ca \tilde{X} să verifice sistemul neomogen. Prin înlocuire rezultă condiția $U(t)\Phi'(t) =$

$B(t)$, unde $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ este neomogenitatea sistemului liniar. După

calcul rezultă $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ 1 \end{pmatrix}$ și astfel $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} t \ln t + e^t \\ t^2 \ln t + e^t \end{pmatrix}$. În

consecință, soluția generală sistemului liniar și neomogen este

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \tilde{X} = \{X(t) = U(t)C + \tilde{X}(t) : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

2) Fie funcțiile

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

liniar independente. Să se arate că \tilde{X}, \tilde{Y} sunt soluții ale sistemului

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} x'_1 & \tilde{x}'_1 & \tilde{y}'_1 \\ x_1 & \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x'_2 & \tilde{x}'_2 & \tilde{y}'_2 \\ x_2 & \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right. \quad (7.15)$$

Soluție. Se verifică prin înlocuire directă.

3) Să se construiască sistemul liniar și omogen care are ca și sistem fundamental de soluții matricea

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Soluție. Se aplică problema 2).

B. Exerciții propuse.

1) Fie sistemul

$$\begin{cases} x'_1(t) = (t - \frac{1}{t})x_1(t) + (\frac{1}{t^2} - 1)x_2(t) \\ x'_2(t) = t^2x_1(t) + (\frac{1}{t} - t)x_2(t), \quad t > 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

(a) Să se arate că

$$X^1(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad X^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

sunt soluții ale sistemului.

(b) Să se arate că sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent.

(c) Să se scrie soluția generală a sistemului dat.

(d) Să se afle soluția problemei lui Cauchy corespunzătoare sistemului dat și condiției Cauchy $x_1(1) = 0, x_2(1) = 2$.

(e) Să se afle soluția sistemului liniar și neomogen

$$\begin{cases} x_1'(t) = (t - \frac{1}{t})x_1(t) + (\frac{1}{t^2} - 1)x_2(t) - t \\ x_2'(t) = t^2x_1(t) + (\frac{1}{t} - t)x_2(t) + t, \quad t > 0. \end{cases} \quad (7.18)$$

și a problemei Cauchy asociate, unde $x_1(1) = 0, x_2(1) = 2$.

2) Să se construiască sistemul liniar și omogen care are ca și sistem fundamental de soluții matricea

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -e^t \sin t \\ \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Capitolul 8

Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

8.1 Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene cu coeficienți constanți

Considerăm sistemul de două ecuații diferențiale liniare și omogene cu coeficienți constanți, de forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (8.1)$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

este o matrice de numere reale. În formă vectorială, sistemul (8.1) se scrie

$$X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R}.$$

Recunoaștem un sistem liniar și omogen. Notăm cu \mathcal{S}_0 mulțimea tuturor soluțiilor sale.

Din teorema de structură a mulțimii soluțiilor sistemelor liniare știm că \mathcal{S}_0 este un spațiu liniar de dimensiune 2. Este deci suficient să găsim două soluții liniar independente ale sistemului. Acestea vor determina o matrice fundamentală de soluții pentru sistem (să presupunem că e notată cu $U = U(t)$). Atunci soluția generală a sistemului va fi

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

Caut soluții ale sistemului sub forma $X(t) = e^{rt}V$, unde $r \in \mathbb{R}$ iar

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

este din \mathbb{R}^2 , cu $V \neq 0$. Inlocuind în sistemul pe care-l studiem

$$X'(t) = A \cdot X(t),$$

obținem

$$re^{rt}V = Ae^{rt}V \Leftrightarrow (A - rI_2)V = 0.$$

Sistemul

$$(A - rI_2)V = 0 \tag{8.2}$$

se numește sistemul valorilor și funcțiilor proprii corespunzătoare matricei A . Se știe de la disciplina de Algebră liniară că r este valoare proprie iar V corespunzător este vector propriu.

Pentru că noi căutăm soluții V nenule ale sistemului, știm că pentru ca un sistem omogen să admită soluții nenule condiția este ca determinatul sistemului să fie zero, adică

$$\det(A - rI_2) = 0. \tag{8.3}$$

Ecuția (8.3) este o ecuație algebrică de gradul doi în necunoscuta r și ea se numește ecuația caracteristică asociată sistemului (8.1). Explicitând ecuația de mai sus, obținem

$$r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{8.4}$$

8.1. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE ȘI OMOGENE CU COEFICIENȚI CONSTANTI

Observând că

$$(a_{11} + a_{22}) = \text{tr}(A) \quad (\text{unde } \text{tr}(A) \text{ notează urma matricei } A)$$

și

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A),$$

ecuația caracteristică se mai scrie

$$r^2 - \text{tr}(A)r + \det(A) = 0. \quad (8.5)$$

În funcție de natura rădăcinilor, distingem trei cazuri:

Cazul I: rădăcini reale și distincte.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 \neq r_2$.

Atunci pentru fiecare r_1, r_2 determinăm soluții nenule V^1, V^2 ale sistemului (8.2). Am obținut două soluții

$$X^1(t) = e^{r_1 t} V^1, \quad X^2(t) = e^{r_2 t} V^2$$

ale sistemului de ecuații diferențiale (8.1). Mai mult, sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent, căci determinantul matricei U dată de

$$U(t) = (X^1(t) \ X^2(t))$$

nu se anulează (de exemplu în $t = 0$).

În consecință, $U(t) = (X^1(t) \ X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluții, ceea ce arată că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}$$

este mulțimea tuturor soluțiilor în acest caz.

Exemplu. Să se rezolve în $C^1(\mathbb{R})$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t). \end{cases} \quad (8.6)$$

Cazul II: rădăcini reale egale.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 = r_2$. Notăm valoarea comună cu r , i.e., $r := r_1 = r_2$.

Atunci, ca și la Cazul I, pentru r determinăm vectorul propriu corespunzător, adică soluția nenulă V a sistemului (8.2). Astfel, obținem soluția sistemului sub forma $X^1(t) = e^{rt}V$. Caut o a doua soluție (liniar independentă în raport cu prima) sub forma

$$X^2(t) = e^{rt}(tV + W), \quad (8.7)$$

unde W este un vector necunoscut pe care-l determinăm din condiția ca X^2 să verifice sistemul dat. Avem $(X^2(t))' = re^{rt}(tV + W) + e^{rt}V$. Înlocuind în sistemul $X' = AX$ avem

$$re^{rt}(tV + W) + e^{rt}V = Ae^{rt}(tV + W)$$

sau echivalent

$$tre^{rt}V + re^{rt}W + e^{rt}V = tAe^{rt}V + e^{rt}AW.$$

Ținând cont că

$$Ae^{rt}V = AX^1 \text{ și } re^{rt}V = (X^1(t))'$$

obținem

$$(A - rI_2)W = V. \quad (8.8)$$

Acest sistem (în necunoscuta W) este compatibil căci rangul matricei extinse $(A - rI_2 \quad V)$ este egal cu rangul matricei $A - rI_2$ a sistemului și este egal cu 1. Astfel se determină W , care induce a doua soluție $X^2(t) = e^{rt}(tV + W)$ a sistemului liniar și omogen. Mai mult, sistemul de vectori $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent. De aceea, sistemul de mai sus determină o bază în mulțimea soluțiilor, și atunci $U(t) = (X^1(t) \quad X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluții, ceea ce arată că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}$$

8.1. SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE ȘI OMOGENE CU COEFICIENȚI COMPLEXI

este mulțimea tuturor soluțiilor în acest caz.

Exemplu. Să se rezolve în $C^1(\mathbb{R})$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \quad (8.9)$$

Cazul III: rădăcini complexe conjugate.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Avem

$$\begin{aligned} X &= e^{r_1 t} V = e^{(\alpha+i\beta)t} V = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (V^1 + iV^2) = \\ &e^{\alpha t} (V^1 \cos \beta t - V^2 \sin \beta t) + ie^{\alpha t} (V^1 \sin \beta t + V^2 \cos \beta t), \end{aligned}$$

unde am scris $V = V^1 + iV^2$. În mod evident, X e o soluție complexă a sistemului. Dar sistemul nostru este unul liniar și omogen cu coeficienți reali, deci

$$\operatorname{Re}(X) = e^{\alpha t} (V^1 \cos \beta t - V^2 \sin \beta t) := X^1(t)$$

respectiv

$$\operatorname{Im}(X) = e^{\alpha t} (V^1 \sin \beta t + V^2 \cos \beta t) := X^2(t)$$

sunt soluții reale ale sistemului și ele determină o matrice fundamentală de soluții pentru sistem. Astfel, $U(t) = (X^1(t) \ X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluții, ceea ce arată că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}$$

este mulțimea tuturor soluțiilor în acest caz.

Exemplu. Să se rezolve în $C^1(\mathbb{R})$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 9x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \quad (8.10)$$

8.2 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

a) Să se scrie sistemul în formă vectorială $X' = AX$, precizându-se matricea A și vectorul necunoscut X ;

b) Să se afle o matrice fundamentală de soluții U și să se scrie soluția generală a sa.

c) Să se rezolve sistemul neomogen $X' = AX + B$ unde

$$B = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

d) Să se rezolve problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0. \end{cases}$$

2) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleași exigențe ca și la problema 1), considerând la c) și d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

3) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleași exigențe ca și la problema 1), considerând la c) și d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B. Exerciții propuse.

1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 10x_1(t) - 4x_2(t). \end{cases}$$

a) Să se scrie sistemul în formă vectorială $X' = AX$, precizându-se matricea A și vectorul necunoscut X ;

b) Să se afle o matrice fundamentală de soluții U și să se scrie soluția generală a sa.

c) Să se rezolve sistemul neomogen $X' = AX + B$ unde

$$B = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

d) Să se rezolve problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 1. \end{cases}$$

2) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleași exigențe ca și la problema propusă 1), considerând la c) și d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

3) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleași exigențe ca și la problema propusă 1), considerând la c) și d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Capitolul 9

Ecuatii diferențiale liniare de ordinul 2

În acest capitol vom considera cazul ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul al doilea. Vom considera mai întâi cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți funcții continue și apoi cazul particular în care coeficienții ecuației liniare sunt constanți. Și într-un caz și în celălalt vom aborda și cazul ecuației diferențiale liniare neomogene.

9.1 Ecuatii diferențiale liniare de ordinul 2

Să considerăm în acest paragraf cazul urătoarei ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi liniare și neomogene

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I, \quad (9.1)$$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale, iar $a, b, g \in C(I)$.

Printr-o soluție a ecuației (9.1) pe intervalul $J \subseteq I$ înțelegem o funcție $x \in C^2(J)$ ce verifică ecuația (9.1) pentru fiecare $t \in J$.

Observație. Așa cum am mai precizat, orice ecuație de ordinul al doilea este echivalentă cu un sistem de două ecuații de ordinul întâi.

Intr-adevăr, în cazul nostru, dacă notăm

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$$

atunci avem $x'_1 = x_2$ și $x'_2 = -ax_2 - bx_1 + g$. Cu alte cuvinte, ecuația (9.1) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -bx_1 - ax_2 + g. \end{cases} \quad (9.2)$$

Dacă notăm

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix},$$

și

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

atunci sistemul (9.2) se scrie vectorial

$$X' = AX + B.$$

Din capitolul anterior știm că, dacă \mathcal{S} este mulțimea soluțiilor sale, atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde \mathcal{S}_0 este mulțimea soluțiilor sistemului omogen $X' = AX$ asociat, iar \tilde{X} este o soluție oarecare a sistemului neomogen $X' = AX + B$.

În consecință, putem enunța următoarea teoremă de structură a mulțimii soluțiilor ecuației (9.1) (prin adaptarea la acest caz particular a teoremei de structură din cazul sistemelor liniare).

Teoremă. Fie ecuația $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale, iar $a, b, g \in C(I)$. Atunci, avem următoarele concluzii:

(i) problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I \\ x(t_0) = x^0, x'(t_0) = y^0 \end{cases} \quad (9.3)$$

(unde $t_0 \in I$ și $x^0, y^0 \in \mathbb{R}$ sunt date) are soluție unică;

(ii) Mulțimea \mathcal{S}_0 a tuturor soluțiilor ecuației omogene asociate este spațiu liniar de dimensiune 2;

(iii) mulțimea \mathcal{S} a tuturor soluțiilor ecuației (9.1) are reprezentarea

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{x}\},$$

unde \tilde{x} este o soluție oarecare a ecuației neomogene (9.1).

În consecință, și în acest caz, pe de o parte trebuie să punem în evidență o bază în \mathcal{S}_0 (două soluții liniar independente ale ecuației omogene asociate $x'' + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0, t \in I$), iar pe de altă parte să determinăm (prin metoda variației constantelor) o soluție particulară (oarecare) a ecuației neomogene $x'' + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I$.

Precizăm de asemenea că metoda variației constantelor presupune în acest caz, căutarea unei soluții particulare (oarecare) a ecuației neomogene sub forma

$$\tilde{x}(t) = \varphi_1(t)x^1(t) + \varphi_2(t)x^2(t),$$

unde x^1, x^2 sunt două soluții liniar independente ale ecuației omogene asociate $x'' + a(t)x'(t) + b(t) = 0$, iar φ_1, φ_2 sunt două funcții de clasă C^2 deocamdată necunoscute. Ele se determină dintr-un sistem de două ecuații în necunoscutele φ_1' și φ_2' . Mai precis, sistemul este format din ecuația

$$\varphi_1'x^1 + \varphi_2'x^2 = 0$$

(rezultată din calculul lui \tilde{x}' și impunerea condiției ca suma termenilor ce conțin pe φ_1' și φ_2' să fie zero), respectiv din ecuația

$$\varphi_1'(x^1)' + \varphi_2'(x^2)' = g(t),$$

rezultată în urma înlocuirii $\tilde{x}(t)$ în ecuația neomogenă $x'' + a(t)x'(t) + b(t) = g(t)$ și identificării celor doi membri. În consecința, φ_1, φ_2 se obțin din rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \varphi_1'x^1 + \varphi_2'x^2 = 0 \\ \varphi_1'(x^1)' + \varphi_2'(x^2)' = g(t). \end{cases} \quad (9.4)$$

9.2 Ecuatii diferențiale liniare de ordinul 2 cu coeficienți constanți

Să considerăm în acest paragraf cazul ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul doi liniare cu coeficienți constanți.

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t), t \in I, \quad (9.5)$$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale, iar $a, b \in \mathbb{R}$, iar $g \in C(I)$.

Printr-o soluție a ecuației (9.5) pe intervalul $J \subseteq I$ înțelegem o funcție $x \in C^2(J)$ ce verifică ecuația (9.5) pentru fiecare $t \in J$.

Știm din paragraful precedent că, dacă notăm

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$$

atunci ecuația (9.5) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2 \\ x_2'(t) = -bx_1(t) - ax_2(t) + g(t). \end{cases} \quad (9.6)$$

9.2. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL 2 CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Din capitolul anterior știm că, dacă \mathcal{S} este mulțimea soluțiilor sale, atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde \mathcal{S}_0 este mulțimea soluțiilor sistemului omogen asociat, iar \tilde{X} este o soluție oarecare a sistemului neomogen.

Să ne concentrăm pe sistemul omogen asociat

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_2 \\ x_2'(t) = -bx_1(t) - ax_2(t). \end{cases} \quad (9.7)$$

Matricea A este în acest caz egală cu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată ei este

$$\det(A - rI_2) = 0.$$

Aceasta conduce la ecuația de gradul doi

$$r^2 + ar + b = 0. \quad (9.8)$$

După cum se observă ea se poate scrie direct din forma ecuației diferențiale omogene de ordinul doi și se numește ecuația caracteristică asociată ecuației diferențiale liniare și omogene de ordinul doi

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, t \in I. \quad (9.9)$$

În funcție de discriminantul ecuației de gradul doi (9.8) distingem următoarele cazuri:

Cazul I. rădăcini reale și distincte.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 \neq r_2$. Atunci $x^1(t) = e^{r_1 t}$ și $x^2(t) = e^{r_2 t}$ sunt două soluții liniar independente ale ecuației diferențiale (9.9). În consecință, soluția generală a ecuației este

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Cazul II. rădăcini reale și egale.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 = r_2 := r$. Atunci $x^1(t) = e^{rt}$ și $x^2(t) = te^{rt}$ sunt două soluții linear independente ale ecuației diferențiale (9.9). În consecință, soluția generală a ecuației este

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Cazul I. rădăcini complexe nereale.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci funcțiile $x^1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ și $x^2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ sunt două soluții linear independente ale ecuației diferențiale (9.9). În consecință, soluția generală a ecuației este

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple. Să se rezolve ecuațiile diferențiale de ordinul doi:

- (a) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
- (b) $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
- (c) $x''(t) + 6x'(t) + 34x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
- (d) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 6e^t, t \in \mathbb{R}$.

9.3 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Fie ecuația

$$t^2 x''(t) - 2t x'(t) + 2x(t) = \frac{1}{t}, t \in [1, \infty[.$$

(a) Știind că $x_1(t) = t, x_2(t) = t^2$ sunt soluții ale ecuației

$$t^2 x''(t) - 2t x'(t) + 2x(t) = 0, t \in [1, \infty[$$

să se determine soluția generală a ecuației date;

(b) Să se rezolve problema Cauchy formată din ecuația dată și condițiile inițiale $x(1) = 0, x'(1) = 2$.

2) Să se rezolve ecuațiile diferențiale de ordinul doi:

(a) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.

(b) $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.

(c) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.

(d) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = te^{-t}, t \in \mathbb{R}$.

3) Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

(a) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t - \cos t$, cu condițiile inițiale date de $x(0) = 0, x'(0) = 2$.

(b) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = te^{-t}$, cu condițiile $x(0) = -1, x'(0) = 1$.

B. Exerciții propuse.

1) Fie ecuația

$$tx''(t) + 2x'(t) - tx(t) = e^t, t > 0.$$

(a) Știind că $x_1(t) = \frac{e^t}{t}, x_2(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ sunt soluții ale ecuației

$$tx''(t) + 2x'(t) - tx(t) = 0, t > 0$$

să se determine soluția generală a ecuației date;

(b) Să se rezolve problema Cauchy formată din ecuația dată și condițiile inițiale $x(1) = 0, x'(1) = 1$.

2) Să se rezolve ecuațiile diferențiale de ordinul doi:

(a) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}, t \in \mathbb{R}$.

(b) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 + 1, t \in \mathbb{R}$.

(c) $x''(t) - 2x'(t) + 17x(t) = \cos 2t, t \in \mathbb{R}$.

3) Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

(a) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}$, cu condițiile inițiale date de $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

(b) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 + 1$, cu condițiile $x(0) = -1, x'(0) = 1$.

(c) $x''(t) - 2x'(t) + 17x(t) = \cos 2t$, cu condițiile $x(\frac{\pi}{2}) = 4, x'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Capitolul 10

Aspecte dinamice în teoria sistemelor de două ecuații diferențiale liniare

În acest capitol vom face considerații asupra unor aspecte dinamice din teoria sistemelor de două ecuații diferențiale liniare.

10.1 Noțiunea de sistem dinamic

Fie sistemul autonom de ecuații diferențiale de forma

$$X' = f(X),$$

unde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție de clasă C^1 . Atunci noțiunea de sistem dinamic asociat se definește în felul următor.

Presupunem că oricare ar fi $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)) \\ X(0) = \eta \end{cases} \quad (10.1)$$

are soluție unică (pe care o notăm cu X_η^*) definită pe \mathbb{R} . Considerăm, de asemenea, funcția $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definită de relația $\varphi(t, \eta) = X_\eta^*(t)$.

Atunci, prin definiție, tripletul $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \varphi)$ se numește sistemul dinamic generat de sistemul autonom de ecuații diferențiale $X' = f(X)$.

În tripletul de mai sus, domeniul \mathbb{R}^n de definiție al funcției f se numește spațiul fazelor (stărilor), \mathbb{R} este domeniul de definiție al soluției problemei lui Cauchy (10.1), iar φ este fluxul sistemului dinamic generat de sistemul autonom de ecuații diferențiale.

Traectoria (sau orbita) sistemului dinamic ce trece prin η este $\varphi(\mathbb{R}, \eta)$, iar portretul fazic al sistemului dinamic este mulțimea traiectoriilor sistemului dinamic respectiv.

Așa cum s-a mai menționat, soluțiile echilibru (sau soluțiile staționare) ale sistemului $X' = f(X)$ sunt soluțiile constante în timp, adică funcțiile X ce se obțin rezolvând ecuația $f(X) = 0$.

Vom discuta, în ceea ce urmează, cazul particular al sistemelor autonome de două ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \end{cases} \quad (10.2)$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

este o matrice de numere reale. În formă vectorială, sistemul (10.2) se scrie

$$X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R},$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

este funcția necunoscută.

Printr-o soluție a sistemului (10.2) se înțelege o funcție $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 ce verifică sistemul pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Să ne concentrăm acum atenția asupra unei soluții $X = (x_1, x_2)$ a sistemului de mai sus. În teoria sistemelor dinamice, interesul este focalizat asupra modului în care mărimile x_1 și x_2 variază (fiecare în parte, dar și una față de cealaltă) în raport cu evoluția sistemului în timp ($t \rightarrow \infty$). Pentru aceasta, se pot reprezenta grafic cele două funcții $x_1(t), x_2(t)$ în același sistem de coordonate x_1Ox_2 .

Un alt mod de reprezentare (preponderent folosit) este prin a reprezenta în planul x_1Ox_2 curba de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t), t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (10.3)$$

ceea ce înseamnă, de fapt, reprezentarea curbei descrise de punctul M de coordonate $M(x_1(t), x_2(t))$, când $t \rightarrow \infty$. Această curbă este traiectoria (sau orbita) sistemului dinamic generat de sistemul de ecuații diferențiale. Planul x_1Ox_2 în care facem reprezentarea de mai sus se numește planul fazelor (sau al stărilor). În această reprezentare, traiectoriilor li se adaugă și un sens de parcurgere, marcat printr-o săgeată, care indică sensul parcurgerii lor în evoluția timpului. Rezultatul reprezentării în planul x_1Ox_2 a mai multor traiectorii (orbite) ale aceluiași sistem este portet fazic corespunzător.

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t). \end{cases} \quad (10.4)$$

Se cer:

- soluția generală;
- soluțiile echilibru;
- soluția problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus și condiția inițială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;

- d) sistemul dinamic generat;
 e) curbele integrale corespunzătoare soluției sistemului de mai sus și condiției inițiale de forma $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$;
 f) traiectoriile și portretul fazic.

Soluție. In acest caz, matricea sistemului are forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iar funcția necunoscută este

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pentru rezolvarea sistemului putem aplica metoda reducerii la o ecuație diferențială de ordinul doi. Astfel, dacă derivăm (de exemplu) prima ecuație, avem $x_1''(t) = x_2'(t)$. Folosind a doua ecuație avem

$$x_1''(t) + x_1(t) = 0, t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvăm această ecuație și obținem

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ (unde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Inlocuind în relația $x_1'(t) = x_2(t)$ găsim componenta a doua a soluției generale, anume

$$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

In consecință, dacă notăm cu $U = U(t)$ matricea fundamentală de soluții, unde

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

atunci soluția generală a sistemului de ecuații este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}.$$

b) Soluțiile echilibru ale unui sistem de forma $X' = f(X)$ se obțin rezolvând ecuația $f(X) = 0$. În cazul nostru

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, unica soluție echilibru este $(0, 0)$, obținută prin rezolvarea ecuației

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Impunând condițiile inițiale $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$ asupra soluției generale, găsim

$$C = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

și astfel unica soluție a problemei lui Cauchy este

$$X_\eta^*(t) = U(t)\eta,$$

unde

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

d) Sistemul dinamic generat de sistemul de ecuații diferențiale este

$$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \varphi),$$

unde

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ definit de } \varphi(t, \eta) := U(t)\eta,$$

este fluxul sistemului dinamic.

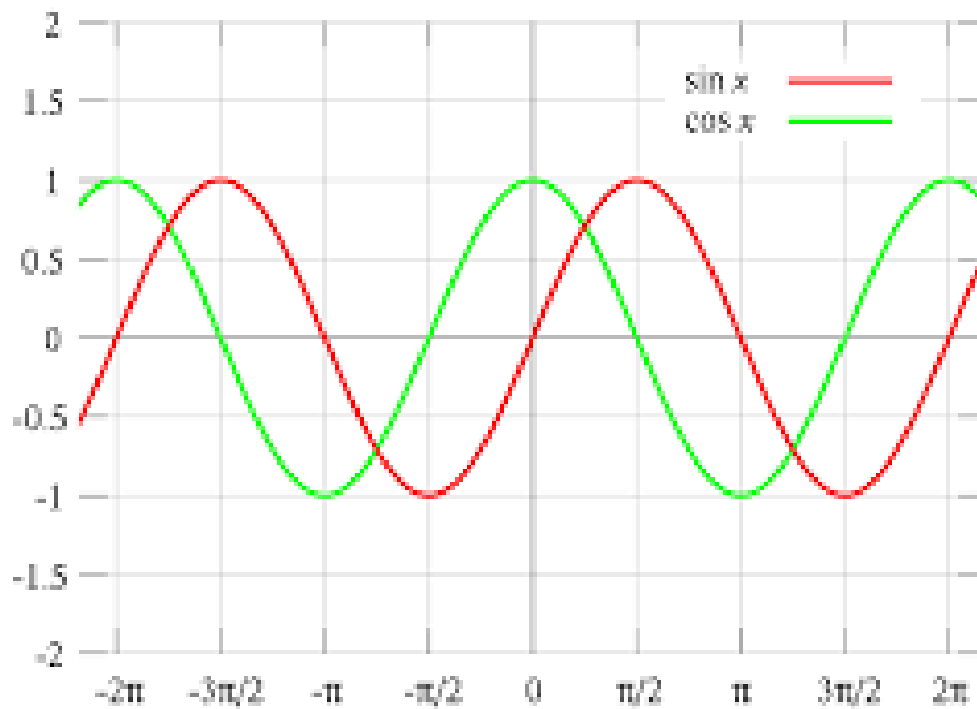
e) Pentru condiția inițială $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ găsim $c_1 = 0, c_2 = 1$. Astfel, unica soluție a acestei probleme Cauchy este

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

sau, în scriere pe componente, avem

$$x_1(t) = \sin t, x_2(t) = \cos t, t \in \mathbb{R}.$$

Curbele integrale corespunzătoare sunt date în figura următoare



f) Conform definiției, traiectoriile ce trec prin punctul η sunt date de $\varphi(\mathbb{R}, \eta)$. Așa cum am mai precizat, acestea se obțin prin reprezentarea în planul x_1Ox_2 a curbei de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t), t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă, de fapt, reprezentarea curbei descrise de punctul M de coordonate $M(x_1(t), x_2(t))$, când $t \rightarrow \infty$. În cazul nostru, de exemplu pentru $\eta = (0, 1)$ am obținut

$$\begin{cases} x_1(t) = \sin t \\ x_2(t) = \cos t, t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

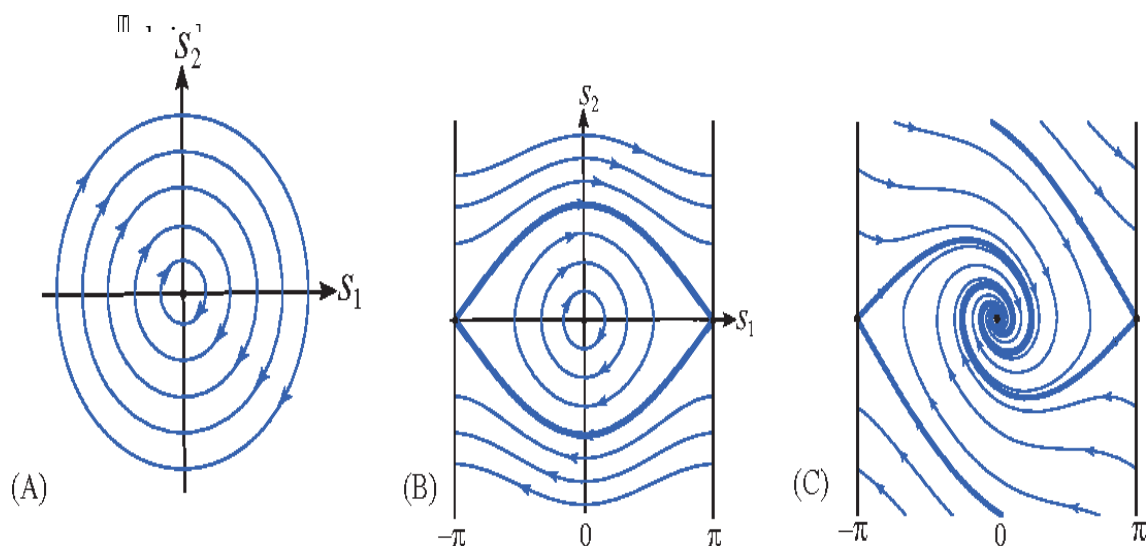
Eliminând t între cele două relații de mai sus obținem curba

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

ceea ce reprezintă cercul unitate din planul x_1Ox_2 . În cazul general, pentru $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ obținem

$$x_1^2 + x_2^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2,$$

adică tot cercuri de rază $r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$. Deci, traiectoriile sunt familii de cercuri. Portretul fazic, definit teoretic ca mulțimea traiectoriilor, este dat de prima figură.



În finalul acestei secțiuni să enunțăm următoarea leamnă, extrem de utilă în găsirea traiectoriilor unui sistem dinamic format din două ecuații.

Lemă. Fie sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (10.5)$$

unde $f_1, f_2 \in C^1(D)$ cu $f_1(x_1, x_2) \neq 0$ pe $D \subset \mathbb{R}^n$ și fie ecuația diferențială

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}. \quad (10.6)$$

Atunci traiectoriile sistemului dinamic (10.5) și curbele integrale ale ecuației (10.6) coincid.

10.2 Exerciții rezolvate și propuse

A. Exerciții rezolvate.

1) Folosind forma specială a membrului drept, să se rezolve ecuațiile liniare și neomogene următoare:

a) $x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = 42te^{3t}$;

b) $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = te^t \cos t$.

2) Să se rezolve ecuația de tip Euler $t^2x''(t) + atx'(t) + bx(t) = g(t)$, $t \in I :=]0, \infty[$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $g \in C(I)$.

Indicație. Metoda I. Se face schimbarea de variabilă $s = \ln t$ și se obține o ecuație liniară în necunoscuta $x = x(s)$; Metoda II. Se caută soluții sub forma $x = t^r$, $r \in \mathbb{R}$.

3) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t). \end{cases}$$

Se cer:

a) soluția generală;

- b) soluțiile echilibru;
- c) soluția problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus și condiția inițială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
- d) sistemul dinamic generat;
- e) curbele integrale corespunzătoare soluției sistemului de mai sus și condiției inițiale de forma $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$;
- f) traiectoriile și portretul fazic.

4) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t). \end{cases}$$

Se cer:

- a) soluția generală;
- b) soluțiile echilibru;
- c) soluția problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus și condiția inițială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
- d) sistemul dinamic generat;
- e) curbele integrale corespunzătoare soluției sistemului de mai sus și condiției inițiale de forma $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$;
- f) traiectoriile și portretul fazic.

A. Exerciții propuse.

1) Folosind forma specială a membrului drept, să se rezolve ecuațiile liniare și neomogene următoare:

a) $x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = 42te^{-3t}$;

b) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = t^2 \cos 2t$.

2) Să se rezolve ecuația de tip Euler $t^2x''(t) + 5tx'(t) + 4x(t) = \ln t, t \in I :=]0, \infty[$.

3) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t). \end{cases}$$

Se cer:

- a) soluția generală;
- b) soluțiile echilibru;
- c) soluția problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus și condiția inițială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
- d) sistemul dinamic generat;
- e) curbele integrale corespunzătoare soluției sistemului de mai sus și condiției inițiale de forma $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$;
- f) traiectoriile și portretul fazic.

4) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t). \end{cases}$$

Se cer:

- a) soluția generală;
- b) soluțiile echilibru;
- c) soluția problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus și condiția inițială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
- d) sistemul dinamic generat;
- e) curbele integrale corespunzătoare soluției sistemului de mai sus și condiției inițiale de forma $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$;
- f) traiectoriile și portretul fazic.

Capitolul 11

Recapitularea noțiunilor fundamentale

În acest capitol vom recapitula câteva dintre chestiunile principale din tematica cursului.

11.1 Cazul ecuațiilor diferențiale

A. Ecuații rezolvabile efectiv

1) Ecuații cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuații diferențiale cu variabile separabile este

$$x'(t) = g(t)h(x),$$

unde (i) g e o funcție continuă pe intervalul $]t_1, t_2[$ (unde $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ sunt acceptate);

(ii) h e o funcție continuă pe intervalul $]x_1, x_2[$ (unde $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$ sunt acceptate).

Necunoscuta ecuației este $x = x(t), t \in I$ (unde $I \subseteq]t_1, t_2[$ este un interval al axei reale) și ea se caută în clasa de funcții C^1 .

Exemple.

a) $x'(t) = x^2(t), x(0) = \eta$ (Discuție după $\eta \in \mathbb{R}$).

b) Să se determine curba plană ce trece prin punctul $A(2, 4)$ și are proprietatea că dacă printr-un punct oarecare al curbei se duc două paralele la axele de coordonate, atunci cele două suprafețe plane în care curba împarte dreptunghiul format au proprietatea că aria uneia este de două ori mai mare ca aria celeilalte.

2) Ecuatii liniare

Forma generală a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul 1 este

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q sunt funcții continue pe un interval I al axei reale.

Mulțimea tuturor soluțiilor ecuației notată cu \mathcal{S} are reprezentarea

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{x}\},$$

unde \mathcal{S}_0 este mulțimea soluțiilor ecuației omogene asociate ($x'(t) = p(t)x(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ - o ecuație cu variabile separabile), iar \tilde{x} este o soluție (oarecare) a ecuației neomogene date. Dacă

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c\Gamma(t), t \in J : c \in \mathbb{R}\}$$

atunci \tilde{x} se caută sub forma

$$\tilde{x} = \varphi(t)\Gamma(t),$$

unde $\varphi \in C^1(J)$ se determină din condiția ca \tilde{x} să verifice ecuația neomogenă dată.

Exemplu.

a) $x'(t) - 2tx(t) = -2e^{t^2}, x(1) = e$.

b) $tx''(t) + 2x'(t) = t^4, t > 0$.

3) Ecuatii rezolvabile prin schimbări de variabilă

a) schimbarea variabilei dependente

Exemple.

i) Forma generală a unei ecuații diferențiale de tip Bernoulli este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^\alpha(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q sunt funcții continue pe un interval I al axei reale, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$y = x^{1-\alpha}$$

se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$ de forma

$$y'(t) = (1 - \alpha)(p(t)y(t) + b(t)).$$

ii) Să se rezolve ecuația

$$x'(t) = tx(t) + x^2(t) + 2 - 6t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

știind că ea admite o soluție de forma λt .

Indicație. Este o ecuație Riccati, în general nerezolvabilă efectiv. Totuși, dacă se știe o soluție a ecuației (să zicem $\tilde{x}(t) = \rho(t), t \in I$), atunci prin schimbarea de variabilă

$$x(t) = \rho(t) + \frac{1}{y(t)}$$

se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y(t)$.

b) schimbarea variabilei independente

Forma generală a unei ecuații de tip Euler este

$$t^2 x''(t) + atx'(t) + bx(t) = g(t), \quad t > 0,$$

unde g este o funcție continuă pe un interval I al axei reale, iar $a, b \in \mathbb{R}$.

Prin schimbarea de variabilă

$$s = \ln t$$

se obține o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți. Într-adevăr

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{t}, \\ x''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t^2} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația inițială obținem

$$x''(s) + (a-1)x'(s) + bx(s) = g(e^s).$$

Exemplu. $t^2x''(t) + 2tx'(t) - 2x(t) = \ln^2 t$, $t > 0$.

B. Rezultate de existență, unicitate și aproximare

- 1) Teorema globală
- 2) Teorema locală

Considerăm problema cu condiții inițiale (problema lui Cauchy) de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases}$$

unde $f : \tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, $(t_0, x^0) \in \Omega$, Ω este un domeniu în \mathbb{R}^2 , iar unde $a, b > 0$.

Fie $0 < h \leq a$. Studiem existența și unicitatea soluției problema cu condiții inițiale de mai sus în $\tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$. Notăm $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ și desemnăm cu $M_f > 0$ numărul cu proprietatea

$$|f(t, u)| \leq M_f, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in \tilde{D}.$$

Să presupunem că f este Lipschitz pe \tilde{D} în raport cu al doilea argument.

Teorema locală de existență și unicitate pentru problema lui Cauchy de mai sus spune că dacă $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și f este Lipschitz pe $\tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega$ în raport cu al doilea argument, atunci problema lui Cauchy are soluție unică $x^* \in \tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$ definită cel puțin pe intervalul $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ (unde $h := \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$, cu $M_f > 0$ având proprietatea că $|f(t, u)| \leq M_f$, oricare ar fi $(t, u) \in \tilde{D}$) și oricare ar fi $x_0 \in \tilde{B}(x^0; b)$ șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ din $\tilde{B}(x^0; b) \subset C(J)$, definit recurent de relația

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds + x^0, t \in J, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la x^* .

Exemplu. Fie problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 + \cos t^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Să se indice un interval al axei reale pe care problema admite soluție unică și să se scrie șirul aproximațiilor succesive corespunzător.

11.2 Cazul sistemelor de ecuații diferențiale

Consider sistemul

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ este o matrice de funcții continue, iar

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix},$$

este o funcție vectorială continuă dată (termenul liber al sistemului neomogen).

Printr-o soluție a sistemului înțelegem un vector

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

de clasă C^1 ce verifică sistemul dat.

Să notăm cu \mathcal{S} mulțimea tuturor soluțiilor sistemului dat și cu \mathcal{S}_0 mulțimea tuturor soluțiilor sistemului omogen asociat (fără B).

Atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ este o soluție oarecare a sistemului neomogen.

Pentru a afla \mathcal{S}_0 (toate soluțiile sistemului liniar și omogen) este suficient să găsim 2 soluții liniar independente ale acestuia. Dacă X^1, X^2 sunt 2 soluții liniar independente ale sistemului și notăm $U := (X^1 X^2)$, atunci mulțimea tuturor soluțiilor sale este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C \mid C \in \mathbb{R}^2\}.$$

Apoi, $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ se poate găsi prin metoda variației constantelor căutând $\tilde{X}(t) = U(t)\Phi(t)$, iar Φ se determină din condiția

$$U(t)\Phi'(t) = B(t).$$

Exemplu.

Fie sistemul

$$\begin{cases} tx_1'(t) + 4x_1(t) - 2x_2(t) = t + 1 \\ tx_2'(t) - 3x_1(t) - x_2(t) = 2t, \quad t > 0. \end{cases}$$

- Să se efectueze schimbarea de variabilă $t = e^s$;
- Să se rezolve sistemul obținut la (a);
- Să se rezolve sistemul inițial;
- Să se rezolve problema lui Cauchy corespunzătoare sistemului inițial și condițiilor inițiale $x_1(1) = 0, x_2(1) = 0$.

11.3 Exerciții rezolvate

1) Fie problema cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0, t \in [0, T], T > 0 \\ x(0) = x(T) = 0. \end{cases}$$

Să se determine soluțiile sale (discuție după λ). Să se precizeze cazurile în care problema admite soluții nenule.

2) Fie ecuația

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, t \in \mathbb{R},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

i) toate soluțiile ecuației să fie mărginite;

ii) toate soluțiile ecuației să fie periodice.

3) Corpul unei victime a fost descoperit, într-un mediu de temperatură constantă T_e , la ora t_1 cu temperatura corpului T_1 . La momentul $t_2 > t_1$ temperatura măsurată a corpului era T_2 . Cunoscând că temperatura corpului viu este $T_0 = 36.5$ grade, să se determine ora t_0 la care a survenit decesul.

Indicație. Legea lui Newton a transferului termic, stabilită prin experimente, stipulează că rata schimbării de temperatură este proporțională cu diferența de temperatură dintre corp și mediul în care acesta a fost plasat. Într-adevăr, dacă $T(t)$ notează temperatura corpului la momentul t , avem:

- dacă $T - T_e > 0$, atunci $T \searrow T_e$ și astfel trebuie ca $T' < 0$;

- dacă $T - T_e < 0$, atunci $T \nearrow T_e$ și astfel trebuie ca $T' > 0$.

Această lege se scrie matematic în următoarea ecuație diferențială de ordinul 1

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - T_e), t \geq t_0$$

unde $\alpha > 0$ este coeficientul de transfer termic. Acest coeficient depinde de proprietățile termice ale corpului și se determină experimental.

În plus, mai știm că $T(t_0) = T_0$. Rezolvând problema lui Cauchy

$$\begin{cases} T'(t) = -\alpha(T(t) - T_e), t \geq t_0 \\ T(t_0) = T_0, \end{cases}$$

găsim

$$T(t) = T_e + e^{-\alpha(t-t_0)}(T_0 - T_e), t \geq t_0.$$

Pentru $t := t_1, t := t_2$ găsim un sistem în necunoscutele α și t_0 care dau prin calcul soluția

$$t_0 = \frac{t_1 \ln |T_2 - T_e| - t_2 \ln |T_1 - T_e| + (t_2 - t_1) \ln |T_0 - T_e|}{\ln |T_2 - T_e| - \ln |T_1 - T_e|}.$$

4) Fie sistemul

$$X' = AX,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

iar

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

- Să se afle soluția sa generală;
- Să se scrie sistemul dinamic generat;
- Să se afle traiectoriile și portretul fazic.

Soluție.

a) Ecuația caracteristică

$$r^2 + 5r = 0$$

are două soluții reale distincte $r_1 = -5, r_2 = 0$. Vectorii proprii corespunzători sunt

$$V^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

și

$$V^2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Fie matricea fundamentală

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} & 2 \\ -2e^{-5t} & 1 \end{pmatrix},$$

Soluția generală este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pe componente soluția se scrie

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-5t} + 2c_2 \\ x_2(t) = -2c_1 e^{-5t} + c_2. \end{cases}$$

b) Sistemul dinamic generat este

$$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \varphi),$$

unde $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, unde $\varphi(t, \eta)$ este unica soluție $X_\eta^*(t)$ a problemei lui Cauchy formată din sistem și condiția inițială $X(0) = \eta$. După a calcule, rezultă

$$c_1 = \frac{\eta_1 - 2\eta_2}{5}, c_2 = \frac{2\eta_1 + \eta_2}{5}.$$

c) Pentru găsirea traiectoriilor:

Metoda I. Eliminăm t între cele două relații ce definesc soluția generală

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-5t} + 2c_2 \\ x_2(t) = -2c_1 e^{-5t} + c_2. \end{cases}$$

și obținem

$$2x_1 + x_2 = 5c_2,$$

ceea ce reprezintă o familie de drepte paralele (de pantă -2).

Metoda II. Trajectoriile coincid cu curbele integrale ale ecuației

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2x_1 - 4x_2}{-x_2 + 2x_2},$$

ceea ce conduce la

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2.$$

Prin integrare avem $x_2 = -2x_1 + c, c \in \mathbb{R}$.

Bibliografie

- [1] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, Berlin, 2003.
- [2] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [3] I. A. Rus, *Principii și aplicații ale teoriei punctului fix [Principles and Applications of the Fixed Point Theory]*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
- [4] I. A. Rus, *Ecuatii diferențiale, ecuații integrale și sisteme dinamice*, Editura Transilvania Press, 1996.
- [5] I. A. Rus, A. Petrușel, G. Petrușel, *Fixed Point Theory 1950-2000: Romanian Contributions*, House of the Book of Science Cluj-Napoca, 2002.
- [6] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I. Fixed Point Theorems*, Springer Verlag, New York, 1986.