Introducere în algebră pentru fizicieni

Andrei Mărcuş

12 septembrie 2020

Cuprins

Capitolul 0

Descrierea cursului

0.1 Tematica

Acest curs este dedicat studenţilor din anul I de la Facultatea de Fizică. Vor fi abordate următoarele subiecte (vezi syllabus-ul cursului: http://phys.ubbcluj.ro/invatamant/syllabus/fise disciplina.htm):

1. Mulţimi şi funcţii.
2. Legi de compoziţie; grupuri, inele şi corpuri; substructuri; morfisme. Exemple.
3. Vectori în spaţiu; produs scalar; produs vectorial; produs mixt. Elemente de geometrie analitică; coliniaritate si coplanaritate; proiecţie ortogonală; ecuaţia planului; ecuaţiile dreptei.
4. Spaţii vectoriale şi algebre; algebre de matrice; algebre Lie; aplicaţii liniare; subspaţii ale spaţiilor vectoriale; Dependenţă şi independenţa liniară; baze; dimensiunea unui spaţiu vectorial. Matricea unei aplicaţii liniare; schimbarea bazei într-un spaţiu vectorial.
5. Matrice şi determinanţi; rangul unei matrice; inversa unei matrice. Transformări elementare; lema substituţiei. Sisteme de ecuaţii liniare; metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare;
6. Vectori şi valori proprii; matrice diagonalizabile.
7. Forme biliniare şi pătratice; spaţii cu produs scalar; grupuri de matrice; reducerea formelor pătratice la expresia canonică.
8. Tensori.

0.2 Evaluare

Examen scris, 2 ore de lucru efectiv. Nota se calculează astfel:

$$\mathsf{N} = \frac{1}{4}(\mathsf{E1} + \mathsf{E2} + \mathsf{E3} + \mathsf{E4}) + \mathsf{S}$$

unde N=nota, $\mathsf{E1}, \mathsf{E2}, \mathsf{E3}, \mathsf{E4}$=notele obţinute pe fiecare subiect de examen, S=puncte seminar.

Capitolul 1

Mulţimi şi funcţii

Noţiunea de mulţime, înţeleasă ca o colecţie abstractă de obiecte şi introdusă in secolul 19, joacă un rol central pentru fundamentele matematicii. Întregul material al acestui curs foloseşte limbajul teoriei mulţimilor, chiar dacă într-o manieră neformalizată.

1.1 Preliminarii

Definiţia 1.1.1 a) Conform definiţiei „naive" dată de Georg Cantor, o *mulţime* este o colecţie de obiecte bine determinate şi unice. Aceste obiecte se numesc *elementele* mulţimii.

Notăm cu $x \in A$ faptul că elementul x aparţine mulţimii A.

b) Incluziune: spunem că A este *submulţime* a lui B dacă toate elementele lui A sunt şi elemente ale lui B, adică $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$;

c) Două mulţimi sunt *egale* dacă au aceleaşi elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ şi } B \subseteq A).$$

d) O mulţime poate fi dată în următoarele moduri:
- sintetic (enumerarea elementelor): de exemplu, $A = \{1, 2, 3\}$;
- analitic (printr-o proprietate): $A = \{x \mid P(x)\}$, unde P este un *predicat*.

e) Mulţimea vidă $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ este mulţimea fară niciun element; $\emptyset$ este submulţime a oricărei mulţimi.

Exemple 1.1.2 Mulţimi de numere:

- mulţimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$;
- mulţimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- mulţimea numerelor raţionale: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$; amintim că scrierea unui număr raţional sub formă de fracţie nu e unică – perechea (m, n) este un reprezentant al lui $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$;
- mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$; de exemplu, $\sqrt{2}, \pi, e \notin \mathbb{Q}$; Cantor a arătat că există mai multe numere iraţionale decât raţionale. Mai departe, notăm $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$; motivaţia introducerii numerelor complexe este faptul că există ecuaţii precum $x^2 = -1$ care nu au soluţii in $\mathbb{R}$.

Avem $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$.

1.1.1 Operaţii cu mulţimi

Principalele operaţii sunt următoarele:
- reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- intersecţia: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$;
- diferenţa: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$;
- complementara unei submulţimi: presupunem că $A \subseteq E$; atunci $C_E(A) = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$;

Avem $A \setminus B = A \cap C_E(B)$ (unde presupunem că $A, B \subseteq E$); $C_E(\emptyset) = E$; $C_E(E) = \emptyset$;
- diferenţa simetrică: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.2 Funcţii

O *funcţie* definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B (notată prin $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$) este o lege prin care fiecărui element din mulţimea A (numită *domeniu de definitie*) i se asociază un unic element din mulţimea B (numită *codomeniu*). Notaţie: $a \mapsto f(a)$.

Dacă în definiţia de mai sus renunţăm la cuvantul ,,unic", ceea ce obţinem este o noţiune mai generală – *relaţie* între mulţimile A si B.

Funcţiile $f : A \to B$ si $g : C \to D$ sunt *egale* dacă şi numai dacă: $A = C$ (au acelaşi domeniu), $B = D$ (au acelaşi codomeniu) şi $f(a) = g(a)$ pentru orice $a \in A$.

De exemplu, funcţiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$ sunt diferite.

Exemple 1.2.1 a) $1_A : A \to A,\ 1_A(a) = a$ (adica $a \to a$) este funcţia identică a mulţimii A.

b) Fie $f : A \to B$ şi fie $C \subseteq A$; atunci funcţia $f_{|C} : C \to A, f_{|C}(c) = f(c)$ este *restricţia* lui f la C.

c) Fie $C \subseteq A$; atunci avem funcţia de *incluziune* $\iota : C \to A,\ i(c) = c$.

Printr-o *ecuaţie* înţelegem următoarea problemă: se dă o funcţie $f : A \to B$ şi se cere mulţimea $\{x \in A \mid f(x) = b\}$; a spune doar ,,să se rezolve ecuaţia $x^2 + x - 5 = 0$" nu e suficient; trebuie specificat în ce mulţime îl căutam pe x.

1.2.1 Imagine şi contraimagine

Definiţia 1.2.2 a) Fie $f : A \to B$ o funcţie şi fie $X \subseteq A$. Atunci *imaginea* submulţimii X prin funcţia f este

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B.$$

În particular: $f(\emptyset) = \emptyset$; mulţimea $\mathrm{Im} f = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ este *imaginea* lui f.

b) Fie $f : A \to B$ o funcţie şi fie $Y \subseteq B$. *Contraimaginea* (imaginea inversă) a submulţimii Y prin f este

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A.$$

Avem $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ şi $f^{-1}(B) = A$.

1.2.2 Compunerea funcţiilor

Definiţia 1.2.3 Fie funcţiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$; atunci $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ este *compunerea* funcţiilor f şi g.

Teorema 1.2.4 1) *Funcţia identică este element neutru faţă de compunere: dacă* $A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{1_B} B$, *atunci* $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

2) *Compunerea funcţiilor este asociativă: dacă* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, *atunci avem* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demonstraţie. 2) Funcţiile $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au acelaşi domeniu şi acelaşi codomeniu; mai departe, pentru orice $a \in A$ avem $(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)$. ■

1.2.3 Funcţii injective, surjective, bijective

Fie $f : A \to B$ o funcţie.

Definiţia 1.2.5 a) f este *injectivă* dacă $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, sau echivalent $\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

b) f este *surjectivă* dacă $\forall y \in B\ \exists x \in A$ astfel încât $f(x) = y$ (adică $\mathrm{Im} f = B$).

c) f *bijectivă* dacă f este injectivă şi surjectivă, adică $\forall y \in B\ (\exists!) x \in A$ astfel încât $f(x) = y$).

Observaţii 1.2.6 a) f nu e injectivă $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in A$ astfel încât $x_1 \neq x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2)$.

b) f nu e surjectivă $\Leftrightarrow \exists y \in B$ astfel încât $\forall x \in A\ f(x) \neq y$.

Teorema 1.2.7 f *este bijectivă dacă şi numai dacă* f *este inversabilă, adică există o (unică) funcţie* $g : B \to A$ *astfel încât* $g \circ f = 1_A$ *şi* $f \circ g = 1_B$ *adică* $g(f(a)) = a\ (\forall) a \in A$ *şi* $f(g(b)) = b\ (\forall) b \in B$.

1.2.4 Familii de elemente. Produs cartezian de mulţimi

Fie A şi B două mulţimi. Considerăm perechi de elemente (a, b), unde $a \in A$, $b \in B$, având proprietatea

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a',\ b = b'$$

Produsul cartezian al mulţimilor A şi B este mulţimea

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Acest produs se poate generaliza la produsul unei familii arbitrare de mulţimi.

Fie M o mulţime şi I o mulţime de indici, şi fie $f : I \to P(M)$ o funcţie. Notăm $A_i = f(i)$ şi $f = (A_i)_{i\in I}$. Atunci $(A_i)_{i\in I}$ se numeşte *familie de mulţimi.*

Analog, fie $g : I \to M$ şi notăm $g = (a_i)_{i\in I}$, unde $a_i = g(i)$ pentru orice $i \in I$. Atunci $g := (a_i)_{i\in I}$ se numeşte *familie de elemente* indexată de I.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i\ \forall i \in I\}.$$

De exemplu, un *şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din M este o familie de elemente indexată de mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

1.2.5 Exerciţii

Exerciţiul 1 Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$.

a) Să se verifice dacă f şi g sunt injective, respectiv surjective.

b) Să se calculeze $f \circ g$ şi $g \circ f$.

Exerciţiul 2 Fie $f,\ g,\ h\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & , x \geq 0 \\ x-1, & , x < 0 \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} x-1, & , x \geq 0 \\ x+1, & , x < 0 \end{cases},\ h(x) = \begin{cases} x+1, & , x \geq 0 \\ 2x+1, & , x < 0 \end{cases}.$$

Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiilor de mai sus. În cazul în care o funcţie este bijectivă, să se determine inversa ei.

Exerciţiul 3 Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| + |x+2| - 1$ şi să se determine mulţimile $f([0,1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,2])$, $f^{-1}([7,9])$ şi $f^{-1}([-1,4])$.

Exerciţiul 4 Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Să se arate că:

a) Dacă f şi g sunt injective (resp. surjective), atunci $g \circ f$ este injectivă (resp. surjectivă).

b) Funcţia identică 1_A este bijectivă.

c) Dacă f şi g sunt inversabile, atunci $g \circ f$ este inversabilă, şi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Capitolul 2

Structuri algebrice

În matematică, o structură este o mulţime împreună cu obiecte matematice care se ataşează mulţimii. Termenul de structură algebrică se referă la o mulţime cu una sau mai multe operaţii definite pe ea. Introducerea structurilor a apărut din nevoia de măsurare (coordonatizare). Exemplele clasice sunt numărarea diferitelor lucruri, sau asocierea numerelor reale punctelor de pe o dreaptă. Exemple moderne de structuri sunt: structuri algebrice (grupuri, inele, spaţii vectoriale etc.), topologii, structuri metrice (geometrii), măsuri, ordonări, structuri diferenţiabile etc. Corespondenţele între mulţimi care sunt compatibile cu structurile date se numesc morfisme, iar un izomorfism este un morfism care are un invers. Interesul pentru izomorfisme vine din faptul că două structuri izomorfe pot fi considerate identice, atât timp cât se consideră doar proprietăţile din definiţii şi consecinţele acestora.

Structurile algebrice sunt studiate în algebra abstractă. Teoria Categoriilor studiază relaţiile între două sau mai multe tipuri de structuri.

2.1 Grupuri

Noţiunea de grup are o definiţie matematică abstractă, dar are multiple aplicaţii deoarece grupurile măsoară simetria. O simetrie a unui sistem înseamnă o transformare a sistemului care lasă neschimbată o anumită proprietate. Din acest motiv, grupurile se folosesc în geometrie, fizica particulelor, chimie moleculară, cristalografie, teoria relativităţii, mecanica cuantică etc. Grupurile pot fi discrete sau continue. O teoremă a lui Emmy Noether spune că oricărei simetrii continue a unui sistem fizic îi corespunde o lege de conservare.

2.1.1 Noţiunea de grup. Exemple

Definiţia 2.1.1 Fie G o mulţime şi $\phi : G \times G \to G$ o funcţie.

a) Spunem că ϕ este o *operaţie (internă)* pe mulţimea G. Dacă $x, y \in G$, atunci în loc de $\phi(x, y)$ folosim frecvent notaţiile

$$x + y,\ x \cdot y,\ x \circ y,\ x \cap y,\ x \cup y,\ x * y$$

etc.

Spunem că „$+$" (respectiv „$\cdot$") este notaţia *aditivă* (respectiv *multiplicativă*).

b) $(G, *)$ este *semigrup*, dacă „$*$" este operaţie *asociativă*, adică pentru orice $x, y, z \in G$ avem

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

c) $(G, *)$ este *monoid*, dacă „$*$" este operaţie asociativă şi în G există *element neutru*:

$$(\exists)e \in G\ (\forall)x \in G\ x * e = e * x = x.$$

In cazul notaţiei aditive (respectiv multiplicative) de obicei notăm pe e cu 0 (respectiv 1).

d) $(G, *)$ este *grup*, dacă $(G, *)$ este monoid şi orice element este *simetrizabil (inversabil)*:

$$(\forall)x \in G\ (\exists)x' \in G\ x * x' = x' * x = e.$$

In cazul notaţiei aditive (respectiv multiplicative) de obicei notăm pe x' cu $-x$ (respectiv x^{-1}).

e) Spunem că $(G, *)$ este grup *comutativ* sau *grup abelian*, dacă pentru orice $x, y \in G$ avem $x * y = y * x$.

f) Numărul $|G|$ al elementelor lui G se numeşte *ordinul* grupului $(G, *)$.

Lema 2.1.2 *Fie* $(M,\cdot)$ *un monoid.*

a) *Dacă* $e, e' \in M$ *sunt elemente neutre, atunci* $e = e'$.

b) *Dacă* $x \in M$ *şi* $x', x'' \in M$ *sunt inverse ale lui* x, *atunci* $x' = x''$.

c) *Fie* $\mathrm{U}(M) := \{x \in M \mid x \text{ inversabil}\}$ *mulţimea* **unităţilor** *lui* M. *Atunci* $(\mathrm{U}(M),\cdot)$ *este grup.*

Demonstraţie. a) $e = ee' = e'$.

b) $x' = x'e = x'(xx'') = (x'x)x'' = ex'' = x''$.

c) Elementul neutru al lui M este inversabil, deoarece $ee = e$. Dacă $x \in \mathrm{U}(M)$, atunci $x' \in U(M)$ şi $(x')' = x$, deoarece $x'x = xx' = e$. Dacă $x, y \in \mathrm{U}(M)$, atunci

$$(xy)(y'x') = (y'x')(xy) = e,$$

deci $xy \in \mathrm{U}(M)$ şi $(xy)' = y'x'$. Asociativitatea se moşteneşte. ∎

Exemple 2.1.3 a) $(\mathbb{N}^*,+)$ este semigrup, $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$ sunt monoizi, dar nu sunt grupuri.

b) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ sunt grupuri abeliene.

c) $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$, $(\mathbb{R},\cdot)$ sunt monoizi comutativi, $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}) = \{1,-1\},\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ sunt grupuri abeliene.

Exemple 2.1.4 Fie M o mulţime şi fie $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \to M\}$. Atunci $(\mathcal{F}(M),\circ)$ este monoid, iar grupul

$$S_M := \mathrm{U}(\mathcal{F}(M)) = \{f \in \mathcal{F}(M) \mid f \text{ bijectiv}\}$$

se numeşte *grupul simetric* al mulţimii M.

Exerciţiul 5 Fie $M = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $G = \{f_i \mid i = 1,\dots,6\}$, unde $f_i : M \to M$,

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \frac{1}{1-t}, \quad f_3(t) = \frac{t-1}{t}, \quad f_4(t) = \frac{1}{t},$$

$$f_5(t) = 1-t, \qquad f_6(t) = \frac{t}{t-1}, \quad (\forall) t \in M.$$

Să se arate că $(G,\circ)$ este un grup necomutativ (să se întocmească tabla operaţiei).

Exerciţiul 6 (Produs direct de grupuri) Fie G_1 şi G_2 două grupuri, şi fie

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1,g_2) \mid g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}, \qquad (g_1,g_2)(g_1',g_2') = (g_1g_1', g_2g_2').$$

a) Să se arate că $G_1 \times G_2$ este un grup.

b) Să se întocmească tabla operaţiei pentru **grupul lui Klein** $V_4 = G_1 \times G_2$, unde $G_1 = \{e_1, a_1\}$ şi $G_1 = \{e_1, a_1\}$ sunt grupuri de ordin 2.

Observaţii 2.1.5 (Reguli de calcul) a) Fie $(G,\cdot)$ un grup şi fie $a, b \in G$. Ecuaţia $ax = b$ are soluţie unică $x = a^{-1}b$, iar ecuaţia $ya = b$ are soluţie unică $y = ba^{-1}$; aceasta este echivalent cu a spune că funcţiile

$$t_a : G \to G, \quad t_a(x) = ax$$

şi

$$t'_a : G \to G, \quad t'_a(x) = xa$$

sunt bijective. (Aceasta înseamnă în tabla operaţiei unui grup, fiecare element al grupului apare exact o dată pe fiacare linie şi pe fiecare coloană.) În particular, dacă $x, y \in G$, atunci $ax = ay \Rightarrow x = y$ şi $xa = ya \Rightarrow x = y$.

b) (*Exponenţiere*) Fie $(G,\cdot)$ un grup, $x \in G$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind asociativitatea operaţiei „·”, definim inductiv elementul x^n astfel:

$$x^1 = x, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x = x \cdot x^n.$$

Mai departe, fie $x^0 = e$ şi $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$.

Dacă folosim notaţia aditivă $(G,+)$, atunci definim inductiv $0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x$, $(n+1)x = nx + x = x + nx$, şi $(-n)x = -(nx) = n(-x)$. În acest caz, avem $(m+n)x = mx + nx$ şi $m(nx) = (mn)x$ pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$.

2.1.2 Morfisme de grupuri

Definiţia 2.1.6 Fie $(G, *)$ şi $(G', \circ)$ două grupuri şi $f : G \to G'$ o funcţie.

a) Spunem că f este un *morfism de grupuri*, dacă pentru orice $x, y \in G$

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Morfismul f se numeşte *endomorfism*, dacă $(G, *) = (G', \circ)$.

b) Spunem că f este un *izomorfism* dacă există un morfism $f' : G' \to G$ astfel încât $f' \circ f = 1_G$ şi $f \circ f' = 1_{G'}$. Izomorfismul f se numeşte *automorfism* dacă $(G, *) = (G, \circ)$.

Exemple 2.1.7 Dacă $a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$, şi $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$, $f(x) = a^x$, atunci f este izomorfism, şi $f^{-1}(x) = \log_a(x)$.

Lema 2.1.8 *Fie* $f : G \to G'$ *şi* $f' : G' \to G''$ *două morfisme.*

a) $f(e) = e'$;

b) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ *pentru orice* $x \in G$.

c) *Funcţia identică* $1_G : G \to G$ *şi compunerea* $f' \circ f : G \to G''$ *sunt de asemenea morfisme.*

d) *Morfismul* f *este izomorfism dacă şi numai dacă* f *este bijectiv.*

Demonstraţie. a) $e'f(e) = f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$, deci $f(e) = e'$.

b) Dacă $x \in G$, atunci $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, deci $f(x)f(x^{-1}) = f(x^{-1})f(x) = e'$; rezultă că $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.

c) Pentru orice $x, y \in G$ avem $1_G(x, y) = xy = 1_G(x)1_G(y)$ şi

$$(f' \circ f)(xy) = f'(f(xy)) = f'(f(x)f(y)) = f'(f(x))f'(f(y)) = (f' \circ f)(x)(f' \circ f)(y).$$

d) Dacă f este izomorfism, atunci este bijectiv, deoarece are inversă. Invers, presupunem că f este morfism bijectiv şi trebuie să arătam că şi f^{-1} este morfism. Fie $u, v \in G'$, $x = f^{-1}(u)$ şi $y = f^{-1}(v)$. Atunci avem

$$f^{-1}(uv) = f^{-1}(f(x)f(y)) = f^{-1}(f(xy)) = xy = f^{-1}(u)f^{-1}(v),$$

deci f^{-1} este morfism de grupuri. ■

Corolar 2.1.9 Fie $\text{Aut}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ este automorfism}\}$ mulţimea automorfismelor grupului G. Să se arate că $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grup.

Exerciţiul 7 Fie $a > 0$, $G = (-a, a)$ şi fie $x * y = \frac{x+y}{1+xy/a^2}$. Să se arate că:

a) $(G, *)$ este grup abelian;

b) există un izomorfism $f : (G, *) \to (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ de forma $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$.

2.1.3 Subgrupuri. Imaginea şi nucleul unui morfism

Definiţia 2.1.10 Fie $(G, \cdot)$ un grup şi fie H o submulţime a lui G. Spunem că H este un *subgrup* al lui G (notaţie: $H \leq (G, \cdot)$), dacă H este închisă (parte stabilă) faţă de operaţia din G (adică pentru orice $x, y \in H$ avem $xy \in H$) şi în plus, $(H, \cdot)$ este grup cu operaţia indusă „$\cdot$".

Teorema 2.1.11 (caracterizarea subgrupului) *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi fie* H *o submulţime a lui* G. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) H *este subgrup al lui* G.

2) $H \neq \emptyset$ *şi* xy, $x^{-1} \in H$ *pentru orice* $x, y \in H$.

3) $H \neq \emptyset$ *şi* $xy^{-1} \in H$ *pentru orice* $x, y \in H$.

Exemple 2.1.12 1) $\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Q}, +)$, $\mathbb{Q}$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}, +)$ şi $\mathbb{R}$ este subgrup al lui $(\mathbb{C}, +)$.

2) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

3) $\{e\}$ şi G sunt subgrupuri ale lui $(G, \cdot)$; acestea se numesc *subgrupuri triviale.* Dacă $H \leq G$ şi $H \neq \{e\}$, $H \neq G$, atunci H se numeşte *subgrup propriu.*

Lema 2.1.13 *Fie* $f : G \longrightarrow G'$ *un morfism de grupuri.*

1) *Dacă* H *este un subgrup al lui* G, *atunci* $f(H)$ *este subgrup al lui* G'.

2) *Dacă* H' *este un subgrup al lui* G', *atunci* $f^{-1}(H)$ *este subgrup al lui* G.

Demonstraţie. 1) Deoarece $H \neq \emptyset$, rezultă că $f(H) \neq \emptyset$.

Dacă $x', y' \in f(H)$, atunci există $x, y \in H$ astfel încât $x' = f(x)$ şi $y' = f(y)$, deci $x'y' = f(x)f(y)$. Deoarece f este morfism, avem $f(x)f(y) = f(xy)$, unde $xy \in H$ (deoarece H este subgrup), deci $x'y' = f(xy) \in f(H)$.

Mai departe, $(x')^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ (deoarece f este morfism), dar $x^{-1} \in H$ (deoarece H este subgrup), deci $f(x^{-1}) \in f(H)$. Rezultă că $f(H)$ este subgrup al lui G'.

2) Deoarece H' este subgrup al lui G' şi f este morfism, avem că $f(e) = e'$, (unde $e \in G$ respectiv $e' \in G'$ sunt elementele neutre); rezultă că $e \in f^{-1}(e')$, adică $f^{-1}(H') \neq \emptyset$.

Dacă $x, y \in f^{-1}(H')$, adică $f(x), f(y) \in H'$, atunci $f(x)f^{-1}(y) = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in H'$, adică $xy^{-1} \in f^{-1}(H')$. ■

Definiţia 2.1.14 Fie $f : G \longrightarrow G'$ un morfism. 1) Subgrupul $\operatorname{Im} f := f(G) = \{f(x) \mid x \in G\}$ al lui G' se numeşte *imaginea* lui f.

2) Subgrupul $\operatorname{Ker} f := \{x \in G \mid f(x) = e'\} = f^{-1}(e')$ al lui G se numeşte **nucleul** lui f.

2.1.4 Produs semidirect

Următoarea construcţie generalizează produsul direct de grupuri discutat în Exerciţiul 6.

Definiţia 2.1.15 Fie $(N, \cdot)$ şi $(Q, \cdot$ două grupuri şi fie $\sigma : (Q, \cdot) \to (\operatorname{Aut}(N), \circ)$ un morfism de grupuri. Considerăm produsul cartezian $G := N \times G = \{(a, x) \mid a \in N,\ x \in Q\}$. Pe G definim operaţia „$\cdot_\sigma$" astfel

$$(a, x) \cdot_\sigma (b, y) = (a \cdot \sigma(x)(b), xy).$$

Atunci $(G, \cdot_\sigma)$ este un grup, numit **produsul semidirect** al lui N şi Q definit de σ si notăm $G = N \rtimes_\sigma Q$. (În multe exemple, Q este un subgrup al lui $\operatorname{Aut}(N)$ iar σ este morfismul de incluziune.)

Exerciţiul 8 Cu notaţiile de mai sus, să se arate că:

a) $(N \rtimes_\sigma Q, \cdot_\sigma)$ este într-adevăr grup.

b) Funcţiile $f : N \to G$, $f(a) = (a, e_Q)$ respectiv $s : Q \to G$, $s(x) = (e_N, x)$ sunt morfisme injective de grupuri.

c) Funcţia $p : G \to Q$, $p(a, x) = x$ este morfism surjectiv de grupuri şi $\operatorname{Ker} p \simeq N$.

2.1.5 Grupul simetric S_n

Fie $S_n = S_{\{1,\dots,n\}} = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid f \text{ bijectiv}\}$. Grupul $(S_n, \circ)$ se numeşte *grupul simetric de grad* n. Un element $\sigma \in S_n$ se numeşte **permutare** de grad n, şi de obicei folosim notaţia tabelară:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

(e se numeşte *permutarea identică*.) Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci operaţia de compunere se scrie

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix},$$

iar inversa permutării σ este

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Prin inducţie matematică se arată uşor că $|S_n| = n!$.

Definiţia 2.1.16 Fie $\sigma \in S_n$.

a) Perechea de numere (i, j) se numeşte **inversiune** dacă $1 \le i < j \le n$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$; notăm cu $\operatorname{inv}(\sigma)$ numărul inversiunilor lui σ. . Observăm că $\operatorname{inv}(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma = e$;

b) **Signatura** lui σ este $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} \in \{1, -1\}$. Spunem că σ este permutare *pară*, dacă $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, şi σ este permutare *impară*, dacă $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Notăm cu A_n mulţimea permutărilor pare.

Funcţia $\operatorname{sgn} : (S_n, \circ) \to (\{1, -1\}, \cdot)$ este un morfism surjectiv de grupuri. Deoarece $A_n = \operatorname{Ker} \operatorname{sgn}$ este subgrup al lui S_n, rezultă că $(A_n, \circ)$ este un grup. Mai mult, $|A_n| = \frac{n!}{2}$, adică numărul permutărilor pare este egal cu numărul permutărilor impare. A_n se numeşte **grupul altern** de grad n.

Exerciţiul 9 Să se întocmească tabla lui Cayley a grupului simetric $(S_3, \circ)$.

Exerciţiul 10 Sa se determine elementele lui A_4 şi să se întocmească tabla lui Cayley a grupului altern $(A_4, \circ)$.

Exerciţiul 11 Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine $\operatorname{inv}(\sigma)$, $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{inv}(\tau)$, $\operatorname{sgn}(\tau)$, σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{1457} şi τ^{8692}.

Definiţia 2.1.17 Fie $n \ge 2$, $1 \le j < k \le n$. Permutarea $\tau_{jk} \in S_n$ definită prin

$$\tau_{jk}(i) = \begin{cases} k, & i = j \\ j, & i = k \\ i, & i \ne j, k \end{cases}.$$

se numeşte **transpoziţie**.

Exerciţiul 12 Să se scrie toate transpoziţiile de grad 3 şi 4.

Exerciţiul 13 Să se arate că $\operatorname{inv}(\tau_{jk}) = 2(k - j) - 1$ şi $\operatorname{sgn}(\tau_{jk}) = -1$ (deci orice transpoziţie este permutare impară).

2.1.6 Grupul diedral D_n. Grup de simetrie

Considerăm planul euclidian $(\mathbb{R}^2, d)$, şi fie

$$\mathrm{Izom}(R^2) = \{\sigma : R^2 \to \mathbb{R}^2 \mid d(\sigma(P), \sigma(Q)) = d(P, Q)\ \forall P, Q \in R^2\}$$

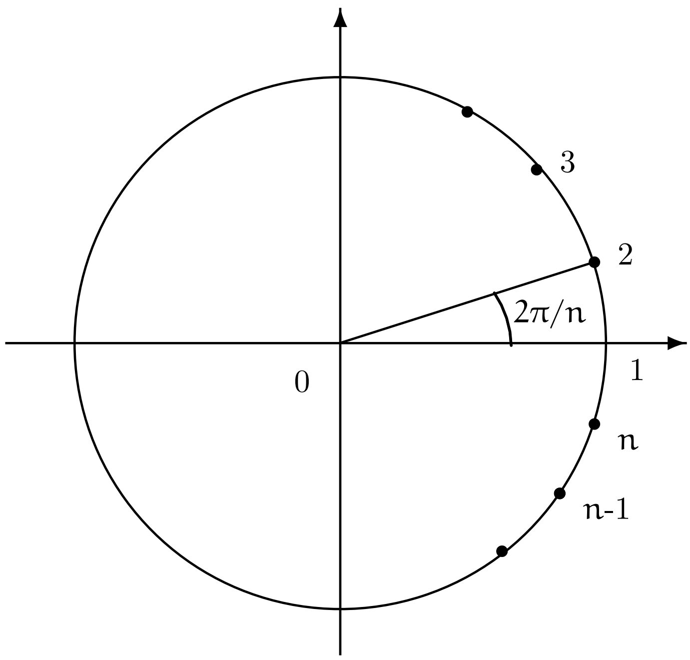
mulţimea izometriilor lui $\mathbb{R}^2$. Deoarece orice izometrie este o funcţie bijectivă, iar produsul izometriilor şi inversa unei izometrii sunt de asemenea izometrii, rezultă că $(\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2), \circ)$ este un grup. Mai departe, imaginea a trei puncte necoliniare determină o izometrie; mai precis, dacă σ, τ sunt izometrii, $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^2$ puncte necoliniare şi $\sigma(Q_i) = \tau(Q_i)$, pentru $i = 1, 2, 3$, atunci $\sigma = \tau$.

Fie $P_n \subset \mathbb{R}^2$ poligonul regulat cu n laturi, unde $n \geq 3$. Prin definiţie, *grupul diedral* de grad n, notat D_n, este *grupul de simetrie* al mulţimii P_n, adică

$$D_n = \{\sigma \in \mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2) \mid \sigma(P_n) = P_n\}.$$

(Se poate arăta că D_n este subgrup a grupului $(\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2), \circ)$, deci $(D_n, \circ)$ este într-adevăr grup.)

Notăm cu 0 centrul lui P_n, iar cu $1, \dots, n$ vârfurile lui P_n. Dacă $\sigma \in D_n$, atunci $\sigma(0) = 0$ şi $\sigma(k) \in \{1, \dots, n\}$, deci D_n se poate identifica cu un grup de permutări, astfel ca $D_n \leq (S_n, \circ)$. Deoarece $\sigma(0) = 0$, rezultă că $\sigma(1)$ şi $\sigma(n)$ determină pe σ; dacă $\sigma(1) = k \in \{1, \dots, n\}$, atunci $\sigma(n) \in \{k+1, k-1\}$ (unde $n + 1 = 1$ şi $1 - 1 = n$), deci $|D_n| \leq 2n$.



Arătăm că $|D_n| = 2n$. Este suficient de arătat că în D_n există $2n$ elemente distincte. Fie $\rho = \rho_{2\pi/n}$ rotaţia de unghi $2\pi/n$ în jurul originii, deci

$$\rho(1) = 2,\ \rho(n) = 1,\quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix},$$

şi fie $\sigma = \sigma_{01}$ simetria faţă de axa 01, deci

$$\sigma(1) = 1,\ \sigma(n) = 2,\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că pentru orice $1 \leq k < n$, $\rho^k = \rho_{2k\pi/n}$ este rotaţia de unghi $2k\pi/n$ ($\rho^k(1) = k+1,\ \rho^k(n) = k$) şi $\rho^n = e$ este transformarea identică. Mai departe, $\sigma^2 = e$, şi $e, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho \circ \sigma, \dots, \rho^{n-1} \circ \sigma$ sunt transformări distincte; într-adevăr, dacă $0 \leq k < n$, atunci $(\rho^k \circ \sigma)(1) = \rho^k(\sigma(1)) = \rho^k(1) = k+1$ şi $(\rho^k \circ \sigma)(n) = \rho^k(\sigma(n)) = \rho^k(2) = k+2$. Rezultă că

$$D_n = \{e, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho \circ \sigma, \dots, \rho^{n-1} \circ \sigma\}.$$

(Este uşor de arătat că $\rho^k \circ \sigma$ este simetria faţă de axa d_k, unde d_k este mediatoarea $[1, k+1]$ segmentului; dacă $k = 2m$ este par, atunci d_k este dreapta $0\ (m+1)$; dacă $k = 2m+1$ este impar, atunci d_k este mediatoarea laturii $[m, m+1]$.)

În fine, observăm că $\sigma \circ \rho = \rho^{n-1} \circ \sigma$; într-adevăr,

$$(\sigma \circ \rho)(1) = \sigma(\rho(1)) = \sigma(2) = n = (\rho^{n-1} \circ \sigma)(1)$$

şi

$$(\sigma \circ \rho)(n) = \sigma(\rho(n)) = \sigma(1) = n = (\rho^{n-1} \circ \sigma)(n).$$

Observaţii 2.1.18 1) Relaţiile $\rho^n = 1,\ \sigma^2 = e$ şi $\sigma \circ \rho = \rho^{n-1} \circ \sigma$ determină tabla operaţiei lui D_n. De aceea, definiţia abstractă a grupului diedral este:

$$D_n = \langle x, y \mid x^n = y^2 = e,\ yx = x^{n-1}y \rangle;$$

elementele x, y se numesc *generatori*, iar $x^n = y^2 = e,\ yx = x^{n-1}y$ sunt *relaţiile de definiţie* ale lui D_n.

2) Analog putem defini grupurile D_1 şi D_2: D_1 este grupul de simetrie al triunghiului isoscel (neechilateral), iar D_2 este grupul de simetrie al dreptunghiului (care nu e pătrat). Astfel,

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \langle x \mid x^2 = e \rangle, \\ D_2 &= \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \langle x, y \mid x^2 = y^2 = e,\ yx = xy \rangle. \end{aligned}$$

3) Notăm $C_n = \langle x \mid x^n = e \rangle = \{e, x, x^2, \dots x^{n-1}\}$ **grupul ciclic** cu n elemente, generat de elementul x de ordin n. Acest grup este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ al **claselor de resturi modulo** n.

Exerciţiul 14 1) Să se întocmească tabla Cayley a lui D_n, unde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2) Să se arate că $D_1 \simeq C_2$, $D_2 \simeq C_2 \times C_2$ (adică este izomorf cu grupul de ordinul 4 al lui Klein, notat V_4) şi $D_3 \simeq S_3$.

3) Să se arate că D_n este un produs semidirect. Mai exact, să se arate că $D_n \simeq C_n \rtimes_\sigma C_2$, unde $C_n = \langle a \mid a^n = e \rangle$, $C_2 = \langle x \mid x^2 = e \rangle = \{e, x\}$, iar $\sigma : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$ este dat de $\sigma(x)(a) = a^{-1} = a^{n-1}$.

Exerciţiul 15 Să se determine

a) cele 24 de elemente ale grupului de simetrie al tetraedrului regulat;

b) cele 48 de elemente ale grupului de simetrie al cubului;

2.2 Inele şi corpuri

Inelele şi corpurile sunt structuri algebrice inspirate de operaţiile uzuale cu numere, generalizând şi extinzând proprietăţile acestora la diferite exemple nenumerice, precum funcţii, matrice, polinoame, şiruri, serii, vectori, clase de resturi, părţile unei mulţimi etc. Definiţia axiomatică modernă a inelului a fost formulată de Emmy Noether în 1921, dar multe din exemplele menţionate mai sus au fost deja studiate în secolele anterioare.

2.2.1 Noţiunea de inel. Exemple

Definiţia 2.2.1 a) Structura algebrică $(R, +, \cdot)$ se numeşte *inel* dacă:

1. $(R, +)$ este grup abelian (numit *grupul aditiv* al lui R);

2. Înmulţirea este *distributivă* faţă de adunare, adică pentru orice $a, b, c \in R$,

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (b + c)a = ba + ca.$$

b) R este un *inel cu unitate*, dacă există $1 \in R$ astfel încât $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $(\forall) a \in R$.

c) R este inel *asociativ* (*comutativ*), dacă monoidul $(R, \cdot)$ este asociativ (comutativ).

d) R este *corp*, dacă R este inel asociativ cu unitate, $1 \neq 0$, şi R orice element nenul este inversabil.

Cu excepţia unui exemplu ce va fi dat mai târziu prin ,,inel" vom înţelege ,,inel asociativ cu unitate $1 \neq 0$".

Exemple 2.2.2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este inel comutativ, iar $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

Exerciţiul 16 (reguli de calcul) a) Dacă $(R, +, \cdot)$ inel şi $a \in R$, atunci să se arate că

$$t_a, t'_a : (R, +) \to (R, +), \quad t_a(r) = ar, \quad t'_a(r) = ra$$

sunt morfisme de grupuri, şi pentru orice $a, b, c \in R$ avem:
(1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
(2) $a(-b) = (-a)b = -ab$; $(-a)(-b) = ab$;
(3) $(-a)^n = a$ dacă n este par, şi $(-a)^n = -a$ dacă n este impar.
(4) $a(b - c) = ab - ac$, $(b - c)a = ba - ca$.
b) Dacă în R avem $1 = 0$, atunci $R = \{0\}$, adică R este *inel nul*. De aceea, în cele ce umează, dacă există $1 \in R$, atunci presupunem că $1 \neq 0$.
c) Inelul cu unitate R este corp dacă şi numai dacă $(R^*, \cdot)$ este grup, unde $R^* := R \setminus \{0\}$. În general, $(R^*, \cdot)$ este monoid, iar $(U(R), \cdot)$ este grupul unităţilor lui R.

2.2.2 Inelul matricelor

Fie R un inel asociativ cu unitate şi fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. O funcţie $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to R$ se numeşte *matrice* de tip $m \times n$ peste R, sau *matrice cu m linii şi n coloane* cu elemente din R. Altfel spus, o matrice este o familie de elemente din inelul R, indexată de perechile $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$. Este avantajos să folosim următoarea notaţie tabelară:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m,n}(R).$$

Dacă $A, A' \in M_{m,n}(R)$ şi $B \in M_{n,p}(R)$, atunci definim operaţiile

$$A + A' = [a_{ij} + a'_{ij}] \in M_{m,n}(R), \qquad AB = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}] \in M_{m,p}(R).$$

Mai departe, notăm $M_n(R) := M_{n,n}(R)$, şi cu $I_n = (\delta_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(R)$ *matricea unitate*, unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

este *simbolul delta al lui Kronecker*.

Exerciţiul 17 a) Fie matricele $A = (a_{ij}) \in M_{k,m}(R)$, $B = (b_{ij}), B' = (b'_{ij}) \in M_{m,n}(R)$, $C = (c_{ij}) \in M_{n,p}(R)$. Să se arate că:

$$(AB)C = A(BC), \qquad A(B + B') = AB + AB', \qquad (B + B')C = BC + B'C.$$

b) $M_n(R)$ este un inel asociativ cu unitate. Mai general, avem $AI_n = I_m A = A$ pentru orice $A \in M_{m,n}(R)$.
c) $M_n(R)$ nu este comutativ dacă $n \geq 2$.

2.2.3 Morfisme de inele şi corpuri

Definiţia 2.2.3 Fie R şi R' două inele.
a) Funcţia $f : R \to R'$ se numeşte *morfism de inele* dacă pentru orice $a, b \in R$ avem

$$f(a + b) = f(a) + f(b); \qquad f(ab) = f(a)f(b).$$

b) Dacă R şi R' sunt inele cu unitate şi $f(1) = 1$, atunci spunem că f este morfism *unital*.
c) f se numeşte *izomorfism* dacă există un morfism $f' : R' \to R$ astfel încât $f' \circ f = 1_R$ şi $f \circ f' = 1_{R'}$.
d) Funcţiile $\theta : R \to R'$, $\theta(a) = 0$ şi $1_R : R \to R, 1_R(a) = a$ sunt evident morfisme de inele. θ se numeşte *morfismul nul* iar 1_R *morfismul identic* al lui R.

Exerciţiul 18 Să se arate că:
a) Dacă $f : R \to R'$ este morfism, atunci $f(0) = 0$ şi $f(-a) = -f(a)$ pentru orice $a \in R$; dacă f este morfism unital şi $a \in U(R)$, atunci $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.
b) Orice morfism nenul de corpuri $f : K \to K'$ este unital şi injectiv.

Exerciţiul 19 Să se arate că:
a) Compunerea a două morfisme de inele este de asemenea morfism.
b) Funcţia $f : R \to R'$ este izomorfism de inele $\Leftrightarrow$ f este morfism bijectiv de inele.

2.2.4 Subcorpuri

Definiţia 2.2.4 Fie $(K,+,\cdot)$ un corp şi fie $L \subseteq K$. Spunem că L este *subcorp* al lui K (*notaţie*: $L \leq K$), este închisă (parte stabilă) în raport cu operaţiile „+" şi „·" şi $(L,+,\cdot)$ este de asemenea corp.

Teorema 2.2.5 (caracterizarea subcorpurilor) *Fie* $(K,+,\cdot)$ *un corp şi fie* $L \subseteq K$. *Atunci* L *este subcorp al lui* K *dacă şi numai dacă:*
(1) $|L| \geq 2$;
(2) *pentru orice* $a, b \in L,\ b \neq 0$ *avem* $a-b, ab^{-1} \in L$.

Exemple 2.2.6 $\mathbb{Q}$ este subcorp al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ şi $\mathbb{R}$ este subcorp al lui $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

2.2.5 Corpul numerelor complexe

Numerele complexe sunt o extindere a numerelor reale şi au apărut în contextul studiului ecuaţiilor algebrice. Mai târziu, ele au primit şi o interpretare geometrică: un număr complex poate fi privit ca un punct sau un vector de poziţie într-un sistem coordonate carteziene 2-dimensional numit planul complex sau diagramă Argand. Aceste coordonate carteziene determină forma algebrică a numărului complex. Un vector de poziţie poate fi de asemenea dat precizând mărimea, direcţia şi sensul. Acestea determină forma polară sau trigonometrică a numărului complex. Adunarea numerelor complexe corespunde adunării vectorilor, iar înmulţirea corespunde înmulţirii mărimilor vectorilor respectiv adunării argumentelor (unghiurilor). Astfel, în geometrie, numerele complexe sunt folosite pentru descrierea rotaţiilor în plan.

Numerele complexe au aplicaţii importante în ştiinţă şi inginerie: mecanica cuantică (unde se folosesc spaţii Hilbert şi matrice peste $\mathbb{C}$), teoria relativităţii (pentru definirea spinorilor, care sunt o generalizare a tensorilor), electromagnetism, analiza şi procesarea semnalelor (pentru descrierea semnalelor care variază periodic), teoria controlului (pentru descrierea transformărilor sistemelor dinamice), dinamica fluidelor, cartografie, analiza vibraţiilor, inginerie electrică (pentru analiza variaţiei tensiunii şi intensităţii curentului).

Forma algebrică a unui număr complex

Pe mulţimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{z=(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ definim următoarele operaţii:

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y'), \qquad (x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx').$$

Exerciţiul 20 Să se arate că:
a) $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ este un corp comutativ.
b) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad x \mapsto (x,0)$ este un morfism injectiv de corpuri.
c) $(0,1)(0,1) = (-1,0)$.

Notaţie. Identificăm x cu $(x,0)$ şi fie $i := (0,1)$. Atunci avem $i^2 = -1$ şi $(x,y) = x+yi$. Această scriere este unică, adică dacă $(x,y) = x'+y'i$, atunci $x = x'$ şi $y = y'$. Astfel, orice număr real x se identifică cu numărul complex $x+0i$.

Definiţia 2.2.7 a) $\mathbb{C} = \{z = x+yi \mid x,y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ se numeşte *corpul numerelor complexe*. Corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale se identifică cu un subcorp al lui $\mathbb{C}$.
b) i este *unitatea imaginară*; dacă $z = x+yi$, atunci $\mathrm{Re}\, z = x$ este *partea reală* a lui z şi $\mathrm{Im}\, z = yi$ *partea imaginară* a lui z.
c) Dacă $z = x+yi$, fie $\bar{z} = x-yi$ *conjugatul* lui z şi $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ *modulul* lui z.

Exerciţiul 21 Să se arate că:
a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$; $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
b) $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$; $\bar{\bar{z}} = z$. (Deci conjugarea este un automorfism al corpului $\mathbb{C}$.)
c) $|zz'| = |z|\cdot|z'|$; $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.
d) Să se rezolve ecuaţia $z^2 = a+bi$. Aplicaţie: $a = 3,\quad b = 4$.

Exerciţiul 22 (reprezentarea matriceală a numerelor complexe) a) Să se arate că funcţia

$$f : (\mathbb{C},+,\cdot) \to (M_2(\mathbb{R}),+,\cdot), \qquad f(x+yi) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

este f este un morfism injectiv de inele.
b) Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Atunci $(K,+,\cdot)$ este corp comutativ şi $K \simeq \mathbb{C}$.

Forma trigonometrică (polară) a unui număr complex

Din definiţia numerelor complexe rezultă că un punct M din planul euclidian, având coordonatele carteziene $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ determină numărul complex $z = x + yi \in \mathbb{C}$, numit *afixul* lui M. Fie

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ştim din trigonometrie că există unic $t \in [0, 2\pi)$ astfel încât $\cos t = \frac{x}{r}$ şi $\sin t = \frac{y}{r}$, deci

$$z = r(\cos t + i \sin t).$$

Numere reale $r \in [0, +\infty)$ şi $t \in [0, 2\pi)$ sunt *coordonatele polare* ale punctului M.

Exerciţiul 23 Să se arate că:
a) $zz' = rr'(\cos(t + t') + i \sin(t + t'))$;
b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-t) + i \sin(-t))$;
c) $z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Observaţii 2.2.8 (Rotaţia în plan) Fie $z = x + iy$ afixul punctului $M(x, y)$ şi fie $z' = x' + iy'$ afixul punctului $M'(x', y')$ obţinut prin rotaţia cu unghi t a în jurul originii a segmentului OM. Atunci avem

$$z' = zw,$$

unde $w = \cos t + i \sin t$ este un număr complex de modul 1.

Exerciţiul 24 (ecuaţii binome şi rădăcini ale unităţii) a) Fie $w = r(\cos t + i \sin t) \in \mathbb{C}$ şi fie $n \geq 1$. Să se arate că ecuaţia binomă $z^n = w$ are exact următoarele n soluţii în $\mathbb{C}$:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, \ldots, n - 1.$$

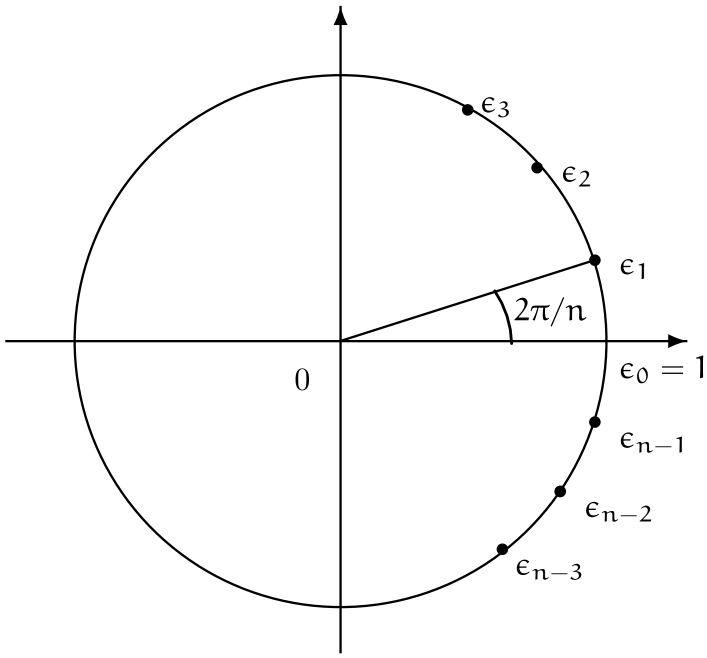
b) În particular, dacă luăm $w = 1$ şi notăm

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k = 0, \ldots, n - 1\}$$

mulţimea *rădăcinilor de ordin* n *ale unităţii*, atunci să se arate că:

$$\epsilon_k = \epsilon_1^k \;\text{ şi }\; z_k = z_0 \epsilon_k, \;\text{ pentru orice }\; k = 0, \ldots, n - 1.$$

c) Să se scrie sub formă algebrică elementele grupurilor U_1, U_2, U_3, U_4 şi U_6 şi să se întocmească tablele Cayley ale acestor grupuri.



Observaţii 2.2.9 Spunem că grupul U_n al rădăcinilor de ordin n ale unităţii este un *grup ciclic* de ordin n, generat de ϵ_1. Acest grup este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ al claselor de resturi modulo n. Amintim că notaţia abstractă pentru grupul ciclic de ordin n generat de un element x este

$$C_n = \langle x \mid x^n = e \rangle = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}.$$

Capitolul 3

Vectori

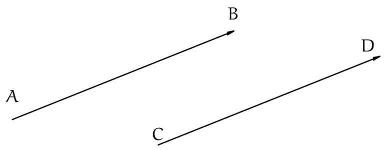
Algebra vectorială este un instrument standard pentru fizicieni. O cantitate fizică ce este complet determinată de un singur număr, cum ar fi volumul, masa, temperatura se numeşte *scalar*. Cantităţile scalare sunt tratate ca numere reale. Există însă şi cantităţi fizice, cum ar fi deplasarea, acceleraţia, momentul, momentul unghiular, forţa, numite *vectori*, care sunt determinate de mărime, direcţie şi sens. Să mai observăm că, de exemplu, deplasarea unghiulară poate fi caracterizată prin mărime şi sens, dar nu e un vector, deoarece operaţia de adunare a deplasărilor unghiulare nu e comutativă.

3.1 Preliminarii

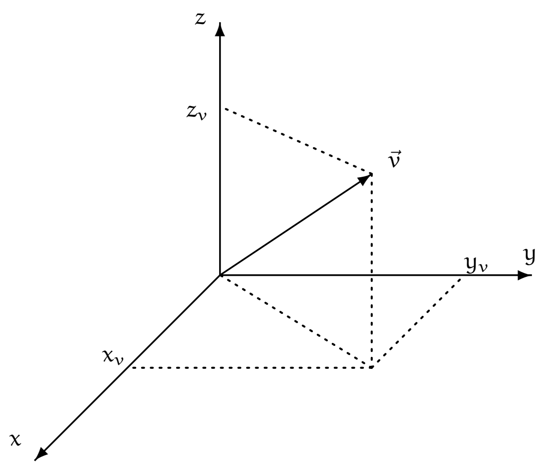
Fie $\vec{v}$ un vector. Atunci $\vec{v}$ este determinat de lungimea lui, notată cu $|\vec{v}|$ şi de vectorul unitar $\vec{u} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (numit şi *versor*). Mai precis, avem

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{u}.$$

O cantitate vectorială poate fi reprezentată grafic de un segment orientat având o săgeată în capăt. Lungimea segmentului reprezintă mărimea vectorului, segmentul determină direcţia, iar săgeata sensul vectorului. Putem vorbi de vectori legaţi (dacă punctul de aplicaţie este fix), de vectori alunecători (dacă punctul de aplicaţie se poate deplasa de-a lungul dreptei suport) şi de vectori liberi (dacă punctul de aplicaţie se poate deplasa arbitrar în spaţiu). Două perechi ordonate (A, B) şi (C, D) de puncte în spaţiu reprezintă acelaşi vector liber dacă $ABDC$ este un paralelogram, şi în acest caz notăm $\vec{AB} = \vec{CD}$.



În cele ce urmează, un vector va fi definit de componentele sale, adică de proiecţiile pe axele de coordonate carteziene, şi de versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ai acestor axe:



Astfel, avem

$$\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k},$$

Tripletul (x_v, y_v, z_v) al componentelor este de multe ori identificat cu vectorul $\vec{v}$:

$$\vec{v} = (x_v, y_v, z_v).$$

Doi vectori $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ şi $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sunt egali dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ şi $z_1 = z_2$.

Notaţia algebrică a unui vector poate fi generalizată la spaţii cu mai mult de trei dimensiuni, astfel încât un sistem ordonat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n numere reale reprezintă un vector. Această generalizare este subiectul capitolelor următoare.

3.1.1 Unghiuri directoare

Exprimăm versorul lui $\vec{v}$ în funcţie de versorii axelor de coordonate. Avem

$$\vec{v} = |\vec{v}| \left(\frac{x_v}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{y_v}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{z_v}{|\vec{v}|}\vec{k} \right).$$

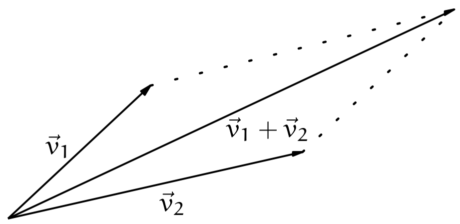
Notăm cu α, β şi γ unghiurile formate de axele Ox, Oy şi Oz cu vectorul $\vec{v}$. Atunci $\cos\alpha = \frac{x_v}{|\vec{v}|}$, $\cos\beta = \frac{y_v}{|\vec{v}|}$ şi $\cos\gamma = \frac{z_v}{|\vec{v}|}$ sunt *cosinusurile directoare* ale lui $\vec{v}$, şi astfel avem

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{j}.$$

3.2 Operaţii cu vectori

3.2.1 Adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari

Geometric, suma vectorilor $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ şi $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ se defineşte folosind *regula paralelogramului* sau *regula triunghiului.*



Fie $a \in \mathbb{R}$ un scalar şi $\vec{v} = (x, y, z)$. Geometric, vectorul $a\vec{v}$ este paralel cu $\vec{v}$ şi are de a ori lungimea lui $\vec{v}$. Dacă $a > 0$, atunci $a\vec{v}$ are sensul lui $\vec{v}$, iar dacă $a < 0$, atunci $a\vec{v}$ are sens opus lui $\vec{v}$. În coordonate carteziene avem

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$
$$a\vec{v} = (ax, ay, az).$$

Notăm cu $\mathcal{V}_3$ mulţimea vectorilor din spaţiu. Este uşor de verificat că $(\mathcal{V}_3, +)$ este grup abelian, iar înmulţirea cu scalari are următoarele proprietăţi:

1) $a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = a\vec{v}_1 + a\vec{v}_2$;

2) $(a_1 + a_2)\vec{v} = a_1\vec{v} + a_2\vec{v}$;

3) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$;

4) $(a_1 a_2)\vec{v} = a_1(a_2\vec{v})$.

Altfel spus, structura algebrică $(\mathcal{V}_3, +, \mathbb{R})$ este un *spaţiu vectorial* peste $\mathbb{R}$, concept cu care ne vom ocupa în detaliu începând cu capitolul următor.

3.2.2 Produsul scalar

Geometric, produsul scalar al vectorilor $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ şi $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ se defineşte astfel:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos\gamma,$$

unde γ este unghiul determinat de cei doi vectori $(0 \le \gamma \le \pi)$. Rezultă în particular că $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ dacă şi numai dacă $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ (admitem şi cazurile $\vec{v}_1 = 0$ sau $\vec{v}_2 = 0$). În coordonate carteziene avem

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Din definiţie, obţinem imediat *formula cosinusului.* Luând $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, avem

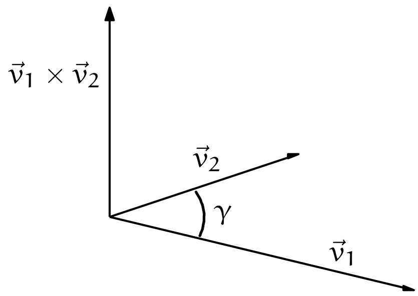
$$\vec{v}^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \cos\gamma.$$

3.2.3 Produsul vectorial

Geometric, produsul vectorial al vectorilor $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ şi $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ este vectorul $\vec{v} = \vec{v}_2 \times \vec{v}_2$ definit astfel: direcţia lui $\vec{v}$ este perpendiculară pe planul determinat de $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, sensul este dat de *regula mâinii drepte* sau *regula şurubului drept*, iar mărimea este egală cu aria paralelogramului determinat de cei doi vectori:

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin\gamma,$$

unde γ este unghiul determinat de cei doi vectori ($0 \le \gamma \le \pi$).



Rezultă în particular că $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$ dacă şi numai dacă $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ (admitem şi cazurile $\vec{v}_1 = 0$ sau $\vec{v}_2 = 0$) şi că produsul vectorial este anticomutativ:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1.$$

În coordonate carteziene avem

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

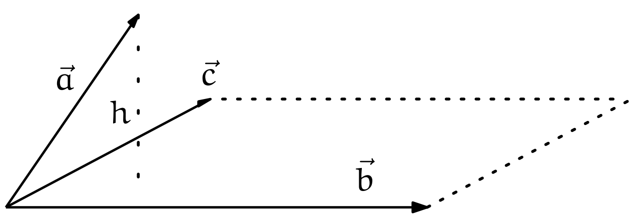
În mecanică, *momentul unei forţe* $\vec{F} = \vec{AB}$ în raport cu un punct O este produsul vectorial $\vec{m} = \vec{OA} \times \vec{F}$.

3.2.4 Produsul mixt (sau triplul produs scalar)

Scalarul $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ reprezintă volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, deoarece

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| \sin\theta \cos\alpha = hS = \mathcal{V}_{\vec{a}\vec{b}\vec{c}},$$

unde θ este unghiul determinat de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, α este unghiul determinat de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b} \times \vec{c}$, S este aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, iar h este înălţimea paralelogramului.



În coordonate carteziene, este uşor de văzut că

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

3.2.5 Dublul produs vectorial (sau triplul produs vectorial)

Dublul produs $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ este un vector perpendicular pe $\vec{b} \times \vec{c}$, deci se află în planul determinat de $\vec{b}$ şi $\vec{c}$. Dacă $\vec{b} \parallel \vec{c}$, atunci $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$. Dacă $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, atunci $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = r\vec{b} + s\vec{c}$, unde $r, s \in \mathbb{R}$. Lăsăm pe seama cititorului să demonstreze (geometric sau folosind coordonate carteziene) că în ambele cazuri avem

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3.3 Aplicaţii: punctul, dreapta şi planul în spaţiu

Ecuaţiile şi formulele de mai jos pot fi deduse fără dificultate folosind proprietăţile vectorilor şi ale operaţiilor cu acestea.

3.3.1 Dreapta determinată de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi un vector director $\vec{v}(l, m, n)$.
1) Ecuaţiile parametrice: $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt,\ t \in \mathbb{R}$.
2) Ecuaţiile canonice: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.
3) Cosinusurile directoare ale dreptei d sunt:

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ ,\ \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ ,\ \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ .$$

3.3.2 Dreapta determinată de două puncte $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3.3.3 Unghiul dintre două drepte de vectori directori $\overrightarrow{v}_1\,(l_1, m_1, n_1)$ şi $\overrightarrow{v}_2\,(l_2, m_2, n_2)$:

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2}{|\overrightarrow{v}_1| \cdot |\overrightarrow{v}_2|}, \qquad \phi \in [0, \pi].$$

3.3.4 Ecuaţia planului determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi de un vector normal $\vec{n}(A, B, C)$:

$$A\,(x-x_0) + B\,(y-y_0) + C\,(z-z_0) = 0.$$

3.3.5 Ecuaţia generală a unui plan:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \text{unde } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

3.3.6 Ecuaţia planului determinat de un punct $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ şi doi vectori necoliniari $\overrightarrow{v}_1\,(l_1, m_1, n_1)$ şi $\overrightarrow{v}_2\,(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3.3.7 Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.3.8 Ecuaţiile dreptei determinate ca intersecţia a două plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad \text{unde rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Direcţia acestei drepte este dată de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$, unde $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ sunt vectori normali pe planele date. Fasciculul de plane care trec prin această dreaptă este:

$$r\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad r, s \in \mathbb{R},\ r^2 + s^2 \neq 0.$$

3.3.9 Distanţa de la un punct A la o dreaptă d ce trece prin M_0 şi are direcţia $\overrightarrow{v}$:

$$d(A, d) = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{M_0A}|}{|\overrightarrow{v}|}.$$

3.3.10 Distanţa de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $p:\ Ax + By + Cz + D = 0$:

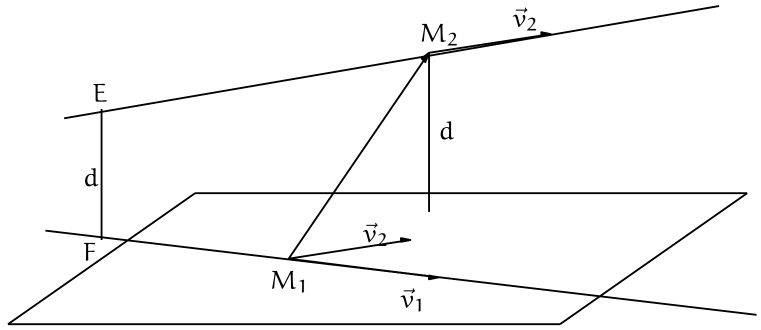
$$d\,(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3.3.11 Unghiul dintre dreapta de direcţie $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ şi planul orientat $p:\ Ax + By + Cz + D = 0$ având vector normal $\vec{n}(A, B, C)$:

$$\sin\phi = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{N}| \cdot |\overrightarrow{v}|}, \qquad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

3.3.12 Ecuaţiile perpendicularei comune a două drepte d_1 şi d_2 de vectori directori $\overrightarrow{v}_1$ şi $\overrightarrow{v}_2$ se deduc astfel:

- se calculează direcţia perpendicularei comune $\vec{v} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$;
- se scrie ecuaţia planului p_1 ce trece prin d_1 şi conţine pe $\vec{v}$;
- se scrie ecuaţia planului p_2 ce trece prin d_2 şi conţine pe $\vec{v}$.



Perpendiculara comună este intersecţia planelor p_1 şi p_2. Deducem şi formula distanţei dintre dreptele d_1 şi d_2 astfel: alegem punctele $M_1 \in D_1$, $M_2 \in D_2$; atunci

$$d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2)|}{|\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2|}.$$

(observăm că $d = d(d_1, d_2)$ este înălţimea paralelipipedului determinat de vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $M_1\vec{M}_2$.

3.3.13 Aria triunghiului determinat de punctele $M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{A}_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

3.3.14 Volumul tetraedului determinat de punctele $M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, 3, 4$:

$$\mathcal{V}_{M_1M_2M_3M_4} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.4 Sisteme de coordonate speciale

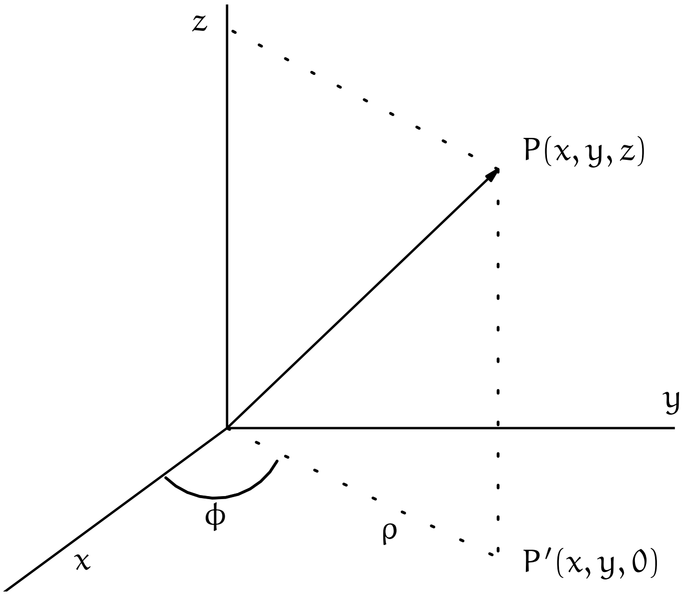
Se pot defini multe sisteme de coordonate ortogonale. În această secţiune prezentăm două care sunt des utilizate în practică.

3.4.1 Coordonatele cilindrice (ρ, ϕ, z)

Considerăm punctul $P(x, y, z)$ şi introducem următoarele notaţii:

- $P'(x, y, 0)$ este proiecţia lui P pe planul xOy;
- $\rho = OP' = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- ϕ este unghiul format de axa Ox şi vectorul $O\vec{P}'$ (unde $0 \leq \phi < 2\pi$).

Atunci coordonatele cilindrice ale lui P sunt date de tripletul (ρ, ϕ, z) astfel definit.



Invers, coordonatele carteziene (x, y, z) sunt determinate de coordonatele cilindrice (ρ, ϕ, z) prin formulele

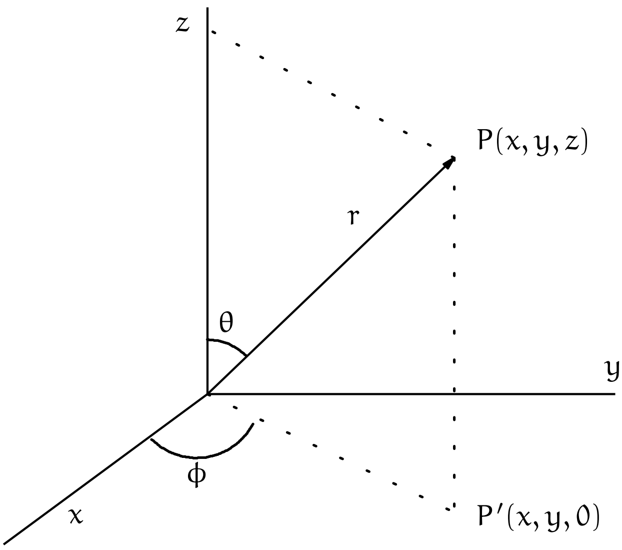
$$x = \rho \cos \phi; \qquad y = \rho \sin \phi; \qquad z = z.$$

3.4.2 Coordonatele sferice (r, θ, ϕ)

Considerăm punctul $P(x, y, z)$ şi introducem următoarele notaţii:

- $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- θ este unghiul format de axa Oz şi vectorul $\vec{OP}$ (unde $0 \leq \theta \leq \pi$);
- $P'(x, y, 0)$ este proiecţia lui P pe planul xOy;
- $\rho = OP' = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- ϕ este unghiul format de axa Ox şi vectorul $\vec{OP'}$ (unde $0 \leq \phi < 2\pi$).

Atunci coordonatele sferice ale lui P sunt date de tripletul (r, θ, ϕ) astfel definit.



Invers, coordonatele carteziene (x, y, z) sunt determinate de coordonatele sferice (r, θ, ϕ) prin formulele

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \qquad y = r \sin \theta \sin \phi; \qquad z = r \cos \theta.$$

3.5 Exerciţii

Exerciţiul 25 Fiind daţi vectorii $\vec{a} = (2, 2, -1)$ and $\vec{b} = (6, -3, 2)$, să se calculeze:

a) $5\vec{a} - 7\vec{b}$;

b) $\vec{a}^2 + \vec{b}^2$;

c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

d) unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

e) cosinuşii directori ai lui $\vec{a}$;

f) proiecţia lui $\vec{b}$ pe $\vec{a}$.

Exerciţiul 26 Să se determine vectorul unitar perpendicular pe planul determinat de vectorii $\vec{a} = (2, -6, -3)$ şi $\vec{b} = (4, 3, -1)$.

Exerciţiul 27 Fiind daţi vectorii $\vec{a} = (2, 1, -1)$ şi $\vec{b} = (1, -1, 2)$, să se calculeze:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$;

b) un vector unitar perpendicular pe planul determinat de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Exerciţiul 28 Să se calculeze: $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot [(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \times (3\vec{i} - \vec{k})]$.

Exerciţiul 29 Să se verifice următoarele identităţi:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$;
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$;
5. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))\vec{c} - (\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))\vec{d} = (\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}))\vec{b} - (\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}))\vec{a}$
(să observăm că dreapta determinată de acest vector este intersecţia dintre planul determinat de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi planul determinat de $\vec{c}$ şi $\vec{d}$);
6. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c})^2$.

Exerciţiul 30 Să se demonstreze:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - |\vec{a} \times \vec{b}|^2$ (**identitatea lui Lagrange**).
b) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (**inegalitatea lui Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz**).
c) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (**inegalitatea lui Minkowski**).

Exerciţiul 31 a) Să se arate că vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
b) Să se determine ecuaţia planului determinat de punctele $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$ şi $P_3(-1, 3, 2)$.

Exerciţiul 32 Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $(2, -5, 3)$ şi este:
a) paralelă cu axa Oz;
b) paralelă cu dreapta d_1: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;
c) este paralelă cu dreapta d_2: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$.

Exerciţiul 33 Fie dreptele d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{1}$ şi d_2: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-9}{2}$. Să se calculeze:
a) unghiul dintre d_1 şi d_2;
b) perpendiculara comună a celor două drepte;
c) distanţa dintre d_1 şi d_2.

Exerciţiul 34 Să se demonstreze proprietăţile 3.3.1 – 3.3.14 din Secţiunea 3.3.

Capitolul 4

Spaţii vectoriale şi algebre

Scopul algebrei liniare este investigarea spaţiilor vectoriale şi ale funcţiilor liniare. Un spaţiu vectorial este o structură algebrică formată dintr-o mulţime de elemente numite vectori, care se pot aduna şi înmulţi cu scalari. Scalarii sunt numere reale, numere complexe sau în general, elemente ale unui corp comutativ. Operaţiile satisfac anumite axiome. Spaţiile vectoriale sunt caracterizate prin dimensiunea lor, adică de numărul maxim de direcţii independente. Spaţiile vectoriale au aplicaţii în matematică, ştiinţele naturii, ştiinţe sociale şi inginerie. Din punct de vedere istoric, primele idei care duc la spaţii vectoriale pot fi găsite în secolul al 17-lea, în studiile asupra geometriei analitice, sistemelor de ecuaţii liniare şi vectorilor euclidieni. Tratarea abstractă modernă, formulată de Giuseppe Peano în 1888, se referă la obiecte mai generale şi mai abstracte decât vectorii euclidieni, dar o mare parte din teorie poate fi văzută ca o extensie a conceptelor geometrice clasice, cum ar fi liniile, planele şi analoagele lor multidimensionale.

Spaţiile vectoriale pot fi generalizate în mai multe moduri, ajungând la noţiuni mai avansate, cum ar fi tensorii sau câmpurile vectoriale. Un câmp vectorial este o asociere a unui vector tangent la fiecare punct al unei varietăţi diferenţiabile – spaţiu care local arată ca un spaţiu euclidian, dar poate avea structură globală complicată. Câmpurile vectoriale sunt folosite pentru a modela, de exemplu, viteza şi direcţia unui fluid în mişcare, sau forţele gravitaţionale, ce se schimbă de la un punct la altul. Calculul diferenţial şi integral extinde la câmpuri vectoriale într-un mod natural.

Un spaţiu vectorial poate fi dotat cu structuri suplimentare, cum ar fi o normă sau un produs scalar, obţinându-se spaţiile Banach şi spaţiile Hilbert, care au o teorie mai bogată. Astfel de spaţii vectoriale topologice infinit-dimensionale apar în analiza matematică, de exemplu spaţii ai căror vectori sunt funcţii cu valori reale sau complexe.

4.1 Noţiuni de bază şi exemple

Fie K un corp comutativ, de exemplu $K=\mathbb{R}$ sau $K=\mathbb{C}$.

Definiţia 4.1.1 Fie $(V,+)$ un grup abelian. Spunem că structura algebrică $V=(V,+,K)$ este un K-**spaţiu vectorial**, dacă se dă o funcţie

$$\phi : K\times V\to V,\qquad \phi(a,x)=ax$$

(adică o *operaţie externă* pe V) astfel încât următoarele patru axiome au loc:

(V1) $a(x+y)=ax+ay$,
(V2) $(a+b)x=ax+bx$,
(V3) $(ab)x=a(bx)$,
(V4) $1x=x$,

pentru orice $a,b\in R$ şi $x,y\in V$.

Elementele lui K se numesc *scalari*, ale lui V *vectori*, iar operaţia externă ϕ *înmulţire cu scalari*. Spunem că $(V,+)$ este *grupul aditiv* al spaţiului vectorial V.

Definiţia 4.1.2 Spunem că structura algebrică $A=(A,+,\cdot,K)$ este o K-**algebră**, dacă:

(A1) $(A,+,\cdot)$ este inel,
(A2) $(A,+,K)$ este K-spaţiu vectorial,
(A3) $a(xy)=(ax)y=x(ay)$ pentru orice $a\in K$ şi $x,y\in A$.

A este K-algebră *asociativă* (*comutativă*) dacă $(A,+,\cdot)$ este inel asociativ (comutativ).

Observaţii 4.1.3 (Reguli de calcul) a) Fie V un K-spaţiu vectorial, şi considerăm funcţiile

$$f_a : V \to V, \quad f_a(x) = ax, \qquad f'_x : K \to V, \quad f'_x(a) = ax.$$

Din axiomele (M1)–(M4) rezultă că $f_a : (V, +) \to (V, +)$ şi $f'_x : (A, +) \to (V, +)$ sunt morfisme de grupuri, deci pentru orice $a, b \in K$ şi $x, y \in M$ avem

(1) $a0_V = 0_K x = 0_V$.
(2) $(-a)x = a(-x) = -ax, \ (-a)(-x) = ax$.
(3) $a(x - y) = ax - ay$.
(4) $(a - b)x = ax - bx$.
b) Dacă $ax = 0$, atunci $a = 0$ sau $x = 0$.
Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, atunci există $a^{-1} \in K$. Atunci $x = 1x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}0 = 0$.

Exerciţiul 35 (Spaţiul K^n) Introducem principalul exemplu de spaţiu vectorial. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$K^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K, \ i = 1, \dots, n\}$$

este un K-spaţiu vectorial, unde operaţiile sunt definite astfel:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$ax = (ax_1, \dots, ax_n)$$

pentru orice $x, y \in K^n$ şi $a \in K$.

Observaţii 4.1.4 a) Conform exerciţiului anterior, $\mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$-algebră. Evident, putem restrânge înmulţirea cu scalari la orice subcorp, deci în particular, $\mathbb{C}$ este o $\mathbb{R}$-algebră.

b) În general, dacă $(V, +, K)$ este un K-spaţiu vectorial şi L este un subcorp al lui K, atunci $(V, +, L)$ devine L-spaţiu vectorial prin restricţia scalarilor.

Exemple 4.1.5 (Vectori liberi) a) $\mathcal{V}_1 = \{\vec{v} = x\vec{i} \mid x \in \mathbb{R}\}$, mulţimea vectorilor liberi de pe dreaptă, este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, pe care îl identificăm cu $\mathbb{R}$.

b) $\mathcal{V}_2 = \{\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, mulţimea vectorilor liberi din plan, este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, pe care îl identificăm cu $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{V}_3 = \{\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, mulţimea vectorilor liberi din spaţiu, este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, pe care îl identificăm cu $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 36 (Produs direct) Fie U şi V K-spaţii vectoriale. Să se arate că: $(U \times V, +, K)$ este K-spaţiu, unde prin definiţie $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ şi $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$.

Exerciţiul 37 (Algebra funcţiilor) Fie M o mulţime oarecare şi notăm $K^M = \{f \mid f : M \to K\}$. Să se arate că K^M este o K-algebră, unde

$$(f + g)(x) = f(i) + g(i),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$(af)(x) = af(x)$$

pentru orice $f, g \in K^M$, $x \in M$ şi $a \in K$. Observăm că putem identifica $K^n = K^{\{1,\dots,n\}}$. În particular, K este K-algebră, unde înmulţirea cu scalari este dată de $\phi(a, x) = ax$ pentru orice $a, x \in K$.

Exerciţiul 38 (Algebra matricelor) Să se arate că:
a) $(M_{m,n}(K), +, K)$ este un K-spaţiu vectorial.
b) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$ pentru orice $A \in M_{m,n}(K), \ B \in M_{n,p}(K), \ a \in K$.
c) $(M_n(K), +, \cdot, K)$ este o K-algebră. Mai general, dacă A este o K-algebră, atunci şi $M_n(A)$ este o K-algebră.

4.1.1 Algebre Lie

Există exemple importante de algebre care nu sunt asociative.

Definiţia 4.1.6 K-algebra L se numeşte *algebră Lie*, dacă pentru orice $a, b, c \in L$ avem
(L1) $a^2 = 0$;
(L2) $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (*identitatea lui Jacobi*).

Exerciţiul 39 Dacă L este o K-algebră Lie, atunci L este *anticomutativ*, adică $ab = -ba$ pentru orice $a, b \in L$.

Exerciţiul 40 Fie A o K-algebră asociativă şi definim operaţia $[a, b] = ab - ba$, $(\forall)a, b \in K$, numită *produs Lie* sau *paranteza Lie*. Să se arate că $(A, +, [-, -], K)$ este o K-algebră Lie.

Exerciţiul 41 Să se arate că vectorii liberi din spaţiu, formează o $\mathbb{R}$-algebră Lie $\mathcal{V}_3 = (\mathcal{V}_3, +, \times, \mathbb{R})$, unde înmulţirea este produsul vectorial.

4.2 Subspaţii vectoriale şi subalgebre

Definiţia 4.2.1 a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi U o submulţime nevidă. Spunem că U este un *subspaţiu vectorial* al lui V (notaţie: $U \le_R V$) dacă
(1) $\forall x, y \in U,\ \ x + y \in U$.
(2) $\forall a \in K,\ x \in U,\ \ ax \in U$.
b) Fie A o K-algebră şi B o submulţime nevidă. Spunem că B este o K-*subalgebră* a lui A (notaţie: $B \le_K A$ sau $B \le (A, +, \cdot, K)$) dacă
(1) $\forall x, y \in B,\ \ x + y \in B$.
(2) $\forall x, y \in B,\ \ xy \in B$.
(3) $\forall a \in R,\ x \in B,\ \ ax \in B$.

Observaţii 4.2.2 a) Dacă $U \le_K V$, atunci U este K-spaţiu vectorial cu operaţiile induse. Dacă $B \le_K A$, atunci B este o K-algebră cu operaţiile induse.
b) Avem $\emptyset \ne U \le_K V$ dacă şi numai dacă

$$\forall\ x, y \in U,\ a, b \in K\ \ ax + by \in U.$$

Analog, $\emptyset \ne B \le_K A$ dacă şi numai dacă

$$\forall\ x, y \in A,\ a, b \in K\ \ ax + by, xy \in B.$$

c) Observăm că $\{0\}$, $V \le_K V$. Acestea sunt subspaţiile *triviale*.

Exemple 4.2.3 a) Singurele subspaţii ale lui $\mathcal{V}_1$ sunt cele triviale.
b) Subspaţiile proprii ale lui $\mathcal{V}_2$ se identifică cu dreptele ce trec prin origine.
c) Subspaţiile proprii ale lui $\mathcal{V}_3$ se identifică cu dreptele şi planele ce trec prin origine.

Exerciţiul 42 Fie $U_1, \dots, U_n$ subspaţii ale lui V. Atunci

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i := U_1 \cap \dots \cap U_n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} U_i := U_1 + \dots + U_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid x_i \in U_i\}$$

sunt subspaţii.

Exerciţiul 43 Fie U_1, U_2 subspaţii ale lui V. Atunci $U_1 \cup U_2$ nu este, în general, subspaţiu. Mai exact, avem $U_1 \cup U_2 \le_K V \Leftrightarrow\ U_1 \subseteq U_2$ sau $U_2 \subseteq U_1$.

Exerciţiul 44 Fie $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-t) = f(t)\ (\forall) t \in \mathbb{R}\}$ mulţimea funcţiilor pare şi $\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-t) = -f(t)\ (\forall) t \in \mathbb{R}\}$ mulţimea funcţiilor impare. Să se arate că:
a) $\mathcal{P},\ \mathcal{I} \le \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
b) Pentru orice $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ există elementele $g \in \mathcal{P}$ şi $h \in \mathcal{I}$ unic determinate astfel încât $f = g + h$.
c) Dacă $f, g \in \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$, să se studieze paritatea lui fg şi a lui $f \circ g$. Să se arate că $\mathcal{P}$ este subalgebră a algebrei $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exerciţiul 45 Fie $\mathcal{C}[0,1] = \{\alpha : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \alpha$ este continuă$\}$ şi $\mathcal{D}[0,1] = \{\alpha : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \alpha$ este derivabilă$\}$. Să se arate că $\mathcal{D}[0,1] \le_{\mathbb{R}} \mathcal{C}[0,1] \le_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \cdot, \mathbb{R})$ sunt subalgebre.

4.3 Funcţii liniare şi morfisme de algebre

Definiţia 4.3.1 Fie V şi V' două K-spaţii vectoriale şi fie $f : V \to V'$ un funcţie. Spunem că f este *morfism de* K-*spaţii* sau că f este funcţie (sau aplicaţie, operator, transformare) K-*liniară*, dacă
(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
(2) $f(ax) = af(x)$.
pentru orice $x, y \in V$ şi $a \in K$.
Funcţia liniară $f : V \to V'$ este *izomorfism* dacă există o funcţie liniară $f' : V' \to V$ astfel încât $f' \circ f = 1_V$ şi $f \circ f' = 1_{V'}$.
Notaţii:
- $\mathrm{Hom}_K(V, V') = \{f : V \to V' \mid f\ \ K\text{-liniar}\}$.
- $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ (*mulţimea endomorfismelor*).
- $\mathrm{Aut}_K(V) = \{f : V \to V \mid f\ \ K\text{-izomorfism}\}$ (*mulţimea automorfismelor*).
- $V \simeq V'$ dacă există un izomorfism $f : V \to V'$.

Definiţia 4.3.2 Fie A şi A' două K-algebre şi $f : A \to A'$ o funcţie. Spunem că f este *morfism de* K-*algebre*, dacă:

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(2) $f(xy) = f(x)f(y)$,
(3) $f(ax) = af(x)$.

Analog definim noţiunile de izomorfism, endomorfism şi automorfism de K-algebre.

Exerciţiul 46 a) Funcţia $f : V \to V'$ este K-liniară $\Leftrightarrow$ $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$ pentru orice $x, y \in V$ şi $a, b \in K$.

b) În acest caz $f(0) = 0$ şi $f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in M$.

Exerciţiul 47 Fie $f : A \to A'$ un morfism de K-algebre. Să se arate că f este izomorfism $\Leftrightarrow$ f este bijectiv (afirmaţia e valabilă şi pentru spaţii vectoriale).

Exerciţiul 48 Fie $f, f' : V \to V'$, $g : U \to V$ şi $h : V' \to W$ funcţii K-liniare. Definim operaţiile

$$(f+f')(x) = f(x) + f'(x),$$
$$(af)(x) = af(x) \qquad \forall\, a \in K,\ x \in V.$$

Să se arate că:

a) $f+f'$, $af : V \to V'$ şi $f \circ g : U \to V'$ sunt K-liniare.
b) $h \circ (f+f') \circ g = h \circ f \circ g + h \circ f' \circ g$.
c) $(\mathrm{Hom}_K(V, V'), +, K)$ este un K-spaţiu vectorial şi $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ, K)$ este o K-algebră.

Definiţia 4.3.3 Fie V şi V' două spaţii vectoriale şi fie $f : V \to V'$ o funcţie liniară. Dacă $U \le_K V$ şi $U' \le_K V'$, atunci definim a următoarele submulţimi:

a) $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq V'$.
b) $\mathrm{Im}(f) = f(V) \subseteq V'$ (*imaginea lui* f).
c) $f^{-1}(U') = \{x \in V \mid f(x) \in U'\}$.
d) $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ (*nucleul lui* f).

Exerciţiul 49 Să se arate că:

a) $f(U) \le_K V'$ şi $f^{-1}(U') \le V$. În particular, $\mathrm{Im}(f) \le_K V'$ şi $\mathrm{Ker} f \le_K V$.
b) f este injectiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $(f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0)$.

Exerciţiul 50 Fie V un K-spaţiu vectorial, $S, T \le_K V$ şi $f : S \times T \to V$, $f(s,t) = s + t$. Să se arate că:

a) f este K-liniară.
b) $\mathrm{Im}(f) = S + T$.
c) $\mathrm{Ker} f \simeq S \cap T$.

Exerciţiul 51 Să se arate că următoarele funcţii sunt $\mathbb{R}$-liniare:

a) $F : \mathcal{D}[0,1] \to \mathbb{R}$, $\ F(f) = f'$.
b) $G : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$, $\ G(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$

4.4 Algebra cuaternionilor

Construcţia de mai jos a unui corp necomutativ ce extinde pe $\mathbb{C}$ este datorată matematicianului irlandez William Rowan Hamilton.

Exerciţiul 52 Fie $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$. Să se arate că $\mathbb{H}$ este o subalgebră a $\mathbb{R}$-algebrei $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$

Notaţie:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

deci avem că $\mathbb{H}$ este $\mathbb{R}$-algebra *cuaternionilor*:

$$\mathbb{H} = \{q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ este un cuaternion, notăm cu $\bar{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ *conjugatul* lui q, cu $N(q) = q\bar{q}$ *norma* lui q şi cu $\mathrm{Tr}(q) = q + \bar{q}$ *urma* lui q.

Exerciţiul 53 Să se arate că :

a) $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$.

b) Funcţia $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $q \mapsto \bar{q}$ este un antiautomorfism al lui $\mathbb{H}$, şi avem $\phi \circ \phi = 1_{\mathbb{H}}$.

c) Dacă $q = a1 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, atunci $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

d) Dacă $q \neq 0$, atunci q este inversabil în $\mathbb{H}$ şi avem $q^{-1} = \bar{q}/N(q)$.

e) $N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2)$ pentru orice $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

f) $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ este un grup cu 8 elemente (să se întocmească tabla operaţiei „·”).

Definiţia 4.4.1 a) Exerciţiile de mai sus arată că $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ este corp necomutativ, care se numeşte *corpul cuaternionilor.* De asemenea, spunem că $(\mathbb{H}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este o $\mathbb{R}$-*algebră cu diviziune.*

b) Grupul Q_8 se numeşte *grupul cuaternionilor.*

Exerciţiul 54 Să se arate că:

a) Funcţia $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $\psi(a+bi) = a1 + bi + cj + dk$ este un morfism injectiv de $\mathbb{R}$-algebre (deci şi de corpuri). (Aşadar, $\mathbb{C}$ poate fi privit ca $\mathbb{R}$-subalgebră şi ca subcorp al lui $\mathbb{H}$).

b) $\mathbb{H}$ este $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial, dar $\mathbb{H}$ nu este o $\mathbb{C}$-algebră (definiţia înmulţirii cu scalari din $\mathbb{C}$ fiind cea evidentă).

Următorul exerciţiu descrie o altă reprezentare matricială a algebrei cuaternionilor.

Exerciţiul 55 Să se arate că există un izomorfism de $\mathbb{R}$-algebre (deci şi de corpuri) $\mathbb{H} \simeq \mathbb{H}_1$, unde

$$\mathbb{H}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subset M_4(\mathbb{R}).$$

4.4.1 Rotaţii în spaţiu. Formula lui Rodrigues

O teoremă a lui Leonhard Euler din 1776 spune ca orice deplasare în spaţiul (afin) tridimensional $\mathbb{R}^3$ a unui corp rigid, astfel ca un punct al corpului este fixat, este echivalentă cu o rotaţie (proprie) în jurul unei axe ce trece prin punctul fixat. În particular, rezultă de aici şi faptul că produsul a două rotaţii este o rotaţie. Astfel, rotaţiile în jurul axelor ce trec prin origine formează un grup, numit **grupul special ortogonal**, notat SO(3), pe care îl vom studia mai târziu în secţiunea 8.6.1. Cuaternionii furnizează o metodă comodă de calcul cu rotaţii în spaţiu, în tr-o manieră analoagă modului în care numerele complexe descriu rotaţiile în plan.

Începem cu un exerciţiu care arată legătura dintre cuaternioni şi vectorii din spaţiu. Identificăm vectorul $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathcal{V}_3$ cu cuaternionul pur (imaginar) $xi + yj + zk \in \mathbb{H}$.

Exerciţiul 56 Să se arate că pentru orice $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ avem

$$(a_1 + \vec{v}_1)(a_2 + \vec{v}_2) = (a_1 a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + (a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1) + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

Fie $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \in \mathcal{V}_3$ versorul axei de rotaţie şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$ unghiul rotaţiei. Fie $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathcal{V}_3$ un vector şi fie $\vec{v}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \in \mathcal{V}_3$ vectorul obţinut prin rotirea cu unghi α a lui $\vec{v}$ în jurul axei determinate de $\vec{u}$. Expresia lui $\vec{v}'$ a fost determinată de Olinde Rodrigues în 1815:

$$\vec{v}' = \vec{v}_\perp \cos\alpha + (\vec{u} \times \vec{v}) \sin\alpha + \vec{v}_\parallel,$$

unde $\vec{v}_\parallel = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$ este componenta lui $\vec{v}$ paralelă cu $\vec{u}$ (adică proiecţia lui $\vec{v}$ pe axa $\vec{u}$) iar $\vec{v}_\perp = \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$ este componenta lui $\vec{v}$ perpendiculară pe $\vec{u}$.

Considerăm quaternionul

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u} \sin\frac{\alpha}{2} = a1 + bi + cj + dk,$$

unde $a = \cos\frac{\alpha}{2}$, $b = u_x \sin\alpha$, $c = u_y \sin\alpha$ şi $d = u_z \sin\alpha$. Atunci $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ şi invers, se poate vedea uşor că orice cuaternion de normă 1 poate fi exprimat în acest mod. În particular, în acest caz avem $q^{-1} = \bar{q} = \cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u} \sin\frac{\alpha}{2}$.

Teorema 4.4.2 *Cu notaţiile de mai sus, avem:* $\vec{v}' = q\vec{v}q^{-1}$.

Demonstraţie. Folosind Exerciţiul 56, avem

$$\begin{aligned}
q\vec{v}q^{-1} &= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + (\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u}\vec{v}\vec{u}\sin^2\frac{\alpha}{2}\\
&= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2(\vec{u}\times\vec{v})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - (\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}))\sin^2\frac{\alpha}{2}\\
&= \vec{v}(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}) + (\vec{u}\times\vec{v})(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}) + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})(2\sin^2\frac{\alpha}{2})\\
&= \vec{v}\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})(1-\cos\alpha)\\
&= (\vec{v} - \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}))\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})\\
&= \vec{v}_\perp\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{v}_\parallel,
\end{aligned}$$

deci am obţinut chiar formula lui Rodrigues. ■

Exerciţiul 57 Să se arate că formula lui Rodrigues poste fi scrisă sub forma:

$$\vec{v}' = \vec{v} + 2a(\vec{u}\times\vec{v}) + 2(\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})).$$

4.5 Serii formale şi polinoame

Un polinom este o expresie de forma $f = a_0 + a_1X + \dots a_nX^n$, constând din nedeterminate şi coeficienţi. Prezentăm mai jos definiţia exactă a acestui concept.

4.5.1 Algebrele $K[[X]]$ şi $K[X]$

Notaţii: Fie

$$K^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to K\}$$

mulţimea *şirurilor* de elemente din K. Dacă $f \in K^{\mathbb{N}}$, atunci notăm $f = (a_0, a_1, \dots)$, unde $a_n = f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe mulţimea $K^{\mathbb{N}}$ definim următoarele operaţii:

$$\begin{aligned}
(f+g)(n) &= f(n) + g(n) = a_n + b_n,\\
(fg)(n) &= \sum_{i+j=n} f(i)g(j) = \sum_{i+j=n} a_ib_j,\\
(af)(n) &= af(n) = aa_n,
\end{aligned}$$

unde $f = (a_0, a_1, \dots)$, $g = (b_0, b_1, \dots) \in K^{\mathbb{N}}$ şi $a \in K$.

Mai departe, fie

$$\mathrm{supp}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

mulţimea suport a lui f, şi fie

$$K^{(\mathbb{N})} = \{f \in K^{\mathbb{N}} \mid \mathrm{supp}(f) \text{ este mulţime finită}\}$$

mulţimea şirurilor având un număr finit de termeni nenuli.

Teorema 4.5.1 a) $K^{\mathbb{N}}$ *este o* K*-algebră comutativă cu unitate.*

b) $K^{(\mathbb{N})}$ *subalgebră a lui* $K^{\mathbb{N}}$*, elementul unitate al lui* $K^{\mathbb{N}}$ *este* $1 = (1, 0, 0, \dots)$ *şi funcţia*

$$\iota_K : K \to K^{(\mathbb{N})}, \quad \iota_K(a) = (a, 0, 0, \dots)$$

este un morfism injectiv unitar de K*-algebre.* (Identificăm a cu $\iota_A(a)$.)

c) *Fie* $X = (0, 1, 0, \dots)$*. Atunci* $X^k(i) = \delta_{ik}$*, adică*

$$X^k = (\underset{0}{0}, \underset{1}{0}, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots).$$

Dacă $f \in K^{(\mathbb{N})}$ *astfel încât* $a_i = 0$ *pentru orice* $i > n$ *, atunci*

$$f = a_0 + a_1X + \dots a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k,$$

şi această scriere este unică.

Definiţia 4.5.2 a) $K^{\mathbb{N}}$ se numeşte *algebra seriilor formale* cu coeficienţi în K'.
b) $K^{(\mathbb{N})}$ se numeşte *algebra polinoamelor* peste K.
c) Polinomul X se numeşte *nedeterminată*, iar elementele $a_i = f(i) \in K$ se numesc *coeficienţii* lui f.

Notaţii:
- $K^{\mathbb{N}} = K[[X]]$,
- $K^{(\mathbb{N})} = K[X] = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in K\}$.
- Dacă $f = (a_0, a_1, \dots) \in K[[X]]$, atunci folosim notaţia formală $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$.

Definiţia 4.5.3 a) Dacă $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ este un polinom nenul, atunci

$$\deg(f) = \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$$

este *gradul* lui f.
b) Dacă $\deg(f) = n$ atunci a_n este *coeficientul principal* al lui f. Prin definiţie, $\deg 0 = -\infty$.
c) Dacă $f \in K[[X]]$ este o serie formală, atunci $o(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid a_n \neq 0\}$ este *ordinul* lui f.

Exerciţiul 58 Dacă $f, g \in K[X]$, atunci

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}, \qquad \deg(fg) = \deg(f)\deg(g).$$

Exerciţiul 59 Fie $f, g \in K[[X]]$.
a) $o(f+g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$; $o(fg) = o(f) + o(g)$.
b) f este inversabil în $K[[X]] \Leftrightarrow a_0 \neq 0$ în K. Să se calculeze inversa lui $1+X$ respectiv a lui $1-X$.

4.5.2 Funcţii polinomiale. Rădăcini ale polinoamelor

Definiţia 4.5.4 Funcţia

$$\tilde{f} : K \to K, \qquad \tilde{f}(x) = f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

se numeşte *funcţia polinomială* asociată lui f.

Observaţii 4.5.5 Avem $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$, $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ şi $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$, deci funcţiile polinomiale formează o subalgebră a algebrei funcţiilor K^K.

Definiţia 4.5.6 a) Dacă $f(a) = 0$, atunci spunem că $x \in K$ este o *rădăcină* a lui f.
b) Spunem că $a \in K$ este rădăcină de multiplicitate k a lui f (unde $k \in \mathbb{N}$), dacă există $g \in K[X]$ astfel încât

$$f = (X-a)^k g, \quad g(a) \neq 0.$$

Prezentăm câteva proprietăţi importante are rădăcinilor polinoamelor.

Teorema 4.5.7 (Bezout) a) *Elementul* $a \in K$ *este rădăcină a polinomului* f *dacă şi numai dacă* $f = (X-a)g$, *unde* $g \in K[X]$.
b) *Dacă* $\deg(f) = n$, *atunci* f *are cel mult* n *rădăcini în* K (numărând şi multiplicităţile).

Propoziţia 4.5.8 (Formulele lui Viéte) *Dacă* $x_1, \dots, x_n \in K$ *sunt rădăcini ale polinomului* $f = a_n + a_{n-1}X + \dots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n \in K[X]$, *atunci*

$$\begin{aligned}
-a_1/a_0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\
a_2/a_0 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\
&\dots \\
(-1)^k a_k/a_0 &= x_1 \dots x_k + \dots + x_{n-k+1} \dots x_n \\
&\dots \\
(-1)^n a_n/a_0 &= x_1 \dots x_n.
\end{aligned}$$

Următoarea teoremă este numită **teorema fundamentală a algebrei clasice**.

Teorema 4.5.9 (Gauss–d'Alembert) *Orice polinom de grad* ≥ 1 *cu coeficienţi în* $\mathbb{C}$ *are cel puţin o rădăcină în* $\mathbb{C}$. *(Deci orice polinom de grad* $n \geq 1$ *cu coeficienţi în* $\mathbb{C}$ *are exact* n *rădăcini în* $\mathbb{C}$.*)*

Propoziţia 4.5.10 *Fie* $f \in \mathbb{R}[X]$ *şi* $k \in \mathbb{N}$. *Dacă* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *este o rădăcină de multiplicitate* k *a lui* f, *atunci şi conjugata* $\bar{z} = a - bi$ *este rădăcină de multiplicitate* k *a lui* f.

Propoziţia 4.5.11 *Fie* $f = a_0 + a_1X + \dots a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ *un polinom cu coeficienţi întregi. Presupunem că fracţia ireductibilă* $x = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ *este rădăcină a lui* f. *Atunci numărătorul lui* x *divide termenul liber al lui* f, *iar numitorul divide coeficientul dominant, adică* $r \mid a_0$ *şi* $s \mid a_n$.

4.5.3 Exemple de serii convergente în planul complex $\mathbb{C}$. Funcţii trigomometrice şi hiperbolice

Am vazut în secţiunea anterioară că unui polinom $f \in K[X]$ i se asociază funcţia polinomială $\tilde{f} : K \to K$. În cazul unei serii formale $f \in K[[X]]$ nu putem face acest lucru, deorece în general, suma infinită $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nu are sens. Dacă K este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ (dar şi în alte cazuri), în analiza matematică se studiază convergenţa seriilor.

Se ştie că dezvoltările în serie Taylor ale funcţiilor e^x, $\sin x$ şi $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, se extind la serii convergente în întreg planul complex $\mathbb{C}$. Astfel se obţin funcţiile analitice (olomorfe):

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Exerciţiul 60 a) Să se verifice (folosind expresiile de mai sus) **formula lui Euler**:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În particular, avem $e^{i\pi} + 1 = 0$.

b) Să se arate că $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ şi $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

c) Să se arate că $e^{z+w} = e^z e^w$ pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

d) Să se deducă formulele cunoscute pentru $\sin(z \pm w)$ şi $\cos(z \pm w)$.

Putem discuta astfel de serii şi folosind **derivata formală**: daca $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_k X^{\in} K[[X]]$, atunci definim

$$f' = \sum_{i=0}^{\infty} k a_k X^{k-1}.$$

Exerciţiul 61 a) Să se rezolve în $K[[X]]$ (formal, prin identificarea coeficienţilor) următoarele ecuaţii diferenţiale:

a) $f' = f$, $f(0) = 1$.

b) $f'' = -f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

c) $f'' = -f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

d) $f'' = f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

e) $f'' = f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Vom nota (unicele) soluţii ale ecuaţiilor de mai sus, respectiv, prin e^X, $\sin X$, $\cos X$, $\sinh X$, $\cosh X$.

Exerciţiul 62 a) Să se arate că $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ şi $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

b) Să se deducă formulele cunoscute pentru $\sinh(z \pm w)$ şi $\cosh(z \pm w)$.

Capitolul 5

Bază şi dimensiune

O bază (ordonată) a unui spaţiu vectorial este o familie de vectori cu proprietatea că orice vector se exprimă în mod unic în funcţie de vectorii familiei. O bază determină ,,reper" sau ,,sistem de referinţă" şi defineşte un ,,sistem de coordonate" pentru punctele spaţiului. Dimensiunea spaţiului este numărul de vectori dintr-o bază, adică numărul de coordonate independente (sau parametri independenţi) ce determină un element al spaţiului.

5.1 Combinaţii liniare. Dependenţă şi independenţă liniară

Fie K un corp comutativ.

Definiţia 5.1.1 a) Fie V un K-spaţiu vectorial, $x_1, \dots, x_n \in V$ şi $a_1, \dots, a_n \in K$. Spunem că vectorul $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in V$ este o *combinaţie liniară* a familiei de vectori $x_1, \dots, x_n$. Folosim următoarea notaţie pentru mulţimea acestor combinaţiilor liniare:

$$\langle x_1, \dots, x_n\rangle = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}.$$

b) Familia $x_1, \dots, x_n$ este un *sistem de generatori* al lui V dacă

$$\langle x_1, \dots, x_n\rangle = V.$$

Spunem că V *finit generat* dacă are un familie finită $x_1, \dots, x_n$ de generatori.

c) Familia $x_1, \dots, x_n \in V$ este *liniar independentă* dacă pentru orice $a_1 \dots, a_n \in K$

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

d) În caz contrar spunem că vectorii $x_1, \dots, x_n$ sunt *liniar dependenţi*, adică există scalarii $a_1 \dots, a_n \in R$ nu toţi nuli astfel încât

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

e) Un sistem de generatori liniar independent se numeşte *bază*. (În general, vom privi o bază nu ca o mulţime de vectori, ci ca o familie, deoarece vom vedea că şi ordinea vectorilor din bază joacă un rol important.)

Lema 5.1.2 *Fie* $x_1, \dots, x_n \in V$.

a) $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ *este cel mai mic subspaţiu al lui* V *ce conţine vectorii* $x_1, \dots, x_n$.

b) $\{x_1, \dots, x_n\}$ *este bază a lui* V *dacă şi numai dacă orice* $x \in V$ *se scrie unic ca o combinaţie liniară a vectorilor* $x_1, \dots, x_n$.

Demonstraţie. a) Evident, $0 \in \langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Fie $x, y \in \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, $y = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$, şi fie $a \in R$. Atunci

$$\begin{aligned} x + y &= (a_1 + b_1)x_1 + \cdots + (a_n + b_n)x_n \in \langle x_1, \dots, x_n\rangle, \\ ax &= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in \langle x_1, \dots, x_n\rangle. \end{aligned}$$

În plus, este clar că orice subspaţiu al lui V ce conţine vectorii $x_1, \dots, x_n$ conţine toate combinaţiile liniare ale acestori vectori.

b) ,,$\Rightarrow$" Dacă $x_1, \dots, x_n$ este bază, atunci orice $x \in V$ este combinaţie liniară a lui $x_1, \dots, x_n$. Presupunem că

$$x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a_1'x_1 + \cdots + a_n'x_n.$$

Atunci $(a_1 - a_1')x_1 + \cdots + (a_n - a_n')x_n = 0$, şi deoarece $x_1, \ldots, x_n$ sunt liniar independenţi, rezultă că $a_i = a_i'$, $i = 1, \ldots, n$.

„$\Leftarrow$" Este suficient de arătat că $x_1, \ldots, x_n$ sunt liniar independenţi. Într-adevăr, dacă

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 = 0x_1 + \cdots + 0x_n,$$

atunci $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. ■

Exemple 5.1.3 1) Familia $(1, i)$ este o bază $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial $\mathbb{C}$, iar $(\mathbf{1},\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ este o bază $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial $\mathbb{H}$.

2) Familia $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathcal{V}_2$, iar $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathcal{V}_3$.

3) Familia $(1, X, \ldots, X^n)$ este o bază a K-spaţiului $K_n[X]$ format din polinoamele de grad cel mult n. Pe de altă parte, $K[X]$ este un K-spaţiu vectorial care nu e finit generat.

4) În K^n considerăm următorii vectori:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Atunci familia $e = (e_1, \ldots, e_n)$ este o bază a lui K^n, numită *baza canonică*.

5) Mulţimea vidă $\emptyset$ este liniar independentă şi este bază a spaţiului nul $\{0\}$.

Teorema 5.1.4 *Fie V un K-spaţiu vectorial.*

a) *Sistemul format dintr-un singur vector $x_1 \in V$ este liniar independent $\Leftrightarrow$ $x_1 \neq 0$.*

b) *Vectorii $x_1, \ldots, x_n \in V$ sunt dependenţi dacă şi numai dacă există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât x_i este combinaţie liniară a celorlalţi vectori.*

c) *Dacă V este finit generat, atunci din orice sistem de generatori ai lui V se poate extrage o bază.*

5.2 Teorema lui Steinitz. Dimensiunea unui spaţiu vectorial

Teorema 5.2.1 (Steinitz) *Fie V un K-spaţiu vectorial, $r, n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_r$ un sistem liniar independent şi fie $y_1, \ldots, y_n$ un sistem de generatori. Atunci $r \leq n$, şi dintre vectorii $y_1, \ldots, y_n$ r vectori pot fi înlocuiţi cu vectorii $x_1, \ldots, x_r$ astfel încât*

$$\langle x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_n \rangle = V.$$

Corolar 5.2.2 1) *Din orice familie de generatori ai unui spaţiu vectorial se poate extrage o bază.*

2) *Orice familie liniar independentă de vectori poate fi completată până la o bază.*

3) *Dacă $B, B' \subseteq V$ sunt baze, atunci $|B| = |B'|$.*

(*Aceste afirmaţii sunt valabile şi pentru spaţii care nu sunt finit generate.*)

Definiţia 5.2.3 Numărul elementelor unei baze se numeşte *dimensiunea* K-spaţiului V. *Notaţie*: $\dim_K V = n$.

Exemple 5.2.4 a) K-spaţiul K^n are dimensiunea n.

b) K-spaţiul $K[X]$ este infinit dimensional; o bază a sa este familia de polinoame $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) $\mathbb{R}$-spaţiul de funcţii $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ este infinit dimensional.

Corolar 5.2.5 (Teorema alternativei 1) *Presupunem că $\dim_K V = n$. Dacă $B \subseteq V$ şi $|B| = n$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) B *este bază;* (2) B *este liniar independent;* (3) B *este sistem de generatori.*

Exerciţiul 63 a) Dacă I este o mulţime finită, atunci $\dim_K K^I = |I|$.

b) $\dim_K M_{m,n}(K) = mn$.

Exerciţiul 64 Dacă $\dim_K U = m$ şi $\dim_K V = n$, atunci $\dim_K(U \times V) = m + n$.

5.2.1 Teoreme referitoare la dimensiune

Teorema 5.2.6 *Fie V şi V' K-spaţii vectoriale şi $f : V \to V'$ o funcţie liniară. Atunci*

$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f.$$

Teorema 5.2.7 *Fie un V K-spaţiu vectorial şi $U, W \leq_K V$ două subspaţii. Atunci*

$$\dim_K(U + W) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K(U \cap W).$$

5.3 Matricea unei aplicaţii liniare

Următoarea teoremă spune că pentru a defini o funcţie liniară, este suficient să se dea imaginile elementelor unei baze.

5.3.1 Proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale

Teorema 5.3.1 *Fie* V *şi* V' *două* K*-spaţii vectoriale,* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ *o bază a lui* V *şi* $f : X \to V'$ *un funcţie. Atunci există o unică funcţie liniară* $\bar{f} : V \to V'$ *astfel încât restricţia lui* $\bar{f}$ *la* X *coincide cu* f*. Mai exact, funcţia* $\bar{f}$ *este definită astfel:*

$$\bar{f} : V \to V', \qquad \bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i),$$

pentru orice $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in V$*. Mai mult,*
- $\bar{f}$ *este injectiv* $\Leftrightarrow$ $f(X)$ *este liniar independent.*
- $\bar{f}$ *este surjectiv* $\Leftrightarrow$ $\langle f(X) \rangle = V'$*.*
- $\bar{f}$ *este izomorfism* $\Leftrightarrow$ $f(X)$ *este o bază a lui* V'*.*

Corolar 5.3.2 *Dacă* K*-spaţiul vectorial* V *are o bază* X *cu* n *elemente, atunci* $V \simeq K^n$*.*
(Altfel spus, dacă $\dim_K V = \dim_K V'$*, atunci* $V \simeq V'$*. Afirmaţia este valabilă şi pentru spaţii infinit dimensionale.)*

Demonstraţie. Fie $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza canonică a lui K^n şi fie $f : X \to K^n$, $f(x_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Atunci funcţia $\bar{f}$ definită mai sus este izomorfism. ∎

Corolar 5.3.3 (Teorema alternativei 2) *Presupunem că* $\dim_K V = n$*. Dacă* $f \in \mathrm{End}_K(V)$*, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) f *este izomorfism;* (2) f *este injectiv;* (3) f *este surjectiv.*

Exerciţiul 65 Fie $f : V \to V'$ o funcţie K-liniară şi fie $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$.
a) Dacă X este liniar independent şi f este injectiv, atunci $f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ este liniar independent.
b) Dacă $\langle X \rangle = V$ şi f este surjectiv, atunci $\langle f(X) \rangle = V'$
c) Dacă X este bază şi $f(X)$ este independent, atunci f este injectiv.
d) Dacă X este bază şi $\langle f(X) \rangle = V'$, atunci f este injectiv.
e) f este izomorfism dacă şi numai dacă pentru o bază X, $f(X)$ este de asemenea o bază.

5.3.2 Matricea unei aplicaţii liniare

Ştim că dacă U şi V sunt K-spaţii vectoriale, atunci $\mathrm{Hom}_K(U, V)$ este K-spaţiu şi $\mathrm{End}_K(U)$ este o K-algebră. Vom investiga în detaliu aplicaţiile liniare.

Fie $u = (u_1, \dots, u_n)$ o bază a lui U şi $v = (v_1, \dots, v_m)$ o bază a lui V. (Ţinem cont de ordinea vectorilor din bază, adică considerăm *baze ordonate.*)

Dacă $x \in U$, atunci există scalari unic determinaţi $x_1, \dots, x_n \in R$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$. Spunem că $(x_1, \dots, x_n)$ sunt *coordonatele* vectorului x relativ la baza u, şi fie

$$M_u(x) = [x]_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

az *matricea vectorului* x relativ la baza u.

Exerciţiul 66 Să se arate că:
a) $M_u : U \to M_{n,1}(K)$, $M_u(x) = [x]_u$ este un izomorfism de K-spaţii vectoriale;
b) $M_{n,1}(K) \simeq K^n \simeq M_{1,n}(K)$.

Fie $f : U \to V$ funcţie liniară. Din proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale rezultă că vectorii $f(u_1), \dots, f(u_n) \in V$ determină pe f. Fie

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i, \quad 1 \le j \le n.$$

Scalarii $a_{ij} \in R$ sunt unic determinaţi, şi fie

$$M_{uv}(f) = [f]_{uv} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(K)$$

matricea funcţiei liniare f relativ la perechea de baze (u, v). Observăm că $[f(u_j)]_v$ este chiar coloana j a matricei $[f]_{uv}$.

Dacă $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, folosim următoarele notaţii:

- $c_j^A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ este coloana j a matricei A, $1 \le j \le n$;
- $l_i^A = \begin{pmatrix} a_{i1} \dots a_{1n} \end{pmatrix} \in M_{1,n}(K) \simeq K^n$ este linia i a matricei A, $1 \le i \le n$.

Observăm că dacă $I = I_n := [\delta_{ij}] \in M_n(K)$ este matricea unitate, atunci sistemul de vectori $(e_1 = c_1^I, \dots, e_n = c_n^I)$ este baza canonică a lui $M_{n,1}(K)$.

Teorema 5.3.4 *Fie* U *şi* V *ca mai sus, fie* W *un* K*-spaţiu vectorial şi* $w = (w_1, \dots, w_p)$ *o bază a lui* W*. Mai departe, fie* $f, f' \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ *şi* $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

a) $[f(x)]_v = [f]_{uv}[x]_u$, *pentru orice* $x \in U$.

b) $[f + f']_{uv} = [f]_{uv} + [f']_{uv}$

c) $[af]_{uv} = a[f]_{uv}$, *pentru orice* $a \in K$.

d) $[g \circ f]_{uw} = [g]_{vw} \cdot [f]_{uv}$.

Demonstraţie. a) Fie $y = f(x) = \sum_{i=1}^m y_i v_i$, deci

$$[y]_v = [f(x)]_v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^m y_i v_i = y = f(x) = f(\sum_{j=1}^n x_j u_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(u_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) v_i.$$

Deoarece $\{v_1, \dots, v_m\}$ este bază, rezultă că

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \le i \le m,$$

sau cu matrice,

$$[f(x)]_v = [f]_{uv}[x]_u.$$

b) Calculăm coordonatele lui $(f + f')(u_j)$, pentru $1 \le j \le n$:

$$(f + f')(u_j) = f(u_j) + f'(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i + \sum_{i=1}^m a'_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + a'_{ij}) v_i,$$

deci

$$[f + f']_{uv} = [a_{ij} + a'_{ij}] = [a_{ij}] + [a'_{ij}] = [f]_{uv} + [f']_{uv}.$$

c) Analog, pentru orice $1 \le j \le n$ avem

$$(af)(u_j) = af(u_j) = a(\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i) = \sum_{i=1}^m (a a_{ij}) v_i,$$

deci

$$[af]_{uv} = [a a_{ij}] = a[a_{ij}] = a[f]_{uv}.$$

d) Pentru $1 \le j \le n$, fie

$$(g \circ f)(u_j) = \sum_{k=1}^p c_{kj} w_k,$$

adică

$$[g\circ f]_{u,w}=[c_{kj}]_{\substack{1\le k\le p\\ 1\le j\le n}}\in M_{p,n}(K).$$

Repetând calculele de mai sus, avem

$$(g\circ f)(u_j)=g(f(u_j))=g(\sum_{i=1}^m a_{ij}v_i)=\sum_{i=1}^m a_{ij}g(v_i)=\sum_{i=1}^m a_{ij}\sum_{k=1}^p b_{ki}w_k=\sum_{k=1}^p(\sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ij})w_k.$$

Deoarece $\{w_1,\dots,w_p\}$ W este bază, rezultă că

$$c_{kj}=\sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ij},\quad 1\le k\le p,\ 1\le j\le n,$$

sau cu matrice,

$$[g\circ f]_{uw}=[c_{kj}]=[\sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ij}]=[g]_{vw}\cdot[f]_{uv}.\qquad\blacksquare$$

Corolar 5.3.5 *Funcţia*
a) $M_{u,v}:\mathrm{Hom}(U,V)\to M_{m,n}(K)$ *este izomorfism de* K*-spaţii vectoriale.*
b) $M_{v,v}:\mathrm{End}_R(V)\to M_n(K)$ *este izomorfism de* K*-algebre.*

Demonstraţie. Din proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale rezultă că $M_{u,v}$ este bine definită şi bijectivă, iar din teorema anerioară rezultă că este şi morfism. $\blacksquare$

Exerciţiul 67 Dacă $\dim_K U=m$ şi $\dim_K V=n$, atunci $\dim_K \mathrm{Hom}_K(U,V)=mn$.

Exerciţiul 68 (Rotaţia în plan) Fie $R(t):\mathcal{V}_2\to\mathcal{V}_2$ rotaţia de unghi t în jurul originii.
a) Să se argumenteze geometric că $R(t)$ este o transformare iniară.
b) Să se determine matricea lui $R(t)$ relativ la baza canonică $e=(\vec{i},\vec{j})$ a lui $\mathcal{V}_2$.

Exerciţiul 69 Fie $t\in\mathbb{R}$, $f_t,g_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f_t(x)=(x_1\cos t-x_2\sin t,x_1\sin t+x_2\cos t)$, $g_t(x)=(x_2\cos t+x_2\sin t,x_1\sin t-x_2\cos t)$.
a) Să se arate că f_t şi g_t sunt transformări liniare, adică $f_t,\ g_t\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.
b) Să se determine $[f_t]_{e,e}$ şi $[g_t]_{e,e}$, unde $e=(e_1,e_2)$ este baza canonică.
c) Să se determine matricele aplicaţiilor $f_t\circ f_{t'}$, $g_t\circ g_{t'}$, $f_t\circ g_{t'}$, $g_t\circ f_{t'}$.

Exerciţiul 70 Notăm $V=\mathbb{R}_n[X]:=\{f\in\mathbb{R}[X]\mid\deg(f)\le n\}$ $\mathbb{R}$-spaţiul polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali. Fie $a\in\mathbb{R}$, $f\in\mathbb{R}_n[X]$ şi fie $B=(1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$.
a) Să se arate că B este o bază lui V.
b) Să se determine coordonatele lui f relativ la baza B (se obţine *formula lui Taylor*).
c) Fie $D:V\to V$, $D(f)=f'$ operatorul de derivare. Să se determine matricea lui D relativ la baza canonică $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ a lui $V=\mathbb{R}_n[X]$.

5.4 Schimbarea bazei

Fie U un K-spaţiu vectorial, şi fie $u=(u_1,\dots,u_n)$ o bază a lui U. Dacă $u'=(u'_1,\dots,u'_n)$ un sistem de vectori, cu $u'_j\in U$, atunci există scalarii $t_{ij}\in K$ unic determinaţi astfel încât

$$u'_j=\sum_{i=1}^n t_{ij}u_i,\quad 1\le j\le n,$$

adică

$$[u'_j]_u=\begin{pmatrix}t_{1j}\\ \vdots\\ t_{nj}\end{pmatrix}=c_j^T,$$

unde

$$T=T_u^{u'}=[t_{ij}]_{1\le i,j\le n}\in M_n(K).$$

Spunem că $T=T_u^{u'}$ este *matricea de trecere (tranziţie) de la baza* u *la sistemul* u'.

Teorema 5.4.1 a) $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ *este bază* $\Leftrightarrow T = T_u^{u'}$ *este matrice inversabilă.* (Informal, spunem că u este baza ,,veche", iar u' este baza ,,nouă".)

b) *Dacă* u' *bază, atunci pentru orice* $x \in U$

$$\boxed{[x]_{u'} = (T_u^{u'})^{-1}[x]_u}.$$

c) *Fie* V *un spaţiu vectorial, fie* $v = (v_1, \ldots, v_m)$ *şi* $v' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ *două baze, şi fie*

$$S = T_v^{v'} = [s_{ij}]_{1\le i,j\le m} \in M_m(K)$$

matricea de trecere, unde

$$v'_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} v_i, \quad 1 \le j \le m.$$

Dacă $f : U \to V$ *este o funcţie liniară, atunci spunem că matricele* $[f]_{u,v}$ *şi* $[f]_{u',v'}$ *sunt* **echivalente**, *mai exact:*

$$\boxed{[f]_{u',v'} = S^{-1}[f]_{u,v}T}.$$

Demonstraţie. a) Din proprietatea de universalitate a spaţiilor vectoriale rezultă că există o unică aplicaţie liniară $h : U \to V$ astfel încât $h(u_j) = u'_j$, $1 \le j \le n$; observăm că $[h]_{u,u} = T$. Din Exerciţiul 65 şi din Corolarul 5.3.5 rezultă că $u' = (h(u_1), \ldots, h(u_n))$ este bază $\Leftrightarrow$ h este izomorfism $\Leftrightarrow$ $T = [h]_{u,u} \in M_n(K)$ este matrice inversabilă.

b) Fie $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i = \sum_{j=1}^n x'_j u'_j \in U$. Atunci

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j u'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n t_{ij} u_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n t_{ij} x'_j) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i.$$

Deoarece $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ este bază, rezultă că

$$x_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x'_j, \quad 1 \le i \le n,$$

adică

$$[x]_u = T[x]_{u'}.$$

c) Calculând în două moduri matricea $[f(x)]_v$, obţinem

$$[f(x)]_v = [f]_{u,v}[x]_u = [f]_{u,v}T[x]_{u'},$$

şi

$$[f(x)]_v = S[f(x)]_{v'} = S[f]_{u',v'}[x]_{u'}.$$

Înlocuind pe rând $[x]_{u'}$ cu matricele $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$, rezultă că $[f]_{u,v}T = S[f]_{u',v'}$, deci

$$[f]_{u',v'} = S^{-1}[f]_{u,v}T. \qquad \blacksquare$$

Exerciţiul 71 Fie $(\vec{i}', \vec{j}')$ baza planului $\mathcal{V}_2$ obţinută prin rotirea cu unghiul t a bazei canonice $e = (\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\mathcal{V}_2$. Să se determine matricea de trecere $T_e^{e'}$ de la e la e'.

5.4.1 Lema substituţiei (schimbare elementară de bază)

Fie V un K-spaţiu vectorial şi fie $e = (e_1, \ldots, e_n)$ o bază.

Lema 5.4.2 *Fie* $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in V$ *şi considerăm familia de vectori* $e' = (e_1, \ldots, \underset{i}{v}, \ldots, e_n)$.

a) e' *este bază a lui* V *dacă şi numai dacă* $a_i \neq 0$.

b) *Presupunem că* $a_i \neq 0$, *şi fie*

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ie_i + \cdots + x_ne_n = x'_1e_1 + \cdots + x'_iv + \cdots + x'_ne_n \in V.$$

Atunci

$$x'_i = \frac{x_i}{a_i}, \quad x'_j = \frac{x_ja_i - x_ia_j}{a_i}, \ j \neq i.$$

Demonstraţie. a) Din teorema alternativei, e' este bază dacă şi numai dacă bază e' este liniar independent. Dacă $b_1, \ldots, b_n \in K$, atunci

$$\begin{aligned} b_1e_1 + \cdots + b_iv + \cdots + b_ne_n = 0 &\Longleftrightarrow b_1e_1 + \cdots + b_i\sum_{j=1}^{n} a_je_j + \cdots + b_ne_n = 0 \\ &\Longleftrightarrow (b_1 + b_ia_1)e_1 + \cdots + b_ia_iv + \cdots + (b_n + b_ia_n)e_n = 0 \\ &\Longleftrightarrow b_ia_i = 0, \quad b_j + b_ia_j = 0, \ j \neq i. \end{aligned}$$

Dacă $a_i \neq 0$, atunci $b_i = 0$; rezultă că $b_1 = \cdots = b_n = 0$, deci e' este bază.

Dacă $a_i = 0$, atunci fie $b_i = 1$, şi $b_j = -a_j$, $j \neq i$; rezultă că e' nu e independent.

b) Dacă $a_i \neq 0$, atunci

$$\begin{aligned} x &= x_1e_1 + \cdots + x_ie_i + \cdots + x_je_j + \cdots + x_ne_n = \\ &= x'_1e_1 + \cdots + x'_iv + \cdots + x'_je_j + \cdots + x'_ne_n = \\ &= (x'_1 + x'_ia_1)e_1 + \cdots + x'_ia_ie_i + \cdots + (x'_j + x'_ia_j)e_j + \cdots + (x'_n + x'_ia_n)e_n. \end{aligned}$$

Deoarece e este bază, rezultă că $x_i = x'_ia_i$ şi $x_j = x'_j + x'_ia_j$ dacă $j \neq i$, deci

$$x'_i = \frac{x_i}{a_i}, \quad x'_j = x_j - \frac{x_i}{a_i}a_j, \ j \neq i. \qquad \blacksquare$$

Elementul $a_i \neq 0$ se numeşte *pivot*. Calculele de mai sus se sistematizează în următorul tabel:

$$\begin{array}{c|cc} & v & x \\ \hline e_1 & a_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_i & \boxed{a_i} & x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_j & a_j & x_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & a_n & x_n \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cc} & v & x \\ \hline e_1 & 0 & x'_1 = \frac{x_1a_i - x_ia_1}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v & 1 & x'_i = \frac{x_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_j & 0 & x'_j = \frac{x_ja_i - x_ia_j}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & 0 & x'_n = \frac{x_na_i - x_ia_n}{a_i} \\ \hline \end{array}$$

Operaţia de bază este uşor de reţinut: linia pivotului se împarte cu pivotul, iar celelalte elemente se calculează cu *regula dreptunghiului*.

5.4.2 Calculul coordonatelor unui vector într-o nouă bază

Fie $v = (v_1, \ldots, v_n)$ o familie de vectori, unde

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

şi fie $T_e^v = [a_{ij}] \in M_n(K)$ matricea de trecere. Ştim că v este bază dacă şi numai dacă T este inversabil; dacă

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x'_1v_1 + \cdots + x'_nv_n,$$

atunci $[x]_v = T^{-1}[x]_e$. Aplicând de n ori lema substituţiei, determinăm matricea $[x]_v$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & v_1 & \dots & v_n & x \\ \hline e_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} & x_n \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{n \text{ paşi}} \quad \begin{array}{c|ccc|c} & v_1 & \dots & v_n & x \\ \hline v_1 & 1 & \dots & 0 & x'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_n & 0 & \dots & 1 & x'_n \\ \hline \end{array}$$

Dacă T nu e inversabil, atunci vectorii $e_1, \dots, e_n$ nu pot fi înlocuiţi cu vectorii $v_1, \dots, v_n$.

De exemplu, fie $V = \mathbb{R}^3$, $e = (e_1, e_2, e_3)$ baza canonică, şi fie $v_1 = (1, 4, 2)$, $v_2 = (1, 3, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1)$ şi $x = (1, -2, -2)$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & x \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ e_2 & 4 & 3 & 2 & -2 \\ e_3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_2 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -6 \\ e_3 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ v_2 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ e_3 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Din ultimul tabel rezultă că v este bază şi $x = -3v_1 + 2v_2 + 2v_3$.

Exerciţiul 72 Să se arate că $v = (v_1, \dots, v_n)$ este o bază a lui V şi să se determine coordonatele lui x relativ la baza v, unde:
a) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (2, 1, 3, -2)$, $v_2 = (-1, 1, -2, 1)$, $v_3 = (4, 5, 3, -1)$, $v_4 = (1, 5, -3, 1)$, $x = (1, 1, 1, 1)$.
b) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 3)$, $v_3 = (3, 7, 1)$, $x = (1, 1, 1)$.

Capitolul 6

Determinanţi şi sisteme de ecuaţii liniare

Teoria sistemelor de ecuaţii este o parte fundamentală a algebrei liniare, având aplicaţii în foarte multe ramuri ale matematicii. Din punct de vedere geometric, fiecare ecuaţie liniară cu n necunoscute determină un hiperplan în spaţiul n-dimensional, iar soluţia sistemului este intersecţia acestor hiperplane. Metodele computaţionale (algoritmice) de găsire a soluţiilor se bazează în general pe lema substituţiei (metoda eliminării sau reducerii Gauss-Jordan) şi joacă un rol important în fizică, inginerie, chimie, informatică şi economie.

6.1 Definiţia şi proprietăţile determinantului

Determinantul este o valoare asociată unei matrice pătratice, care dă informaţii semnificative despre matricea coeficienţilor unui sistem de ecuaţii liniare, sau despre matricea ce corespunde unei transformări liniare.

6.1.1 Determinanţi de ordin 2 şi 3

Fie K un corp comutativ, şi considerăm următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$ *matricea sistemului* şi $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in M_{21}(K)$ a *matricea coloană a termenilor liberi.*

Aplicând metoda reducerii, obţinem că sistemul este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{22} - a_{21}b_1. \end{cases}$$

Definim *determinantul* matricei A astfel:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in R$$

Observăm că dacă $A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$, atunci

$$x_1 \det A = \det A_1, \quad x_2 \det A = \det A_2.$$

Considerăm acum următorul sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

şi fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$

şi $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \in M_3(K)$. Analog primim următorul sistem echivalent cu cel dat:

$$x_1 \det A = \det A_1, \quad x_2 \det A = \det A_2. \quad x_3 \det A = \det A_3,$$

unde prin definiţie,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Exerciţiul 73 Să se calculeze a următorii determinanţi:

$$a) \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

6.1.2 Determinantul de ordin n

Continuarea calculelor de mai sus ar fi complicată, dar sugerează următoarea generalizare:

Definiţia 6.1.1 Funcţia

$$\det : M_n(K) \to K, \quad A \mapsto \det(A)$$

se numeşte *determinant de ordin* n, unde dacă $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, atunci

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Suma are $n!$ termeni, şi fiecare produs conţine exact un element al fiecărei linii şi al fiecărei coloane a matricei A.

Definiţia 6.1.2 Fie $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, $x_j = c_j^A$ şi fie A_{ij} matricea de tip $(n-1) \times (n-1)$ obţinută din A eliminând linia i şi coloana j.

Elementul $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \in K$ se numeşte *complementul algebric* al lui a_{ij}.

Notăm cu $A^t = [a^t_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ *transpusa* matricei A, unde $a^t_{ji} = a_{ij}$.

Teorema 6.1.3 (Proprietăţile determinanţilor)
a) *Determinantul lui* A *depinde liniar de fiecare coloană a lui* A.
b) *Dacă* A *are două coloane egale, atunci* $\det(A) = 0$.
c) *Dacă permutăm două coloane ale lui* A*, atunci determinantul matricei obţinute este* $(-1)\det(A)$.
d) *Determinantul nu de modifică dacă la o coloană adunăm o altă coloană înmulţită cu un scalar.*
e) *Avem* $\det(A) = \det(A^t)$*; în particular afirmaţiile de mai sus sunt adevărate şi pentru linii.*
f) *Dezvoltarea lui* $\det(A)$ *după linia* i*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij} \quad 1 \le i \le n.$$

g) *Dezvoltarea lui* $\det(A)$ *după coloana* j*:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}, \quad 1 \le j \le n.$$

h) *Dacă* $A, B \in M_n(K)$*, atunci*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Exerciţiul 74 Să se calculeze următorii determinanţi:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Exerciţiul 75 a) Să se calculeze determinantul matricei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, dacă $a_{ij} = 0,\ i > j$.
b) Să se calculeze determinantul matricei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, dacă $a_{ij} = 0,\ i + j \leq n$.

Exerciţiul 76 Să se calculeze următorii determinanţi:

a) $A_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ x & a & x & \dots & x \\ x & x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a \end{vmatrix}$

b) $V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ (determinantul lui Vandermonde);

c) $S_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$, unde n este impar (determinantul antisimetric).

Exerciţiul 77 (Determinantul ciclic) Să se arate că:

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\epsilon_0)\dots f(\epsilon_{n-1}),$$

unde $f = a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1} \in \mathbb{C}[X]$, şi $\epsilon_i \in \mathbb{C},\ i = 0, \dots, n-1$ sunt rădăcinile de ordin n ale unităţii.

6.2 Matrice inversabile

Definiţia 6.2.1 Fie $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Matricea $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in M_n(K)$, unde

$$\tilde{a}_{ij} = \Gamma_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ji},$$

se numeşte *adjuncta matricei* A.

Teorema 6.2.2 *Dacă* $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, *atunci*

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A) \cdot I_n.$$

Teorema 6.2.3 (Caracterizarea matricelor inversabile) *Dacă* $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) A *este matrice inversabilă.*
(ii) $\det(A) \in K^*$.
(iii) $(c_1^A, \dots, c_n^A)$ *este o bază lui* $M_{n,1}(K)$.
(iv) $(s_1^A, \dots, s_n^A)$ *este o bază a lui* $M_{1,n}(K)$.

Să reţinem că dacă $\det(A) \in K^*$, atunci

$$A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A} \quad \text{şi} \quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

6.2.1 Grupuri de matrice

Mulţimea matricelor inversabile se notează cu $GL_n(K)$. Deoarece $GL_n(K)$ este mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(M_n(K), +, \cdot)$, rezultă că $(GL_n(K), \cdot)$ este un grup. Acest grup se numeşte **grupul general liniar** de grad n peste corpul K. Din Teorema 6.1.3.h) rezultă că funcţia

$$\det : (GL_n(K), \cdot) \to (K^*, \cdot), \qquad A \mapsto \det(A)$$

este morfism de grupuri.

Exerciţiul 78 (Grupul special liniar) Notăm $\mathrm{SL}_n(K) := \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det A = 1\}$. Să se arate că $\mathrm{SL}_n(K)$ este un subgrup al lui $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$.

Grupul $\mathrm{SL}_n(K)$ se numeşte **grupul special liniar** de grad n peste K.

Exerciţiul 79 (Transpusa unei matrice) Fie $\phi : M_{m,n}(K) \to M_{n,m}(K)$, $\phi(A) = A^t$, unde $a^t_{ji} = a_{ij}$. Să se arate că:
a) ϕ este o funcţie K-liniară;
b) $(AB)^t = B^t A^t$;
c) Dacă $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, atunci $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
c) Funcţia $f : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $f(A) = (A^{-1})^t$ este un automorfism de grupuri.

Exerciţiul 80 (Grupul Möbius) Notam cu $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ planul complex extins. Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ considerăm funcţia

$$f_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad f_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

unde $f(-d/c) = \infty$, $f(\infty) = a/c$, iar dacă $c = 0$, definim $f(\infty) = \infty$. Notăm cu G mulţimea acestor funcţii, numite *transformări Möbius*.
a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup, iar funcţia $\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to G$, $\phi(A) = f_A$ este morfism de grupuri.
b) Să se determine $\operatorname{Ker} \phi$.

6.2.2 Calculul inversei şi determinantului unei matrice

Matricea $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $(c^A_1, \dots, c^A_n)$ este bază a spaţiului K^n. Vom aplica lema substituţiei (metoda eliminării Gauss–Jordan). Fie $I = I_n$ matricea unitate de ordin n şi considerăm următoarele tabele:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & c^A_1 & \dots & c^A_n & c^I_1 & \dots & c^I_n \\ \hline
e_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \\ \hline
\end{array}
\xrightarrow{n \text{ paşi}}
\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & v_1 & \dots & v_n & c^I_1 & \dots & c^I_n \\ \hline
c^A_1 & 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c^A_n & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \\ \hline
\end{array}$$

Fie $B = [b_{ij}]$. Din ultimul tabel rezultă că pentru orice $1 \le j \le n$ avem $c^I_j = \sum_{k=1}^n c^A_k b_{kj}$, adică

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

deci $I_n = AB$ şi $B = A^{-1}$.

Fie $a^{(k)}_{i_k j_k}$ pivotul din pasul k. Din proprietăţile determinanţilor rezultă că

$$\det A = \prod_{k=1}^n (-1)^{i_k + j_k} a^{(k)}_{i_k j_k}.$$

Exerciţiul 81 Fie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, $[f]_{e,e} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, şi fie $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$, unde $e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Să se determine matricea lui f relativ la perechea de baze (e', e').

Exerciţiul 82 Fie $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ şi $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, unde $u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 1, 1)$, $u_4 = (-1, -1, 0, 1)$, $v_1 = (2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, 2)$, $v_3 = (-2, 1, 1, 2)$, şi $v_4 = (1, 3, 1, 2)$ sunt vectori din $\mathbb{R}^4$. Să se arate că u şi v sunt baze şi să se determine matricea de trecere T^v_u.

6.3 Rangul unei matrice

Definiţia 6.3.1 Fie U şi V două K-spaţii vectoriale, $f : U \to V$ o funcţie liniară, şi $u_1, \dots, u_m \in U$ vectori.
a) *Rangul sistemului de vectori* este dimensiunea subspaţiu generat de aceştia:

$$\operatorname{rang}(u_1, \dots, u_m) = \dim_K \langle u_1, \dots, u_m \rangle.$$

b) *Rangul funcţiei liniare* f este dimensiunea imaginii sale:

$$\operatorname{rang} f = \dim_K \operatorname{Im} f.$$

Observaţii 6.3.2 a) Din Teorema 5.2.6 rezultă că $\operatorname{rang} f = \dim_K U - \dim_K \operatorname{Ker} f$.

b) Presupunem că $(e_1, \dots, e_n)$ este o bază a lui U, deci $U = \{x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid x_i \in K\}$. Atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}\\ &= \{\sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \mid x_i \in K\}\\ &= \langle f(e_1), \dots, f(e_n)\rangle \leq_K V,\end{aligned}$$

deci, $\operatorname{rang} f = \operatorname{rang}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Definiţia 6.3.3 Fie $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(K)$ o matrice de tip $m \times n$ şi fie $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Spunem că **rangul matricei** A este egal cu r (notaţie: $\operatorname{rang} A = r$), dacă dacă A are un minor nenul de ordin r, şi orice minor de ordin mai mare ca r este egal cu 0.

Teorema 6.3.4 (Kronecker) *Fie* $A \in M_{m,n}(K)$ *o matrice. Avem*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(c_1^A, \dots, c_n^A) = \operatorname{rang}(s_1^A, \dots, s_m^A).$$

Observaţii 6.3.5 Pentru a arăta că $\operatorname{rang} A = r$, este suficient să arătăm că A are un minor nenul de ordin r, şi orice minor de ordin $r + 1$ ce îl *completează* pe acesta este nul.

Exemple 6.3.6 Considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 0 & 4\end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

Dacă $B_1 = [1]$, atunci $\det B_1 \neq 0$, şi dacă $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, atunci $\det B_2 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A \geq 2$. Există doi minori ce completează pe B; deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că $\operatorname{rang} A = 2$.

Exerciţiul 83 Să se determine rangul matricei $A = (x_i y_j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_n(K)$.

Exerciţiul 84 Să se arate că $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

6.3.1 Calculul rangului unei matrice

Dacă $A \in M_{m,n}(K)$, atunci $\operatorname{rang} A = \dim_K \langle c_1^A, \dots c_n^A\rangle$, deci putem aplica lema substituţiei. Altfel spus, prin **transformări elementare**, reducem matricea dată la o **matrice eşalon** (metoda eliminării Gauss-Jordan).

De exemplu, fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A
e_1	$\boxed{1}$	-2	1	3
e_2	1	-2	-1	1
e_3	2	-4	0	4
c_1^A	1	-2	1	3
e_2	0	0	$\boxed{-2}$	-2
e_3	0	0	-2	-2
c_1^A	1	-2	0	2
c_3^A	0	0	1	1
e_3	0	0	0	0

Din ultimul tabel rezultă că $c_2^A = -2c_1^A$, $c_4^A = 2c_1^A + c_3^A$, şi c_1^A, c_3^A sunt liniar independente, deci $\operatorname{rang} A = 2$.

Observaţii 6.3.7 Orice matrice $A \in M_{m,n}(K)$ de rang r este echivalentă cu matricea $B \in M_{m,n}(K)$ u elementele $b_{ii} = 1$ pentru $i = 1, \dots, r$ şi $b_{i,j} = 0$ în rest.

Exerciţiul 85 Să se determine rangul următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exerciţiul 86 Să se determine câte o bază a subspaţiului $U \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$, unde:

a) $U = \langle (1, 0, 4), (2, 1, 0), (1, 1, -4) \rangle$,

b) $U = \langle (-3, -2, 4), (5, 2, 4), (-2, 0, -8) \rangle$.

c) $U = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

6.4 Sisteme de ecuaţii liniare

Fie K un comutativ corp, $m, n \in \mathbb{N}^*$, şi presupunem că sunt date elementele $a_{ij} \in K$, $b_i \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Numim *sistem de ecuaţii liniare* următoarea problemă: să se determine elementele $x_1, \dots, x_n \in K$ astfel încât

$$(S): \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Introducem următoarele matrice:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(K), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K).$$

Definiţia 6.4.1 a) Elementele a_{ij} se numesc *coeficienţi*, elementele b_i sunt *termenii liberi*, iar elementele x_j se numesc *necunoscute*.

b) Spunem că A este *matricea sistemului de ecuaţii*, iar

$$\bar{A} = [A \,\vdots\, b] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(K)$$

este *matricea extinsă sistemului.*

c) Dacă $b = 0$, atunci spunem că (S) este un *sistem de ecuaţii omogene.*

d) (S) este *compatibil* dacă există $x \in M_{n,1}(K) \simeq K^n$ astfel încât $Ax = b$; în caz contrar, (S) este *incompatibil.*

6.4.1 Compatibilitatea unui sistem de ecuaţii. Teoremele lui Kronecker–Capelli şi Rouché

Identificăm spaţiile vectoriale $M_{n,1}(K)$ şi K^n, precum şi spaţiile vectoriale $M_{m,1}(K)$ şi K^m et, şi notăm cu e baza canonică. Fie $f : K^n \to K^m$ funcţia liniară unic determinată astfel încât $[f]_{e,e} = A$. Cu aceste identificări rezultă că $f(x) = Ax$ pentru orice $x \in K^n$. Atunci se observă uşor că (S) este echivalent cu următoarele ecuaţii matriceale:

$$(S) \iff f(x) = b \iff Ax = b \iff \sum_{j=1}^{n} x_j c_j^A = b.$$

Teorema 6.4.2 a) *Dacă* x^0 *este o soluţie particulară a sistemului* (S)*, atunci mulţimea soluţiilor lui* (S) *este*

$$f^{-1}(b) := \{x \in K^n \mid f(x) = b\} = x^0 + \operatorname{Ker} f := \{x^0 + y \mid y \in \operatorname{Ker} f\}.$$

(Altfel spus, pentru a găsi toate soluţiile sistemului (S), este suficient să găsim o soluţie particulară x^0 şi apoi să rezolvăm sistemul omogen (S_0) asociat lui (S).)

b) $\dim_K \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rang} A$.

Teorema 6.4.3 (Kronecker–Capelli) *Sistemul* (S) *este compatibil dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}.$$

Corolar 6.4.4 (Rouché) *Presupunem că* $\operatorname{rang} A = r$ *şi fie*

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

determinantul principal al sistemului (S). Minorii de ordin $(r+1)$ ai matricei extinse $\bar{A}$ ce completează pe B şi conţin termeni liberi se numesc *minori caracteristici. Atunci avem:*
a) *Numărul minorilor caracteristici este* $m-r$.
b) (S) *este compatibil* $\Longleftrightarrow$ *toţi minorii caracteristici sunt nuli.*

6.4.2 Rezolvarea sistemului de ecuaţii prin reducerea la un sistem Cramer

Folosim în continuare notaţiile paragrafului precedent.

Teorema 6.4.5 a) *Presupunem că* (S) *compatibil,* $\operatorname{rang} A = r$, $\det B := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, *şi fie*

$$(S'): \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \end{cases}$$

sistemul redus de ecuaţii. Atunci pentru orice $x \in K^n$, x *este soluţie a lui* $(S) \Longleftrightarrow x$ *este soluţie a lui* (S').

Ultimele $m-r$ ecuaţii se numesc *ecuaţii secundare.* Aşadar, ecuaţiile secundare se omit, iar *necunoscutele secundare* $x_{r+1}, \dots, x_n$ sunt parametri independenţi sau liberi (pot lua orice valori) şi se trec în membrul drept. Obţinem astfel un sistem Cramer cu r ecuaţii şi r necunoscute.

b) **(Regula lui Cramer)** *Presupunem că* $m = n$. *Sistemul* (S) *are soluţie unică dacă şi numai dacă* $\det A \neq 0$, *adică* $r = m = n$. *În acest caz, pentru* $j = 1, \dots, n$ *avem*

$$x_j = (\det A)^{-1} \cdot \det(c_1^A, \dots, \underset{j}{b}, \dots, c_n^A).$$

Corolar 6.4.6 *Fie* (S_0) *un sistem de ecuaţii omogene. Atunci:*
a) (S_0) *este compatibil.*
b) *Dacă* $m = n$, *atunci* (S_0) *are soluţii netriviale (nenule)* $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Exerciţiul 87 Să se discute şi să se rezolve următorul sistem de ecuaţii, folosind teoremele lui Rouché şi Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 &= \gamma \end{cases}$$

6.4.3 Rezolvarea ecuaţiei matriceale prin metoda eliminării Gauss-Jordan

Următoarea metodă tratează pe (S) ca ecuaţie matriceală.

Dacă (S) compatibil, atunci din Teorema 6.4.5.a) rezultă că putem presupune că $\operatorname{rang} A = m \leq n$, şi fie $\det B \neq 0$ *determinantul principal* al lui (S), unde

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in M_m(K).$$

Scriem pe A sub forma $A = [B \vdots S]$, unde

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n-m}(K),$$

şi fie $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_S \end{pmatrix}$, unde $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ este matricea *necunoscutelor principale*, şi $x_S = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ este matricea *necunoscutelor secundare*. Atunci (S) poate fi scris sub următoarele forme echivalente:

$$(S): \qquad Bx_B + Sx_S = b.$$

Considerăm întâi ecuaţia matriceală *omogenă* $Bx_B + Sx_S = 0$ asociată lui (S). Soluţia acesteia este

$$x_B = -B^{-1}Sx_S, \qquad x_S \in K^{n-m}.$$

Fie $x_S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_S^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, x_S^{(n-m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ baza canonică a lui K^{n-m}, $x_B^{(j)} = -B^{-1}Sx_S^{(j)}$, unde $1 \le j \le n-m$, şi fie

$$x^{(j)} = \begin{pmatrix} x_B^{(j)} \\ x_S^{(j)} \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f, \quad 1 \le j \le n-m.$$

Deoarece $\dim_K \operatorname{Ker} f = n-m$, rezultă că familia de vectori $x^{(1)}, \dots, x^{(n-m)}$ este o bază a lui $\operatorname{Ker} f$, deci

$$\operatorname{Ker} f = \langle x^{(1)}, \dots, x^{(n-m)} \rangle.$$

Mai departe, o soluţie particulară x^0 se obţine astfel: fie $x_S^0 = 0 \in K^{n-m}$, şi fie $x_B^0 := B^{-1}b - B^{-1}Sx_S^0 = B^{-1}b \in K^m$, deci

$$x^0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$$

este o soluţie a lui (S).

Am obţinut astfel mulţimea soluţiilor lui (S):

$$\begin{aligned} f^{-1}(b) &= x^0 + \operatorname{Ker} f = x^0 + \langle x^{(1)}, \dots, x^{(n-m)} \rangle = \\ &= \{x^0 + \lambda_1 x^{(1)} + \dots + \lambda_{n-m} x^{(n-m)} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in K\}. \end{aligned}$$

Spunem că $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in K$ sunt *parametri liberi.*

Observaţii 6.4.7 În practică, dacă m şi n sunt numere mari, atunci formulele şi metodele de rezolvare a sistemelor de ecuaţii bazate pe cacule de determinanţi şi inverse de matrice nu sunt eficiente. În continuare vom prezenta o metodă care conduce la calcule mult mai rapide. Folosind lema substituţiei, vom reduce matricea sistemului la o *matrice eşalon.* Aceasta este **metoda eliminării complete Gauss-Jordan**.

Considerăm sistemul $Ax = b \iff Bx_B + Sx_S = b$, unde folosim notaţiile anterioare. Dacă $B \in M_m(K)$ este inversabil, atunci obţinem soluţiile sistemului în m paşi. Calculele vor arăta şi dacă sistemul este incompatibil, deoarece în acest caz $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \bar{A}$. De asemenea, nu e nevoie să ştim dinainte care sunt matricele B şi S. Acestea vor fi determinate prin alegerea elementelor pivot.

	$c_1^A \ \dots \ c_m^A$	$c_{m+1}^A \ \dots \ c_n^A$	b
e_1			
$\vdots$	B	S	b
e_m			

$\downarrow$ m paşi

	$c_1^A \ \dots \ c_m^A$	$c_{m+1}^A \ \dots \ c_n^A$	b
c_1^A			
$\vdots$	I_m	$B^{-1}S$	$B^{-1}b$
c_m^A			

Exemple 6.4.8 Considerăm sistemul

$$(S): \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = 3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 & = 2 \end{cases}.$$

Cu notaţiile de mai sus, avem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Obţinem următoarele tabele:

	c_1^A	c_2^A	c_3^A	c_4^A	c_5^A	b
e_1	$\boxed{1}$	2	1	3	3	3
e_2	-1	-1	-1	-2	-2	-2
e_3	1	3	2	5	4	2
c_1^A	1	2	1	3	3	3
e_2	0	$\boxed{1}$	0	1	1	1
e_3	0	1	1	2	1	-1
c_1^A	1	0	1	1	1	1
c_2^A	0	1	0	1	1	1
e_3	0	0	$\boxed{1}$	1	0	-2
c_1^A	1	0	0	0	1	3
c_2^A	0	1	0	1	1	1
c_3^A	0	0	1	1	0	-2

Alegerile de mai sis ale elementelor pivot determină matricele B şi S astfel:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Din ultimul tabel rezultă că

$$-B^{-1}S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

deci mulţimea soluţiilor sistemului (S) este

$$\{x^0 + \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K\},$$

unde

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 88 Să se rezolve, prin ambele metode studiate, următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 & = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = 3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 6x_4 & = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 & = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 & = 6 \end{cases}$

Capitolul 7

Valori proprii şi vectori proprii

Un vector propriu al unui operator liniar este un vector care, în urma transformării, rămâne paralel cu el însuşi. Pe lângă relevanţa matematică, studiul valorilor şi vectorilor proprii are aplicaţii importante în mecanica cuantică, statistică (analiza componentelor principale), epidemiologie, analiza vibraţiilor, procesarea imaginilor, teoria spectrală a grafurilor (utilizată de exemplu în algoritmul PageRank pe care se bazează căutările Google), mecanica solidelor, fizica moleculară etc.

7.1 Polinom caracteristic

Fie V un K-spaţiu vectorial, $e = (e_1, \dots, e_n)$ o bază a lui V, fie $f \in \mathrm{End}_K(V)$ un endomorfism (operator liniar), şi fie

$$A = [f]_{e,e} \in M_n(K),$$

matricea lui f relativ la perechea de baze (e, e).

Definiţia 7.1.1 a) Spunem că $\lambda \in K$ este o *valoare proprie* a operatorului f, dacă există un vector $x \in V$, $x \neq 0$ astfel încât $f(x) = \lambda x$.

b) În acest caz spunem că x este un *vector propriu* al lui f asociat valorii proprii λ.

c) Polinomul $P_A(X) = \det(A - XI_n) \in K[X]$ se numeşte *polinomul caracteristic* al matricei A.

Observaţii 7.1.2 a) Observăm că

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n (X^n - \mathrm{Tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A), \end{aligned}$$

unde $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ se numeşte *urma* matricei A.

De exemplu, dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $P_A(X) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$.

b) Polinomul $P_A(X)$ nu depinde de baza e, sau altfel spus, două matrice **similare** din $M_n(K)$ au acelaşi polinom caracteristic; de aceea putem vorbi de *polinomul caracteristic al operatorului* f, adică, prin definiţie, fie

$$P_f(X) = P_{[f]_{e,e}}(X).$$

Într-adevăr, fie $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ o altă bază, $T = T_e^{e'}$ matricea de trecere, şi fie $A' = [f]_{e',e'} = T^{-1}AT$. Atunci

$$\begin{aligned} P_{A'}(X) &= \det(A' - XI_n) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}XI_nT) = \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - XI_n) \det(T) = \det(A - XI_n) = P_A(X). \end{aligned}$$

Teorema 7.1.3 *Scalarul* $\lambda \in K$ *este o valoare proprie a lui* f *dacă şi numai dacă* $P_f(\lambda) = 0$.

Demonstraţie. Identificând ca de obicei spaţiile vectoriale V şi K^n, vedem că pentru orice $x \in V$,

$$f(x) = \lambda x \iff A[x]_e = \lambda [x]_e \iff (A - \lambda I_n)[x]_e = 0.$$

Sistemul omogen de ecuaţii liniare obţinut are soluţii nenule dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$, adică dacă λ este o rădăcină lui $P_A(X)$. ∎

Definiţia 7.1.4 a) Mulţimea valorilor proprii ale endomorfism f se numeşte *spectrul* lui f.

b) Dacă λ este o rădăcină de multiplicitate r a lui $P_f(X)$, atunci r se numeşte *multiplicitatea algebrică* a lui λ. Notaţie: $m_{\rm alg}(\lambda) = r$.

c) Subspaţiul $V(\lambda) := \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$ se numeşte *subspaţiul propriu* asociat lui λ.

d) Dimensiunea subspaţiului propriu $V(\lambda)$ se numeşte *multiplicitatea geometrică* a lui λ. Notaţie: $m_{\rm geom}(\lambda)$.

Exerciţiul 89 Să se determine valorile proprii şi baze pentru subspaţiile proprii ale următoarele matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Exerciţiul 90 (Urma unei matrice) Considerăm funcţia $\mathrm{Tr} : M_n(K) \to K,\ \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Să se arate că:

a) Tr este o funcţie K-liniară.

b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exerciţiul 91 Să se arate că pentru orice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ avem $P_{AB}(X) = P_{BA}(X)$.

7.1.1 Teorema Cayley–Hamilton

Dacă $p = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$, atunci există endomorfismul

$$p(f) = a_m f^n + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 1_V \in \mathrm{End}_K(V)$$

şi matricea

$$p(A) = a_m A^n + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \in M_n(K).$$

Teorema 7.1.5 (Cayley–Hamilton) *Orice endomorfism f (respectiv orice matrice A) este rădăcină a polinomului său caracteristic, adică $P_f(f) = 0$ şi $P_A(A) = 0$.*

Exerciţiul 92 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, deci $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ şi $\det(A) = ad - bc$.

a) Să se verifice direct că $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.

b) Să se arate că $A^n = a_n A + b_n I_2$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$, unde şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ verifică relaţiile de recurenţă $a_{n+2} - \mathrm{Tr}(A)a_{n+1} + \det(A)a_n = 0$ şi $b_{n+2} - \mathrm{Tr}(A)b_{n+1} + \det(A)b_n = 0$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

c) Să se rezolve ecuaţiile $A^2 = A$, $A^2 = 0_2$, $A^3 = 0_2$ şi $A^2 = I_2$.

7.2 Operatori triangularizabili

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n, $e = (e_1, \dots, e_n)$ o bază, şi $f \in \mathrm{End}_K(V)$ un operator având matricea $A = [f]_{e,e}$. Ştim că relativ la o altă bază v, matricea lui f este $T^{-1}AT$, unde $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ este matricea de trecere de la e la v. Ne punem problema de a găsi în mulţimea $\{T^{-1}AT \mid T \in \mathrm{GL}_n(K)\}$ matricea având ,,forma cea mai simplă”.

Definiţia 7.2.1 a) Matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ este *triunghiulară (superior)* dacă $a_{ij} = 0$ pentru orice $i > j$.

b) Spunem că operatorul f este *triangularizabil* dacă există o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ astfel încât matricea $[f]_{v,v} \in M_n(K)$ este triunghiulară.

c) Spunem că matricea A este *triangularizabilă* dacă există o matrice inversabilă $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ astfel încât matricea $T^{-1}AT \in M_n(K)$ este triunghiulară.

Teorema 7.2.2 (caracterizarea operatorilor triangularizabili) *Operatorul $f \in \mathrm{End}_K(V)$ este triangularizabil dacă şi numai dacă polinomul său caracteristic P_f are n rădăcini în K.*

Exerciţiul 93 (matrice triunghiulare) Fie

$$T_n(K) = \{A = (a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ dacă } i > j\}$$

mulţimea matricelor triunghiulare superior. Să se arate că:

a) $T_n(K)$ este o subalgebră a lui $M_n(K)$.

b) Funcţia $f : T_n(F) \to R^n, \quad f((a_{ij})) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ este un morfism surjectiv de K-algebre.

c) Dacă $A \in \mathrm{Ker}\, f$ (adică elementele de pe diagonala principală a lui A sunt nule), atunci $A^n = 0$.

Exercițiul 94 Fie $A \in M_n(K)$ şi presupunem că $P_A(0) \neq 0$. Să se arate că A inversabilă şi

$$P_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n X^n}{P_A(0)} P_A(\frac{1}{X}).$$

Să se determine valorile proprii ale matricei A^{-1}.

Exercițiul 95 Presupunem că valorile proprii ale matricei $A \in M_n(K)$ sunt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, şi fie $p \in K[X]$ un polinom. Să se arate că:

a) Valorile proprii ale matricei $p(A)$ sunt $p(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$; mai mult, dacă $x \in K^n$ este un vector propriu al lui A asociat lui λ_i, atunci x este vector propriu al lui $p(A)$ asociat lui $p(\lambda_i)$.

b) $\det(p(A)) = \prod_{i=1}^n p(\lambda_i)$.

7.3 Operatori diagonalizabili

Lema 7.3.1 *Fie* $f \in \text{End}_K(V)$ *un operator.*

a) *Dacă* $\lambda_0 \in K$ *valoare proprie a lui* f*, atunci* $1 \leq m_{\text{geom}}(\lambda_0) \leq m_{\text{alg}}(\lambda_0)$.

b) *Presupunem că* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ $(m \leq n)$ *sunt valori proprii distincte, şi fie* v_i *un vector propriu asociat lui* λ_i*,* $1 \leq i \leq m$*. Atunci vectorii* $v_1, \dots, v_m$ *sunt liniar independenţi.*

Definiția 7.3.2 a) Matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ este *diagonală* dacă $a_{ij} = 0$ pentru orice $i \neq j$.

Notaţie: $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

b) Spunem că operatorul f este *diagonalizabil* dacă există o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ astfel încât matricea $[f]_{v,v} \in M_n(K)$ este diagonală.

c) Spunem că matricea A este *diagonalizabilă* dacă există o matrice inversabilă $T \in GL_n(K)$ astfel încât matricea $T^{-1}AT \in M_n(K)$ este diagonală.

Teorema 7.3.3 (caracterizarea operatorilor diagonalizabili) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Operatorul* $f \in \text{End}_K(V)$ *este diagonalizabil.*
(ii) *Există o bază a lui* V *formată din vectori proprii ai lui* f.
(iii) f *satisface următoarele două condiţii:*
- *Polinomul său caracteristic* P_f *are* n *rădăcini în* K.
- *Dacă* λ *este o valoare proprie a lui* f*, atunci* $m_{\text{geom}}(\lambda) = m_{\text{alg}}(\lambda)$.

Observaţii 7.3.4 Presupunem că ipotezele (1), (2) de mai sus au loc. Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ rădăcinile distincte ale lui P_f, şi fie

$$P_f(X) = (\lambda_1 - X)^{r_1}(\lambda_2 - X)^{r_2} \dots (\lambda_m - X)^{r_m},$$

unde $1 \leq r_i \leq n$, $r_i = m_{\text{alg}}(\lambda_i)$, şi $\sum_{i=1}^m r_i = n$. Deoarece $m_{\text{geom}}(\lambda_i) = m_{\text{alg}}(\lambda_i) = r_i$, rezultă că $V(\lambda_i)$ are o bază $(v_{i1}, \dots, v_{ir_i})$, unde $1 \leq i \leq m$. Atunci

$$v := (v_{11}, \dots, v_{1r_1}, v_{21}, \dots, v_{2r_2}, \dots, v_{m1}, \dots, v_{mr_m})$$

este o bază a lui V formată din vectori proprii ai lui f, iar matricea $[f]_{v,v}$ este diagonală. Să notăm că forma diagonală a matricei lui f este unică, abstracţie făcând de ordinea elementelor de pe diagonala principală, care sunt chiar valorile proprii ai lui f.

Exemple 7.3.5 Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $[f]_{e,e} = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, unde e este baza canonică. Atunci $P_A(X) = (2 - X)(3 - X)^2$, deci rădăcinile lui P_A sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, unde $m_{\text{alg}}(\lambda_1) = 1$ şi $m_{\text{alg}}(\lambda_2) = 2$.

$$\text{Pentru } \lambda_1 = 2 \text{ avem } \begin{cases} 2x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

deci $m_{\text{geom}}(\lambda_1) = 1 = m_{\text{alg}}(\lambda_1)$.

$$\text{Pentru } \lambda_2 = 3 \text{ avem } \quad -x_1 - 2x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 &= -2\alpha \\ x_2 &= \beta \\ x_3 &= \alpha \end{cases}$$

Atunci

$$V(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

deci $m_{\text{geom}}(\lambda_2) = 2 = m_{\text{alg}}(\lambda_2)$.

Rezultă că operatorul f este diagonalizabil. Fie $v = ((1,0,0),\ (-2,0,1),\ (0,1,0))$. Atunci

$$T := T_e^v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [f]_{v,v} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 96 Sunt diagonalizabile următoarele matrice (peste $\mathbb{C}$)? Dacă da, atunci să se determine baza nouă formată din vectori proprii şi matricea de trecere de la baza canonică la baza nouă.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exerciţiul 97 Să se arate că matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este diagonalizabilă peste $\mathbb{C}$, dar nu şi peste $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 98 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că:

a) Dacă $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det A > 0$, atunci matricea A este diagonalizabilă.

b) Dacă $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det A = 0$, atunci matricea A este diagonalizabilă $\iff$ A este diagonală.

c) Dacă $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det A < 0$, atunci A nu este diagonalizabilă. În acest caz, există $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

d) Să se studieze diagonalizabilitatea matricei $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, unde $t \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 99 Să se demonstreze Lema 7.3.1.

Exerciţiul 100 Să se arate că următoarele familii de vectori sunt liniar independente în $\mathbb{R}$-spaţiul de funcţii $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

a) $\sin \lambda_1 t, \ldots, \sin \lambda_n t$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ sunt numere distincte.

b) $1, \sin t, \ldots, \sin nt, \cos t, \ldots, \cos nt$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Capitolul 8

Spaţii cu produs scalar

Din punct de vedere abstract, formele pătratice sunt polinoame omogene de grad 2 în n variabile. În geometrie, metrica unui spaţiu (adică expresia distanţei dintre două puncte) este definită cu ajutorul unei forme pătratice, iar pentru exprimarea unghiului a doi vectori se folosesc forme biliniare.

În acest capitol fie $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$. Fie V un K-spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n$ şi fie $e = (e_1, \dots, e_n)$ o bază a lui V.

8.1 Forme biliniare şi pătratice

Definiţia 8.1.1 a) Funcţia $B : V \times V \to K$ se numeşte **formă biliniară** dacă pentru orice $a, b \in K$ şi pentru orice $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ avem

$$B(ax_1 + bx_2, y) = aB(x_1, y) + bB(x_2, y),$$

$$B(x, ay_1 + by_2) = aB(x, y_1) + bB(x, y_2).$$

b) Dacă $a_{ij} := B(e_i, e_j)$, $1 \le i, j \le n$, şi $A := [a_{ij}]_{1\le i,j\le n} \in M_n(K)$, atunci spunem că A este matricea lui B relativ la baza e. Notaţie: $A = [B]_e$.

c) *Rangul* formei B este: $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}[B]_e$. Spunem că B este *formă degenerată*, dacă $\operatorname{rang} B < n$ (adică $\det[B]_e = 0$), şi B este *formă nedegenerată* dacă $\operatorname{rang} B = n$.

d) Forma biliniară B este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in V$

$$B(x, y) = B(y, x).$$

e) Matricea $A \in M_n(K)$ este *simetrică* dacă $A^t = A$, adică $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice $i, j = 1, \dots, n$.

Definiţia 8.1.2 O funcţie $d : V \to K$ se numeşte **formă pătratică** dacă satisface următoarele condiţii:

(1) $Q(ax) = a^2 Q(x)$ pentru orice $a \in K$ şi $x \in V$;

(2) Funcţia $B : V \times V \to K$, $B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ este o formă biliniară simetrică.

Observaţii 8.1.3 Dacă $B : V \times V \to K$ o formă biliniară simetrică, atunci funcţia

$$Q : V \to K, \quad Q(x) = B(x, x)$$

este *forma pătratică asociată lui* B. În acest caz avem $Q(x + y) - Q(x) - Q(y) = 2B(x, y)$.

Exerciţiul 101 Fie $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ mulţimea *matricelor simetrice*, şi $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$ mulţimea *matricelor antisimetrice.* Să se arate că:

a) $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \le_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{R})$.

b) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$; $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$;

c) Pentru orice $A \in M_n(\mathbb{R})$ există matricele unic determinate $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ şi $C \in \mathcal{A}_n(R)$ astfel încât $A = B + C$.

d) Dacă $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, atunci $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow AB = BA$.

e) Pentru orice $B \in M_n(\mathbb{R})$, matricea BB^t este simetrică.

Lema 8.1.4 *Fie* $B : V \times V \to K$ *o formă biliniară.*

a) *Pentru orice* $x, y \in V$ *avem*

$$B(x, y) = [x]_e^t [B]_e [y]_e.$$

b) *Forma* B *este simetrică dacă şi numai dacă matricea* $A = [B]_e$ *este simetrică.*

c) *Fie* $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ *o nouă bază, şi fie* $T = T_e^{e'}$ *matricea de trecere de la* e *la* e'*. Atunci spunem că matricele* $[B]_e$ *şi* $[B]_{e'}$ *sunt* **congruente**, *mai exact, avem:*

$$[B]_{e'} = T^t [B]_e T$$

Demonstraţie. a) Dacă $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ şi $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, atunci

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = [x]_e^t A [y]_e. \end{aligned}$$

b) Dacă B simetrică, atunci $a_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = a_{ji}$, pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$, deci $A = A^t$. Invers, dacă $A = A^t$, atunci pentru orice $x, y \in V$ avem

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_j a_{ji} x_i = B(y,x).$$

c) Dacă $x, y \in V$, atunci $[x]_e = T[x]_{e'}$ şi avem

$$B(x,y) = [x]_e^t [B]_e [y]_e = [x]_{e'}^t [B]_{e'} [y]_{e'} = [x]_{e'}^t T^t [B]_e T [y]_{e'}$$

Înlocuind matricele coloană $[x]_{e'}$ şi $[y]_{e'}$ cu matricele $e_1, \dots, e_n$, obţinem $T^t [B]_e T = [B]_{e'}$. ∎

Observaţii 8.1.5 a) Deoarece $T = T_e^{e'}$ este o matrice inversabilă, rezultă că $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}[B]_e$ nu depinde de baza e.

b) Dacă B este simetrică şi $[B]_e = A$, atunci

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

8.2 Forme hermitiene

În cazul în care $K = \mathbb{C}$ este corpul numerelor complexe, este natural şi util să considerăm automorfismul $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, unde $\overline{x + yi} = x - yi$ este *conjugatul* numărului complex $z = x + yi$. Formele hermitiene au fost introduse de matematicianul francez Charles Hermite (1822–1901).

Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci matricea $A^h := \bar{A}^t$ (adică $a_{ij}^h = \bar{a}_{ji}$) este *adjuncta (transpusa hermitiană)* a matricei A. (Se mai notează şi $A^\dagger$.)

Definiţia 8.2.1 a) Funcţia $B : V \times V \to \mathbb{C}$ se numeşte **formă sesquiliniară** dacă pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ şi pentru orice $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ avem

$$B(ax_1 + bx_2, y) = \bar{a} B(x_1, y) + \bar{b} B(x_2, y),$$

$$B(x, ay_1 + by_2) = a B(x, y_1) + b B(x, y_2).$$

b) Dacă $a_{ij} = B(e_i, e_j)$, $1 \le i, j \le n$, şi $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$, atunci spunem că A este matricea lui B relativ la baza e. Notaţie: $A = [B]_e$.

c) Rangul lui B este $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}[B]_e$; spunem că B este *degenerat*, dacă $\operatorname{rang} B < n$ (adică $\det[B]_e = 0$), şi B este *nedegenerat* dacă $\operatorname{rang} B = n$.

d) B este **formă hermitiană**, dacă în plus, pentru orice $x, y \in V$ avem

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}.$$

e) Dacă $B : V \times V \to \mathbb{C}$ este o formă hermitiană, atunci *forma pătratică* asociată lui B este

$$Q : V \to \mathbb{C}, \quad Q(x) = B(x,x).$$

f) Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ este *hermitiană (autoadjunctă)* dacă $A^h = A$, adică $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ pentru orice $i, j = 1, \dots, n$.

Exercițiul 102 Să se determine mulțimea $\mathcal{H}_2$ a matricelor hermitiene de tip 2×2.

Exercițiul 103 (Transpusa hermitiană a unei matrice) Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, fie $A^h = \bar{A}^t$. Să se arate că:
a) $(A+B)^h = A^h + B^h$; $(\alpha A)^h) = \bar{\alpha}A^h$.
b) $(AB)^h = B^h A^h$; $(A^{-1})^h = (A^h)^{-1}$.
c) Dacă $A = BB^h$ atunci A este matrice hermitiană.

Lema 8.2.2 *Fie* $B : V \times V \to \mathbb{C}$ *o formă sesquiliniară și fie* $Q : V \to \mathbb{C}$, $\quad Q(x) = B(x,x)$.
a) *Pentru orice* $x, y \in V$ *avem*

$$B(x,y) = [x]_e^h [B]_e [y]_e.$$

b) *Forma* B *este hermitiană dacă și numai dacă* $A = [B]_e$ *este matrice hermitiană.*
c) *Fie* $e' = (e_1', \ldots, e_n')$ *o nouă bază, și fie* $T = T_e^{e'}$ *matricea de trecere de la* e *la* e'. *Atunci*

$$[B]_{e'} = T^h [B]_e T.$$

d) *Dacă* B *este formă hermitiană, atunci* $Q(x) \in \mathbb{R}$ *pentru orice* $x, y \in V$.

Demonstrație. a) Dacă $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ și $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, atunci avem

$$B(x,y) = B(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i a_{ij} y_j = [x]_e^h A [y]_e.$$

b) Dacă B este hermitiană, atunci $a_{ij} = B(e_i, e_j) = \overline{B(e_j, e_i)} = \overline{a_{ji}}$, pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, deci $A = A^h$. Invers, dacă $A = A^h$, atunci pentru orice $x, y \in V$ avem

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_j \bar{a}_{ji} \bar{x}_i = \overline{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \bar{y}_j a_{ji} x_i} = \overline{B(y,x)}.$$

c) Dacă $x, y \in V$, atunci $[x]_e = T[x]_{e'}$, $[x]_e^h = [x]_{e'}^h T^h$ și

$$B(x,y) = [x]_e^h [B]_e [y]_e = [x]_{e'}^h [B]_{e'} [y]_{e'} = [x]_{e'}^h T^h [B]_e T [y]_{e'}$$

Înlocuind matricele coloană $[x]_{e'}$ și $[y]_{e'}$ cu matricele vectorilor $e_1, \ldots, e_n$ ale bazei canonice, obținem $T^h[B]_e T = [B]_{e'}$.
d) $\overline{Q(x)} = \overline{B(x,x)} = \overline{\overline{B(x,x)}} = B(x,x) = Q(x)$, deci $Q(x) \in \mathbb{R}$. ∎

Observații 8.2.3 a) Deoarece $T = T_e^{e'}$ este o matrice inversabilă, $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}[B]_e$ nu depinde de baza e.
b) Dacă B este hermitiană și $[B]_e = A$, atunci

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

8.3 Reducerea formelor pătratice la forma canonică

Fie $B : V \times V \to \mathbb{C}$ o formă hermitiană, $A := [B]_e$, și fie $Q(x) := B(x,x) \in \mathbb{R}$. Menționăm că rezultatele ce urmează în acest capitol rămân valabile dacă înlocuim $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}$ și ,,formă hermitiană" cu ,,formă biliniară simetrică". Acest lucru se vede imediat ținând cont de faptul că un număr real este un număr complex ce coincide cu conjugatul său.

Definiția 8.3.1 Spunem că B (sau Q) are *formă canonică* relativ la baza e, dacă matricea $[B]_e$ este diagonală. În acest caz, avem $[B]_e = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, unde $a_{ii} \in \mathbb{R}$, și

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \bar{x}_i y_i, \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2.$$

Teorema 8.3.2 (Gauss–Lagrange) *Există o bază* $e' = (e_1', \ldots, e_n')$ *astfel încât* $[B]_{e'} = \operatorname{diag}(a_{11}', \ldots, a_{nn}')$ *și* $Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}' |x_i'|^2$ *are formă canonică, unde* $[x]_{e'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

Avem mai multe metode de reducere la forma canonică. Una dintre acestea va fi prezentată la sfârşitul acestui capitol.

Definiţia 8.3.3 Spunem că:
- Q este formă pătratică *pozitiv definită*, dacă $Q(x) > 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{0\}$;
- Q este formă pătratică *pozitiv semidefinită*, dacă $Q(x) \geq 0$ pentru orice $x \in V$;
- Q este formă pătratică *negativ definită*, dacă $Q(x) < 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{0\}$;
- Q este formă pătratică *negativ semidefinită*, dacă $Q(x) \leq 0$ pentru orice $x \in V$;
- Q este formă pătratică *indefinită* dacă există $x, y \in V$ astfel încât $Q(x) > 0$ şi $Q(y) < 0$.

Observaţii 8.3.4 Dacă rang $B = r$, atunci orice formă canonică a lui $Q(x)$ are exact r coeficienţi nenuli:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} a'_{ii} x'^2_i, \quad a'_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se observă uşor că:
- Q este pozitiv definită $\Leftrightarrow r = n, \quad a'_{11}, \dots, a_{rr} > 0$.
- Q este pozitiv semidefinită $\Leftrightarrow a'_{11}, \dots, a_{rr} \geq 0$.
- Q este negativ definită $\Leftrightarrow r = n, \quad a'_{11}, \dots, a_{rr} < 0$.
- Q este negativ semidefinită $\Leftrightarrow a'_{11}, \dots, a_{rr} \leq 0$.
- Q este indefinită dacă există i şi j astfel încât $a_{ii} > 0$ şi $a_{jj} < 0$.

8.3.1 Legea lui Sylvester de inerţie a formelor pătratice

Forma canonică a unei forme pătratice nu este unică, dar teorema de mai jos a lui Sylvester spune că numărul coeficienţilor pozitivi şi a celor negativi rămâne constant.

Teorema 8.3.5 (Sylvester) *Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică de rang r. Presupunem că relativ la baza $e = (e_1, \dots, e_n)$ avem*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} |x_i|^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} a_{jj} |x_j|^2,$$

unde $a_{ii}, a_{jj} > 0$, $p + q = r$, iar relativ la baza $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ avem

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p'} a'_{ii} |x'_i|^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} a'_{jj} |x'_j|^2,$$

unde $a'_{ii}, a'_{jj} > 0$, $p' + q' = r$. Atunci $p = p'$ şi $q = q'$.

Definiţia 8.3.6 Perechea (p, q) se numeşte *signatura* formei patratice $Q(x)$.

Observaţii 8.3.7 Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică de rang r şi signatură (p, q) corespunzătoare formei hermitiene $B : V \times V \to K$. Din Teorema Gauss–Lagrange 8.3.2 rezultă uşor că există o matrice $T \in GL_n(K)$ astfel încât

$$T^h [B]_e T = \mathrm{diag}[1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0],$$

unde 1 apare de p ori, -1 de q ori şi 0 de $(n - r)$ ori. Cu alte cuvinte, abstracţie făcând de o echivalenţă (adică de o congruenţă de matrice), există o unică formă biliniară de signatură (p, q) pe V, şi anume

$$B(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_{p+q} y_{p+q}.$$

8.4 Spaţii Hilbert finit dimensionale

Conceptul de spaţiu Hilbert generalizează noţiunea de spaţiu Euclidian. Se extind astfel metodele algebrei vectorial şi ale analizei matematice de la 2 sau 3 dimensiuni la spaţii cu orice număr finit sau infinit de dimensiuni. Pe scurt, un spaţiu Hilbert este un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar, ceea ce permite măsurarea lungimilor şi unghiurilor. Mai mult, spaţiile Hilbert sunt spaţii topologice complete în sensul lui Cauchy.

În cele ce urmează, fie $B : V \times V \to K$ o formă hermitiană (dacă $K = \mathbb{R}$, atunci B este o formă biliniară simetrică).

Definiţia 8.4.1 a) Spunem că perechea (V, B) este un **spaţiu Hilbert** dacă B este formă hermitiană nedegenerată şi pozitiv definită.

b) $\langle x|y\rangle := B(x, y)$ este **produsul scalar** al vectorilor $x, y \in V$.

c) $\|x\| = \sqrt{Q(x)} := \sqrt{\langle x|y\rangle}$ este *norma* vectorului x.

d) Vectorii $x, y \in V$ sunt **ortogonali** (notaţie: $x \perp y$), dacă $\langle x|y\rangle = 0$.

e) Unghiul $\widehat{x, y} \in [0, \pi]$ dintre vectorii $x, y \in V$ este determinat de

$$\cos(\widehat{x, y}) := \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Observaţii 8.4.2 a) Din definiţie rezultă că $\|x\| \geq 0$ şi mai mult, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. În plus, avem $\|ax\| = |a|\|x\|$, $\forall a \in K$.

b) În general în literatură, un spaţiu înzestrat cu un produs scalar ca mai sus este numit *spaţiu prehilbertian*, iar un spaţiu Hilbert este un spaţiu prehilbertian *complet* (adică în care orice şir Cauchy este convergent relativ la norma definită mai sus). Totuşi, definiţia noastră nu vine în contradicţie cu aceasta, deoarece un spaţiu prehilbertian finit dimensional este complet, deci este spaţiu Hilbert. Orice spaţiu Hilbert este, în particular, un spaţiu vectorial normat, mai exact, un spaţiu Banach.

Exemple 8.4.3 a) Dacă $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ şi $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, atunci

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

este **produsul scalar standard** al vectorilor x, y. În particular $\mathcal{V}_2$ şi $\mathcal{V}_3$ sunt spaţii Hilbert.

b) Dacă $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^n$ şi $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, atunci

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

este **produsul scalar standard** al vectorilor x, y.

Observăm că în ambele cazuri, $[B]_e = I_n$, unde $e = (e_1, \dots, e_n)$ este baza canonică a lui V.

Teorema 8.4.4 *Fie* $(V, \langle -|-\rangle)$ *un spaţiu Hilbert. Pentru orice* $x, y \in V$ *avem:*

1) $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ **(inegalitatea Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz).**

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(inegalitatea lui Minkowski)**.

Exerciţiul 104 Fie $(V, \langle -|-\rangle)$ un spaţiu Hilbert şi fie $x, y \in V$.

a) În inegalitatea Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz are loc egalitatea $|\langle x|y\rangle| = \|x\| \, \|y\| \Leftrightarrow x, y$ sunt liniar dependenţi.

b) (Teorema lui Pitagora) Dacă $x \perp y$, atunci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Dacă $K = \mathbb{R}$, atunci şi reciproca este adevărată.

c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identitatea paralelogramului).

d) Dacă $K = \mathbb{R}$ şi $\|x\| = \|y\|$, atunci $(x + y) \perp (x - y)$ (adică diagonalele rombului sunt perpendiculare).

e) (Teorema cosinusului) Dacă $K = \mathbb{R}$, atunci

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle.$$

Dacă $K = \mathbb{C}$, atunci

$$\|x + y\|^2 - i\|ix + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - i(\|x\|^2 + \|y\|^2) + 2\langle x|y\rangle.$$

8.4.1 Baze ortonormate

Fie $(V, \langle -|-\rangle)$ un spaţiu Hilbert.

Definiţia 8.4.5 a) Familia $(v_1, \dots, v_r)$ de vectori nenuli din V se numeşte *ortogonală*, dacă $\langle v_i|v_j\rangle = 0$ pentru orice $i \neq j$.

b) Familia $(v_1, \dots, v_r)$ se numeşte *ortonormată*, dacă este ortogonală şi în plus, $\|v_i\| = 1$ pentru orice $i \in \{1, \dots, r\}$ (adică $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$).

Exerciţiul 105 Dacă $(v_1, \dots, v_r)$ este o familie ortogonală, atunci ea este liniar independentă.

Exerciţiul 106 Dacă e este o bază ortonormată şi $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, atunci:
a) $x_i = \langle e_i | x \rangle$, $\bar{x}_i = \langle x | e_i \rangle$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.
b) $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ (*identitatea lui Parseval*).
c) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \in \mathbb{R}$.

Teorema 8.4.6 (ortogonalizare Gram–Schmidt) *Dacă* $(V, \langle - | - \rangle)$ *un spaţiu Hilbert, atunci* V *are o bază ortonormată* $e = (e_1, \dots, e_n)$.
Demonstraţie. Fie $v = (v_1, \dots, v_n)$ o bază a lui V. Prin inducţie, construim o bază ortogonală $u = (u_1, \dots, u_n)$, având proprietatea că pentru orice $r = 1, \dots, n$, subspaţiul generat de $u_1, \dots, u_r$ este egal cu subspaţiul generat de $v_1, \dots, v_r$.

Fie $u_1 := v_1$ şi $u_2 := a_{12} u_1 + v_2$ astfel încât $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$. Din egalitatea

$$0 = \langle u_1 | u_2 \rangle = a_{12} \langle u_1 | u_1 \rangle + \langle u_1 | v_2 \rangle,$$

rezultă că $a_{12} = -\frac{\langle u_1 | v_2 \rangle}{\|u_1\|^2}$.

Deoarece $(u_1, v_2, \dots, v_n)$ este o bază, din lema substituţiei rezultă că $(u_1, u_2, v_3, \dots, v_n)$ este de asemenea o bază. Să observăm că $\langle \{u_1, u_2\} \rangle = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$.

Presupunem că am construit familia ortogonală $(u_1, \dots, u_{j-1})$ astfel încât

$$\langle u_1, \dots u_{j-1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

şi $(u_1, \dots, u_{j-1}, v_j, \dots, v_n)$ este o bază. Determinăm vectorul

$$u_j = a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + \dots + a_{j-1\ j} u_{j-1} + v_j$$

astfel încât $\langle u_i | u_j \rangle = 0$, $1 \le i \le j-1$. Din ipoteză rezultă că

$$\boxed{a_{ij} = -\frac{\langle u_i | v_j \rangle}{\|u_i\|^2}, \qquad 1 \le i \le j-1}.$$

Din definiţia lui u_j rezultă că $\langle u_1, \dots, u_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, iar din lema substituţiei rezultă că şi familia de vectori $(u_1, \dots, u_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$ este bază.

În sfârşit, fie $e_i := \frac{1}{\|u_i\|} u_i$, $1 \le i \le n$. ■

Exerciţiul 107 Să se ortogonalizeze următoarele familii de vectori:
a) $(1, -1, 2)$, $(2, 0, -3)$, $(6, -3, 0)$;
b) $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$;
c) $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$;
d) $(2, 1, 3, -1)$, $(7, 4, 3, -3)$, $(1, 1, -6, 0)$; $(5, 7, 7, 8)$.

Exerciţiul 108 (Determinantul lui Gram) Fie $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ o familie de vectori, fie $a_{ij} := \langle v_i | v_j \rangle$, $1 \le i, j \le n$, şi fie

$$G(v_1, \dots, v_n) := \det(a_{ij}).$$

Să se arate că $(v_1, \dots, v_n)$ este liniar independent dacă şi numai dacă dacă $G(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

8.4.2 Complementul ortogonal al unui subspaţiu

Definiţia 8.4.7 Fie V un spaţiu Hilbert. Dacă $X \subseteq V$ este o submulţime, atunci

$$X^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in X\ x \perp y\}$$

se numeşte *complementul ortogonal* al lui X.

Exerciţiul 109 Să se arate că:
a) $X^\perp$ este un subspaţiu al lui V.
b) $X^{\perp\perp} \supseteq X$.
c) $\langle X \rangle^\perp = X^\perp$.

Teorema 8.4.8 *Fie* V *un spaţiu Hilbert şi fie* $U \le_K V$ *un subspaţiu. Atunci:*
a) $U + U^\perp = V$ *şi* $U \cap U^\perp = \{0\}$.
b) $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K U^\perp$.
c) $U^{\perp\perp} = V$.

Demonstraţie. Dacă $U = \{0\}$, atunci $V^\perp = V$ şi $U^{\perp\perp} = \{0\}$, deci putem presupune că $U \neq \{0\}$. Fie $(e_1, \dots, e_m)$ o bază ortonormată a lui U, pe care o completăm la o bază ortonormată $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ a lui V.

a) Evident, $U^\perp \geq \langle e_{m+1}, \dots, e_n\rangle$, deci $U + U^\perp = \langle U \cup U^\perp\rangle = V$. Dacă $x \in U \cap U^\perp$, atunci $\langle x|x\rangle = 0$, deci $x = 0$.

b) Rezultă din a) şi din teoremele referitoare la dimensiune.

c) Deoarece $U \perp U^\perp$, avem că $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Dar din a) şi b) rezultă că $\dim_K U = \dim_K U^{\perp\perp}$, deci $U = U^{\perp\perp}$. ■

Exerciţiul 110 Să se determine o bază ortonormată în subspaţiul $U^\perp$, dacă U este subspaţiul generat de următoarea familie de vectori:

a) $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$; b) $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$;
c) $(1, 1, 0),\ (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$; d) $(1, -2, 2),\ (-3, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$;
e) $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$; f) $(-1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 111 Fie V un spaţiu Hilbert şi fie $U, W \leq_K V$ două subspaţii. Să se arate că

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \qquad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp.$$

8.5 Adjuncta unui operator

Fie $(V, \langle -|-\rangle)$ un spaţiu Hilbert, fie $e = (e_1, \dots, e_n)$ o bază ortonormată şi fie $f : V \to V$ un operator liniar.

Teorema 8.5.1 *Există un operator unic determinat* $f^* \in \mathrm{End}_K(V)$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in V$ *avem*

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle.$$

Dacă $K = \mathbb{C}$ *atunci* $[f^*]_{e,e} = [f]^h_{e,e}$, *iar dacă* $K = \mathbb{R}$, *atunci* $[f^*]_{e,e} = [f]^t_{e,e}$.

Definiţia 8.5.2 Operatorul f^* se numeşte *adjuncta* lui f.

Exerciţiul 112 Fie $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ si fie $a \in K$. Să se arate că:
$(f + g)^* = f^* + g^*$, $(af)^* = \bar{a}f^*$, $f^{**} = f$ şi $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

8.5.1 Operatori autoadjuncţi

Definiţia 8.5.3 Spunem că f este *autoadjunct (sau hermitian)* (respectiv *simetric* în cazul $K = \mathbb{R}$) dacă $f^* = f$ (adică dacă matricea $[f]_{e,e}$ este hermitiană, respectiv simetrică).

Exerciţiul 113 Fie $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ si fie $a \in K$. Să se arate că dacă f, g sunt autoadjuncte, atunci:
a) $f + g$ şi af sunt autoadjuncte;
b) $f \circ g$ este autoadjunct dacă şi numai dacă $f \circ g = g \circ f$.

Teorema 8.5.4 *Fie* $\lambda \in K$ *o valoare proprie a operatorului autoadjunct* f. *Atunci* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $x \in V$, $x \neq 0$. Atunci avem

$$\bar{\lambda}\langle x|x\rangle = \langle \lambda x|x\rangle = \langle f(x)|x\rangle = \langle x|f^*(x)\rangle = \langle x|f(x)\rangle = \langle x|\lambda x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle.$$

Deoarece $\langle x|x\rangle \neq 0$, rezultă că $\lambda = \bar{\lambda}$, deci $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

8.5.2 Operatori ortogonali şi unitari

În această secţiune examinăm operatorii liniari care pastrează produsul scalar. Introducem întâi câteva notaţii:

- $\mathrm{O}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$ – mulţimea matricelor *ortogonale* de grad n.
- $\mathrm{U}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^h = I_n\}$ – mulţimea matricelor *unitare* de grad n.
- $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$ – mulţimea matricelor *ortogonale speciale* de grad n.
- $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}$ – mulţimea matricelor *unitare speciale* de grad n.

Exerciţiul 114 Fie $A \in M_n(K)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(1) A este o matrice unitară (respectiv ortogonală).
(2) $A^hA = I_n$ (respectiv $A^tA = I_n$).
(3) $A^{-1} = A^h$ (respectiv $A^{-1} = A^t$).
(4) $(c^A_1, \dots, c^A_n)$ este o bază ortonormată în K^n.
(5) $(l^A_1, \dots, l^A_n)$ este o bază ortonormată în K^n.

Teorema 8.5.5 (caracterizarea operatorilor unitari) *Fie* $f : V \to V$ *un operator liniar. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle$, *pentru orice* $x, y \in V$ *.*
(ii) $\|f(x)\| = \|x\|$ *pentru orice* $x \in V$ *.*
(iii) *Dacă* $u = (u_1, \dots, u_n)$ *este o bază ortonormată a lui* V, *atunci* $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ *este de asemenea o bază ortonormată a lui* V.
(iv) *Dacă* $u = (u_1, \dots, u_n)$ *este o bază ortonormată a lui* V, *atunci matricea* $[f]_{u,u}$ *este unitară.*

Definiţia 8.5.6 Dacă cele patru condiţii de mai sus sunt îndeplinite, spunem că f este un operator *unitar* (sau *ortogonal*, dacă $K = \mathbb{R}$.)

Exerciţiul 115 Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f unitar. (ii) $f \circ f^* = 1_V$. (ii) $f^* \circ f = 1_V$. (iv) $f^* = f^{-1}$.

Teorema 8.5.7 *Fie* $\lambda \in K$ *o valoare proprie a operatorului unitar* f. *Atunci* $|\lambda| = 1$.

Demonstraţie. Fie $x \in V$, $x \neq 0$. Atunci avem

$$\langle x|x\rangle = \langle x|f^*(f(x))\rangle = \langle f(x)|f(x)\rangle = \langle \lambda x|\lambda x\rangle = \bar{\lambda}\lambda\langle x|x\rangle.$$

Rezultă că $\bar{\lambda}\lambda = 1$, deci $|\lambda| = 1$. ■

8.5.3 Operatori normali

Definiţia 8.5.8 Spunem că f este operator **normal**, dacă $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Exerciţiul 116 a) Operatorul f este normal dacă şi numai dacă matricea $[f]_{e,e}$ este normală, adică $[f]_{e,e}^*[f]_{e,e} = [f]_{e,e}[f]_{e,e}^*$.
b) Dacă operatorul f este unitar sau autoadjunct, atunci f este normal.

Exerciţiul 117 Dacă f este un operator normal, atunci:
a) Pentru orice $x \in V$, $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$.
b) Pentru orice polinom $P \in K[X]$, $P(f)$ este normal.
c) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Teorema 8.5.9 *Dacă* f *este un operator normal, atunci:*
1) *Orice vector propriu al lui* f *este vector propriu şi al lui* f^*. *Mai mult, dacă* $x \in V$, $x \neq 0$ *şi* $f(x) = \lambda x$, *atunci* $f^*(x) = \bar{\lambda}x$.
2) *Doi vectori proprii asociaţi unor valori proprii disticte sunt ortogonali.*

Demonstraţie. 1) Fie $x \neq 0$ astfel încât $(f - \lambda 1_V)(x) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}0 &= \langle (f - \lambda 1_V)(x)|(f - \lambda 1_V)(x)\rangle = \langle x|(f - \lambda 1_V)^*((f - \lambda 1_V)(x))\rangle = \\ &= \langle x|(f^* - \bar{\lambda}1_V)((f - \lambda 1_V)(x))\rangle = \langle x|(f - \lambda 1_V)((f^* - \bar{\lambda}1_V)(x))\rangle = \\ &= \langle x|(f - \lambda 1_V)^{**}((f^* - \bar{\lambda}1_V)(x))\rangle = \langle (f - \lambda 1_V)^*(x)|(f^* - \bar{\lambda}1_V)(x)\rangle = \\ &= \langle (f^* - \bar{\lambda}1_V)(x)|(f^* - \bar{\lambda}1_V)(x)\rangle,\end{aligned}$$

deci $(f^* - \bar{\lambda}1_V)(x) = 0$.
2) Fie $x, y \in V$ doi vectori proprii astfel încât $f(x) = \lambda x$ şi $f(y) = \mu y$, unde $\lambda \neq \mu$. Avem

$$0 = \bar{\lambda}\langle x|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle = \langle x|\bar{\mu}y\rangle = \bar{\mu}\langle x|y\rangle.$$

Deoarece $\bar{\lambda} \neq \bar{\mu}$, deducem că $\langle x|y\rangle = 0$, adică $x \perp y$. ■

8.5.4 Teoreme spectrale

Teorema 8.5.10 1) **(Teorema spectrală complexă)** *Operatorul* f *este normal dacă şi numai dacă există o bază ortonormată* u *astfel încât matricea* $[f]_{u,u}$ *este diagonală.*
2) **(Teorema spectrală reală)** *Operatorul* f *este autoadjunct dacă şi numai dacă există o bază ortonormată* u *astfel încât matricea* $[f]_{u,u}$ *este diagonală şi are elemente din* $\mathbb{R}$.

Observaţii 8.5.11 În termeni de matrice, afirmaţiile de mai sus se traduc astfel:

1) Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ este normală dacă şi numai dacă există $T \in U(n)$ astfel încât matricea $T^h AT$ este diagonală.

2.1) Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ este hermitiană dacă şi numai dacă există $T \in U(n)$ astfel încât matricea $T^h AT$ este diagonală şi are elemente din $\mathbb{R}$.

2.2) Matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ este simetrică dacă şi numai dacă există $T \in O(n)$ astfel încât matricea $T^t AT$ este diagonală.

Corolar 8.5.12 (Reducerea la forma canonică unei forme pătratice) *Fie $B : V \times V \to K$ o formă hermitiană (respectiv simetrică, dacă $K = \mathbb{R}$). Atunci există o bază ortonormată u astfel încât matricea $[B]_u$ este diagonală.*

Exerciţiul 118 Folosind o schimbare de baze ortonormate, să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
b) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
c) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
d) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
e) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
f) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
g) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;
h) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;
i) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

8.6 Grupuri Lie de matrice şi algebrele lor Lie

Principalele exemple de grupuri Lie sunt grupurile generale liniare $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ şi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Observăm că acestea sunt submulţimi ale lui $\mathbb{C}^{n\times}$, unde avem la îndemână metodele analizei matematice. Grupurile $\mathrm{GL}_n(K)$ se numesc grupuri Lie deoarece operaţiile de grup (înmulţirea şi inversarea) sunt funcţii diferenţiabile. Denumirea e dată în onoarea matematicianului noregian Sophus Lie, care a iniţiat studiul grupurilor de transformări continue. Teoria este utilă în studiul simetriilor continue, cum ar fi simetria rotaţională în plan sau în spaţiu.

8.6.1 Grupuri ortogonale şi unitare. Reflexii şi rotaţii în spaţiu

Ca motivaţie pentru studiul acestor grupuri, menţionăm că $\mathrm{SO}(n)$ este grupul rotaţiilor proprii ale spaţiului Hilbert $\mathbb{R}^n$, iar Modelul Standard al fizicii particulelor este o teorie care se bazează pe pe simetriile descrise de produsul direct $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$.

Exerciţiul 119 Să se arate că:

a) dacă $A \in \mathrm{O}(n)$, atunci $\det A = \pm 1$.
b) Dacă $A \in \mathrm{U}(n)$, atunci $|\det A| = 1$;
c) $\mathrm{SO}(n)$ şi $\mathrm{O}(n)$ sunt subgrupuri ale lui $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
d) $\mathrm{SU}(n)$ şi $\mathrm{U}(n)$ sunt subgrupuri ale lui $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
e) $\mathrm{O}(n) \simeq \mathrm{SO}(n) \rtimes C_2$.
f) $\mathrm{U}(n) \simeq \mathrm{SU}(n) \rtimes \mathrm{U}(1)$.

Definiţia 8.6.1 a) $\mathrm{O}(n)$ se numeşte **grupul ortogonal**, iar $\mathrm{SO}(n)$ **grupul special ortogonal** în dimensiune n.

b) $\mathrm{U}(n)$ se numeşte **grupul unitar**, iar $\mathrm{SU}(n)$ **grupul special unitar** în dimensiune n..

Reflexia faţă de un hiperplan

Considerăm spaţiul Hilbert $(\mathbb{R}^n, \langle -|-\rangle)$ şi fie $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector nenul. Fie

$$V_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a|x\rangle\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_k x_k = 0\}.$$

Evident, V_a este un subspaţiu de dimensiune $n-1$ al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$, numit *hiperplan*ul perpendicular pe vectorul a. Definim funcţia

$$s_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad s_a(x) = x - 2\frac{\langle a|x\rangle}{\langle a|a\rangle}.$$

Funcţia s_a se numeşte *reflexia* faţă de hiperplanul perpendicular pe vectorul a, denumire justificată de următorul exerciţiu.

Exerciţiul 120 Să se arate că:
a) s_a este funcţie liniară.
b) $s_a(a) = -1$ şi $s_a(x) = x$ pentru orice $x \in V_a$.
c) $s_a \circ s_a = 1_{\mathbb{R}^n}$.
d) s_a este izometrie, adică $\langle s_a(x)|s_a(y)\rangle = \langle x|y\rangle$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.
e) Există o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^n$ în care matricea lui s_a este $\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.
f) $s_a \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$ şi $s_a \circ s_b \in \mathrm{SO}(n)$.

Rotaţia în plan

Discutăm cazul particular al planului $\mathbb{R}^2$ (vezi şi Observaţia 2.2.8, Exerciţiile 68, 69, 71 şi 98 d)).

Exerciţiul 121 Să se arate că:
a) $\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}$.
b) $\mathrm{U}(1) \simeq \mathrm{SO}(2)$. (Acesta este grupul *rotaţiilor proprii* în plan în jurul originii.)

Rotaţia în spaţiu

Considerăm acum spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$. Următorul exerciţiu furnizează o demonstraţie a teoremei lui Euler menţionate în 4.4.1.

Exerciţiul 122 Fie $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o izometrie care fixează originea O. Să se arate că:
a) A este o transformare liniară şi mai mult, $A \in \mathrm{O}(3)$.
b) Dacă $A \notin \mathrm{SO}(3)$, atunci A este compunerea dintre un element din $\mathrm{SO}(3)$ şi o reflexie faţă de un plan.
c) Dacă $A \in \mathrm{SO}(3)$, atunci $\det(A - I_3) = 0$ (deci 1 este valoare proprie a lui A, adică există un vector propriu (nenul) $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ astfel ca $A\vec{u} = \vec{u}$).
d) $A(\vec{v} \times \vec{w}) = \det A (A\vec{v} \times A\vec{w})$ pentru orice $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.
e) Dacă $A \in \mathrm{SO}(3)$ şi dimensiunea subspaţiului propriu $V(1)$ este 1, atunci A este o rotaţie în jurul axei determinate de $\vec{u}$, iar dacă $\dim V(1) > 1$ atunci $A = I_3$..

Am văzut în Secţiunea 4.4.1, că rotaţia cu unghi α a lui $\vec{v}$ în jurul axei determinate de versorul $\vec{u}$ este o transformare liniară a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathcal{V}_3$ şi notăm $R(\vec{u}, \alpha) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ matricea acestei transformări relativ la baza canonică $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, adică $\vec{v}' = R(\vec{u}, \alpha)\vec{v}$. Amintim că dacă $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ este un vector de normă 1 şi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci putem considera quaternionul

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Cu aceste notaţii, rotaţia cu unghi α a lui $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ în jurul lui $\vec{u}$ este dată de

$$\vec{v}' = R(\vec{u}, \alpha)\vec{v} = qvq^{-1}, \quad \text{unde} \quad v = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

Exerciţiul 123 Se arate că:
a) matricea $R(\vec{u}, \alpha)$ este dată de:

$$R(\vec{u}, \alpha) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 + c^2 - b^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix};$$

b) avem $R(\vec{u}, \alpha) \in \mathrm{SO}(3)$;
c) $\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$. Altfel spus, $\mathrm{SU}(2)$ poate fi identificat cu grupul S^3 al cuaternionilor de normă 1.
d) *funcţia spinor*

$$\mathrm{Spin} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3), \qquad q \mapsto R(\vec{u}, \alpha)$$

este un morfism surjectiv de grupuri al cărui nucleu este $\{\pm 1\}$ (spunem că $\mathrm{SU}(2)$ este o acoperire dublă a lui $\mathrm{SO}(3)$).

8.6.2 Grupul afin, grupul euclidian şi grupul Galilei

Spaţiul afin K^n

Prin spaţiul afin K^n peste K-spaţiul vectorial $(K^n, +, K)$ înţelegem mulţimea K^n (fără nicio structură) asupra căruia acţionează tranzitiv grupul aditiv $(K^n, +)$. Intuitiv, putem aduna un punct P cu un vector x şi obţinem un alt punct Q. Altfel spus, perechea de puncte (P, Q) este un reprezentant al vectorului x.

Fixând un punct O în K^n şi o bază a spaţiului vectorial $(K^n, +, K)$, obţinem un reper în spaţiul afin K^n, deci un sistem de coordonate. (Subliniem că alegerea lui O este arbitrară, nu există niciun punct privilegiat.)

Subspaţiile spaţiul afin K^n sunt toate translaţiile de subspaţii vectoriale, adică submulţimile de forma $P + U$, unde P este un punct din spaţiul afin K^n iar U este un subspaţiu al a spaţiului vectorial $(K^n, +, K)$.

Grupul afin $A_n(K)$ este grupul de simetrie al (sau al automorfismelor) spaţiului afin K^n. Un element al acestui grup este compunerea dintre un automorfism al spaţiului vectorial $(K^n, +, K)$ (adică o funţie liniară bijectivă) şi o translaţie.

Definiţia 8.6.2 Pentru orice $(A, a) \in \mathrm{GL}_n(K) \times K^n$ definim funcţia

$$f_{A,a} : K^n \to K^n, \qquad f_{A,a}(x) = Ax + a.$$

Grupul afin este mulţimea acestor funcţii:

$$A_n(K) := \{f_{A,a} \mid (A, a) \in \mathrm{GL}_n(K) \times K^n\}.$$

Exerciţiul 124 Să se arate că:
a) $(A_n(K), \circ)$ este grup.
b) Funcţia $\Phi : A_n(K) \to \mathrm{GL}_{n+1}(K)$, $\Phi(f_{A,a}) = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un morfism injectiv de grupuri.
c) $G_1 := \{f_{I_n,a} \mid a \in K^n\}$ este subgrup al lui $A_n(K)$ izomorf cu grupul $(K^n, +)$
d) $G_2 := \{f_{A,0} \mid A \in \mathrm{GL}_n(K)\}$ este subgrup al lui $A_n(K)$ izomorf cu grupul $\mathrm{GL}_n(K)$.
e) $A_n(K) \simeq K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa $f_{A,a} \mapsto (a, A)$.

Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$

Prin spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ înţelegem spaţiul afin $\mathbb{R}^n$ peste $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ dotat cu *metrica euclidiană*, adică cu produsul scalar standard, sau echivalent, cu forma pătratică $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, a cărei matrice este matricea unitate I_n. Dacă $Q = P + x$, atunci prin definiţie, distanţa dintre punctele P şi Q este chiar norma vectorului x: $d(P, Q) = \|x\|$.

Grupul euclidian $E(n)$ este grupul de simetrie al (sau al automorfismelor) spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$. Un element al acestui grup se numeşte **izometrie** şi este o compunere dintre rotaţii, reflexii şi translaţii.

Definiţia 8.6.3 Pentru orice $(A, a) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$ definim funcţia

$$f_{A,a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_{A,a}(x) = Ax + a.$$

Grupul euclidian este mulţimea acestor funcţii:

$$E(n) := \{f_{A,a} \mid (A, a) \in O(n) \times \mathbb{R}^n\}.$$

Folosim şi notaţia $SE(n)$ sau $E^+(n)$ atunci când $A \in SO(n)$.

Exerciţiul 125 Să se arate că:
a) $(E(n), \circ)$ este grup.
b) Funcţia $\Phi : E(n) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\Phi(f_{A,a}) = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un morfism injectiv de grupuri.
c) $G_1 := \{f_{I_n,a} \mid a \in \mathbb{R}^n\}$ este subgrup al lui $E(n)$ izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^n, +)$
d) $G_2 := \{f_{A,0} \mid A \in O(n)\}$ este subgrup al lui $A_n(K)$ izomorf cu grupul $O(n)$.
e) $E(n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa $f_{A,a} \mapsto (a, A)$.

Spaţiul şi timpul absolut $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

Mecanica newtoniană presupune existenţa spaţiului absolut şi a unui timp universal pentru toate sistemele de referinţă inerţiale. Într-un sistem de referinţă inerţial, un eveniment are coordonate spaţiale $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, unde $\mathbb{R}^3$ este spaţiul euclidian, şi o coordonată temporală $t \in \mathbb{R}$ (unde $\mathbb{R}$ este de asemenea privit ca spaţiu euclidian 1-dimensional). Transformările lui Galilei dau legătura dintre două sisteme de referinţă inerţiale ce diferă doar printr-o mişcare uniformă cu viteza constantă $v \in \mathbb{R}^3$.

Pentru a defini formal spaţiul şi timpul absolut $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, observăm întâi că avem morfismul injectiv de grupuri

$$\tau : (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{SL}_4(\mathbb{R}), \cdot), \qquad v \mapsto \begin{pmatrix} I_3 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(O matrice de acest tip se mumeşte *forfecare* sau *transvecţie.*) Din egalitatea $\begin{pmatrix} I_3 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+vt \\ t \end{pmatrix}$ deducem că grupul $(\mathbb{R}^3, +)$ acţionează prin automorfisme asupra grupului $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, +)$ astfel:

$$v \cdot (x, t) = (x + vt, t).$$

Construim produsul semidirect de grupuri $((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^3, +_\tau)$, deci operaţia din acest grup este:

$$((x, t), v) +_\tau ((x', t'), v') = ((x + x' + vt', t + t'), v + v').$$

Grupul $((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^3, +_\tau)$ acţionează tranzitiv asupra punctelor mulţimii $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ astfel:

$$((x, t), v) +_\tau (P, s) = (P + x + vs, t + s).$$

Prin spaţiul şi timpul absolut $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ înţelegem mulţimea $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ dotată cu această acţiune şi cu perechea de metrici (independente) $x^2 + y^2 + z^2$ (având matricea $\mathrm{diag}(1, 1, 1, 0)$) şi t^2 (având matricea $\mathrm{diag}(0, 0, 0, 1)$).

Grupul Galilei, notat Gal(3) este grupul automorfismelor (sau grupul de simetrie al) structurii $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ descrise aici. Un element al lui Gal(3) este o compunere dintre o transformare ortogonală, o translaţie în spaţiu şi o mişcare uniformă. Acest grup reflectă principiul relativităţii al lui Galilei: legile mişcării sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.

Definiţia 8.6.4 Pentru orice $(A, v, a, s) \in O(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ definim funcţia

$$f_{A,v,a,s} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \qquad f_{A,v,a,s}(x, t) = (Ax + vt + a, t + s).$$

Grupul Galilei este mulţimea acestor funcţii:

$$\mathrm{Gal}(3) := \{f_{A,v,a,s} \mid (A, v, a, s) \in O(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\}.$$

Folosim şi notaţia SGal(3) atunci când $A \in \mathrm{SO}(3)$. În plus, introducem următoarele submulţimi ale lui Gal(3):
- $G_1 := \{f_{A,v,0,0} \mid (A, v) \in O(3) \times \mathbb{R}^3\}$;
- $G_2 := \{f_{I_3,0,a,s} \mid (a, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\}$;
- $G_3 = \{f_{A,0,0,0} \mid A \in O(3)\}$;
- $G_4 = \{f_{I_3,v,0,0} \mid v \in \mathbb{R}^3\}$.

Exerciţiul 126 Să se arate că:
a) $(\mathrm{Gal}(3), \circ)$ este grup şi SGal(3) este subgrup al lui Gal(3).
b) Funcţia $\Phi : \mathrm{Gal}(3) \to \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$, $\Phi(f_{A,v,a,s}) = \begin{pmatrix} A & v & a \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un morfism injectiv de grupuri.

Exerciţiul 127 Să se arate că:
a) G_1, $G_2 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, $G_3 \simeq O(3)$, $G_4 \simeq \mathbb{R}^3$ sunt subgrupuri ale lui Gal(3).
b) $\mathrm{Gal}(3) \simeq G_2 \rtimes G_1 \simeq G_2 \rtimes (G_4 \rtimes G_3)$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa $f_{A,v,a,s} \mapsto ((a, s), (v, A))$.

8.6.3 Grupuri ortogonale indefinite. Grupul Lorenz şi grupul Poincaré

Grupul $O(p, q)$

Considerăm spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}$ dotat cu forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+2}^2$ de signatură (p, q), a cărei matrice este $I_{p,q} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$.

Definiţia 8.6.5 Grupul ortogonal indefinit $O(p, q)$ este grupul izometriilor liniare ale *spaţiului pseudo-euclidian* $(\mathbb{R}^{p,q}, Q)$, adică

$$O(p, q) = \{A \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid A^t I_{p,q} A = I_{p,q}\} = \{A \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid Q(Ax) = Q(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^{p+q}\}.$$

Exerciţiul 128 Să se arate că mulţimile de matrice de mai sus sunt egale şi că $O(p, q)$ este într-adevăr subgrup al lui GL_{p+q}.

Spaţiu-timp Minkowski

Prin spaţiul-timp Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ înţelegem spaţiul afin $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R})$ dotat cu *metrica Minkowski*, adică cu forma pătratică $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$, a cărei matrice este $\eta=\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$. Vom nota coordonatele astfel:

$$(x_0,x_1,x_2,x_3)=(ct,x,y,z).$$

Intervalul dintre două evenimente este dat de formula

$$(\Delta s)^2=(c\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2.$$

Grupul Lorenz este grupul ortogonal indefinit $O(1,3)$, adică este grupul izometriilor spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^{1,3},\eta)$. Transformările care păstrază orientarea (adică au determinant 1) se numesc *proprii*. Transformările care păstrează direcţia în timp se numesc *ortocrone*. Subgrupul format din transformările proprii şi ortocrone se notează $SO^+(1,3)$, adică avem

$$SO^+(1,3)=\{A\in O(1,3)\mid \det A=1,\quad a_{00}>0\}.$$

Grupul Poincaré $\mathbb{R}^{1,3}\rtimes O(1,3)$ este grupul de simetrie al (sau al automorfismelor) spaţiului-timp Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Acest grup conţine translaţii în timp şi spaţiu, reflexii şi rotaţii în spaţiu şi impulsuri care leagă două obiecte în mişcare uniformă.

Exerciţiul 129 a) Considerăm matricele $A=\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$ (inversiunea în spaţiu) şi $B=\operatorname{diag}(-1,1,1,1))$ (întoarcerea în timp). Să se arate că mulţimea $\{I_4,A,B,AB\}$ este un subgrup al lui $O(1,3)$, izomorf cu grupul Klein $C_2\times C_2$.

b) Să se arate că $O(1,3)\simeq SO^+(1,3)\rtimes(C_2\times C_2)$.

Următorul exerciţiu stabileşte o legătură între Grupul Möbius (Exerciţiul 80) şi grupul Lorenz restrâns $SO^+(1,3)$.

Exerciţiul 130 a) Fie $\mathcal{H}_2$ mulţimea matricelor hermitiene de tip 2×2 (Exerciţiul 102). Să se arate că funcţia

$$f:\mathbb{R}^{1,3}\to\mathcal{H}_2,\ x=(x_0,x_1,x_2,x_3)\mapsto X=\begin{pmatrix}x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}$$

este izomorfism de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale şi avem $\det X=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

b) Fie $A\in SL_2(\mathbb{C})$ şi $X\in\mathcal{H}_2$. Definim $\phi_A(X)=AXA^h$. Să se arate ą:

(1) $\phi_A(X)\in\mathcal{H}_2$;

(2) $\phi_A:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ este automorfism al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathcal{H}_2$;

(3) $\det\phi_A(X)=\det X$;

c) Să se deducă din a) şi b) rezultă operatorul ϕ_A poate fi privit ca un automorfism propriu şi ortocron al lui $(\mathbb{R}^{1,3},\eta)$, deci ca un element al lui $SO^+(1,3)$.

d) Să se arate că funcţia spinor

$$\mathrm{Spin}:(SL_2(\mathbb{C}),\cdot)\to(SO^+(1,3),\cdot),\qquad A\mapsto\phi_A$$

este morfism surjectiv de grupuri şi $\mathrm{KerSpin}=\{I_2,-I_2\}$.

8.6.4 Algebra Lie a unui grup Lie

Vom considera mai jos exemple de grupuri Lie care sunt subgrupuri închise ale lui $GL_n(K)$ (în raport cu topologia uzuală din $K^{n\times n}$ sau, altfel spus, sunt mulţimea soluţiilor din $K^{n\times n}$ ale unui sistem de ecuaţii date prin funcţii diferenţiabile).

Exemple 8.6.6 1) Grupul special liniar $SL_n(K):=\{A\in GL_n(K)\mid\det A=1\}$ este grup Lie.

2) Din Exerciţiul 119 rezultă că $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ şi $SU(n)$ sunt grupuri Lie.

3) Grupurile ortogonale indefinite $O(p,q)$ sunt grupuri Lie.

4) Grupul afin $A_n(K)$ este grup Lie, deoarece poate fi privit ca un subgrup închis al lui $GL_{n+1}(K)$. Rezultă că grupul euclidian $E(n)$, grupul Galilei $Gal(3)$ respectiv grupul Poincaré $\mathbb{R}^{1,3}\rtimes O(1,3)$ sunt de asemenea grupuri Lie.

Fiecărui grup Lie G i se asociază algebra Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, care joacă un rol important în studiul lui G. Algebra Lie a lui $\mathrm{GL}_n(K)$ se notează $(\mathfrak{gl}_n(K), +, [\cdot,\cdot], K)$ şi este algebra Lie asociată algebrei asociative $(M_n(K), +, \cdot, K)$. Amintim că **produsul Lie (comutatorul)** $[\cdot,\cdot]$ respectiv **anticomutatorul** $\{\cdot,\cdot\}$ sunt definiţi prin:

$$[A, B] = AB - BA, \qquad \{A, B\} = AB + BA.$$

Dacă G este un subgrup închis al lui $\mathrm{GL}_n(K)$, atunci se arată cu algebra sa Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ este subalgebra Lie a lui $\mathfrak{gl}_n(K)$ dată de:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid e^{tX} \in G \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}\},$$

unde exponenţiala $e^X = \exp(X)$ a matricei $X \in M_n(K)$ este definită prin seria convergentă:

$$e^X = \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

Studiul grupurilor şi algebrelor Lie necesită cunoştinţe de geometrie diferenţială. Nu abordăm aici acest subiect, ci doar vom discuta câteva exemple elementare cu metode pur algebrice.

Exemple 8.6.7 1) Algebra Lie a lui $\mathrm{SL}_n(K)$ este $\mathfrak{sl}_n(K) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0.\}$
2) Algebra Lie a lui SO_n este $\mathfrak{so}(n) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A,\ \mathrm{Tr}(A) = 0.\}$
3) Algebra Lie a lui SU_n este $\mathfrak{su}(n) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid A^h = -A,\ \mathrm{Tr}(A) = 0.\}$

Exerciţiul 131 Să se verifice că $\mathfrak{sl}_n(K)$, $\mathfrak{so}(n)$ şi $\mathfrak{su}(n)$ sunt într-adevăr subalgebre Lie ale lui $(\mathfrak{gl}_n(K), +, [\cdot,\cdot], K)$.

Exerciţiul 132 Să se arate că:
a) $\mathfrak{so}(2) = \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$.
b) $\mathfrak{so}(3) = \{\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$, iar matricele $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ formează o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathfrak{so}(3)$.

Exerciţiul 133 Fie vectorul $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in \mathcal{V}_3 \simeq \mathbb{R}^3$. Considerăm matricea $\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3 \in \mathfrak{so}(3)$. Să se arate că:
a) Dacă $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, atunci $\vec{a} \times \vec{x} = \tilde{a} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
b) $\widetilde{\vec{a} \times \vec{b}} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$.
c) Funcţia $\phi : (\mathcal{V}_3, +\times, \mathbb{R}) \to (\mathfrak{so}(3), +, [\cdot,\cdot], \mathbb{R})$, $\phi(\vec{a}) = \tilde{a}$, este izomorfism de algebre Lie.

Exerciţiul 134 (Matricele lui Pauli) Fie $\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:
a) Matricele σ_i sunt hermitiene şi unitare.
b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = I_2$; $\sigma_a\sigma_b = \delta_{a,b}I_2 + i\epsilon_{abc}\,\sigma_c$.
c) Relaţiile de comutare, respectiv anticomutare sunt: $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c$, $\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}I_2$.
d) Matricele $I_2 = \sigma_0$, σ_1, σ_2, σ_3 formează o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathcal{H}_2$ al matricelor Hermitiene de tip 2×2.
e) Matricele $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$ formează o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathfrak{su}(2)$.
f) Are loc următoarea legătură cu algebra $\mathbb{H}$ a cuaternionilor: $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3 = \mathbf{i}$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1 = \mathbf{k}$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2 = \mathbf{j}$.
g) Valorile proprii ale matricelor σ_i sunt 1 şi -1; să se determine pentru fiecare σ_i vectorii proprii normalizaţi (adică o bază ortonormată în $\mathbb{C}^2$ formată din vectori proprii).

Exerciţiul 135 (Matricele lui Gell-Mann) Considerăm matricele λ_i şi $g_i = \lambda_i/2$, $i = 1, \ldots, 8$, unde:
$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se arate că matricele λ_i sunt hermitiene şi formează o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului $\mathfrak{su}(3)$.
b) Să se calculeze coeficienţii $f^{ijk} \in \mathbb{R}$ astfel ca $[g_i, g_j] = i \sum_{k=1}^{8} f^{ijk} g_k$.

8.7 Spaţii Hilbert infinit dimensionale

Am văzut $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{C}^n$, dotate cu produsul scalar standard, sunt spaţii Hilbert finit dimensionale. Prezentăm aici două exemple de spaţii Hilbert infinit dimensionale, care au aplicaţii în fizică.

8.7.1 Spaţiul ℓ^2 al şirurilor de pătrat sumabil

Considerăm mulţimea

$$\ell^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

Se arată că ℓ^2 este $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a şirurilor. Definind produsul scalar

$$\langle x|y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n y_n,$$

ℓ^2 devine spaţiu Hilbert peste $\mathbb{C}$. Familia de şiruri $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $e_n(m) = \delta_{nm}$ este ortonormată.

8.7.2 Spaţiul L^2 al funcţiilor de pătrat integrabil

Fie $a < b$ numere reale. Considerăm mulţimea

$$L^2 = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty\}.$$

Se arată că L^2 este $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a funcţiilor. Definind produsul scalar

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

L^2 devine spaţiu Hilbert peste $\mathbb{C}$.

Exerciţiul 136 Să se arate că familia de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $f_n(t) = e^{2\pi i n t}$ este ortonormată în $L^2[01]$.

(Aceste funcţii sunt studiate în cadrul teoriei seriilor Fourier, sau mai general, în cadrul analizei armonice. Aplicaţiile practice se referă la reprezentarea semnalelor sau altor fenomene ondulatorii ca o compunere de unde elementare.)

Observaţii 8.7.1 Mai general, în locul intervalului $[a, b]$ se poate lua un spaţiu masurabil Lebesgue X şi atunci în definiţii se foloseşte integrala Lebesgue.

Capitolul 9

Tensori

9.1 Introducere

Tensorii sunt obiecte geometrice care descriu relaţii liniare între vectori, scalari şi alţi tensori. Vectorii şi scalarii sunt cazuri particulare de tensori. Printre example se număra produsul scalar, produsul vectorial şi operatorii liniari.

Un tensor poate fi reprezentat ca un tabel multidimensional de numere. *Ordinul* (sau gradul sau rangul) tensorului este dat de dimensiunea tabelului, adică de numărul de indici al fiecărui component al tabelului. De examplu, un operator liniar este un tensor de ordin 2, deoarece se reprezintă printr-o matrice, adică un tabel 2-dimensional. Un vector se reprezintă printr-un tabel 1-dimensional, deci este un tensor de ordin 1, iar un scalar se reprezintă printr-un singur număr, deci este un tensor de ordin 0.

Deoarece exprimă a relaţii între vectori, tensorii trebuie să fie independenţi de alegerea bazei. Alegând o bază (adică un sistem de coordonate sau sistem de referinţă) şi aplicându-i tensorul, obţinem un tabel multidimensional ce reprezintă tensorul în baza respectivă. Independenţa de coordonate înseamnă o ,,lege" de transformare care leagă tabelul asociat unei baze cu tabelul asociat altei baze. Această lege de transformare este inclusă în definiţia noţiunii de tensor, iar forma precisă a legii de transformare determină *tipul* (sau valenţa) tensorului.

9.1.1 Istoric

Calculul tensorial a fost dezvoltat după anul 1890 de către matematicienii italieni Tullio Levi-Civita şi Gregorio Ricci-Curbastro (pe scurt Ricci), sub numele de ,,calcul diferenţial absolut", continuând lucrările anterioare ale lui Bernhard Riemann, Elwin Bruno Christoffel etc. În paralel, în a doua jumătate a secolului 19, Hermann Grassmann a dezvoltat ,,algebra exterioară". Această teorie a putut fi unificată cu calculul tensorial, folosind ideile lui Carl Friedrich Gauss din geometria diferenţială. În secolul 20 subiectul a fost redenumit ,,analiză tensorială".

9.1.2 Aplicaţii ale tensorilor

Tensorii sunt utili în modelarea matematică a multor ramuri ale ştiinţelor naturii.

• Mecanica mediilor continue: tensorul de presiune şi tensorul de întindere sunt tensori de odin 2, şi sunt legaţi prin tensorul de elasticitate de ordin 4. De examplu, tensorul de presiune P asociază unui vector $\vec{v}$ vectorul de presiune $\mathsf{P}(\vec{v})$ aflat pe suprafaţă normală la $\vec{v}$, deci P exprimă o relaţie între aceşti doi vectori.

• Electromagnetism: tensorul electromagnetic (sau Faraday).

• Medii anisotrope: tensorii de permitivitate şi and susceptibilitate electrică.

• În teoria relativităţii generale câmpurile tensoriale sunt frecvent utilizate. Levi-Civita a purtat o bogată corespondenţă cu Einstein pentru clarificarea aspectelor tehnice.

• Operatorii tensoriali sferici sunt funcţiile proprii ale operatorului de moment unghiular cuantic în coordonate sferice.

• Tensorii de difuzie reprezintă rata de difuzie în medii biologice.

• În domeniul opticii computerizate se foloseşte asa-numitul tensor trifocal.

• În geometria differenţială sunt foarte cunoscuţi tensorii metrici (care sunt forme pătratice) şi tensorul de curbură Riemann.

• După anul 1920 s-a constatat că tensorii joacă un rol esenţial în algebra abstractă şi în topologia algebrică.

9.2 Notaţii şi convenţii

În cele ce urmează vom insista doar asupra aspectelor algebrice. În fizică se folosesc frecvent nu doar spaţiile vectoriale ci şi *câmpurile vectoriale*, adică fiecărui punct din spaţiu (care este presupus a fi o *varietate diferenţiabilă*) i se asociază un spaţiu vectorial (şi anume *spaţiul tangent* în punctul respectiv), combinându-se astfel algebra cu calculul diferenţial.

9.2.1 Coordonatele unui vector. Notaţia lui Einstein

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită n şi fie e o bază a lui V. Formal, vom reprezenta baza e ca o matrice linie:

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Dacă x este un vector din V, atunci el are coordonatele $x^1, \dots, x^n$ relativ la această bază. Notaţia cu *indici inferiori*, respectiv *superiori*, este o convenţie utilă. De asemenea, vom folosi convenţia conform căreia vectorii se reprezintă ca matrice coloană:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Astfel, în concordanţă cu regula de înmulţire a matricelor, avem

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x^i = e_i x^i.$$

Aici, i se numeşte *indice de sumare*, iar rezultatul nu depinde de el. Un indice care nu e de sumare se numeşte *indice liber*. În a doua expresie, simbolul „$\sum$" a fost omis. Aceasta este **notaţia lui Einstein**: atunci când un indice i apare într-o expresie atât ca indice superior cât şi inferior, atunci efectuăm suma cu i luând toate valorile de la 1 la n. În acest fel, expresiile care ar conţine multe sume se simplifică în mod semnificativ. În continuare vom folosi notaţia lui Einstein.

Exemple 9.2.1 a) Produsul scalar standard al vectorilor x şi y este $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = x^i y^j \delta_{ij}$.

b) Produsul $C = AB$ al matricelor $A = (A^i_j)$ şi $B = (B^i_j)$ din $M_n(K)$ este dat de $C^i_k = A^i_j B^j_k$.

c) Dacă $A = (A^i_j) \in M_n(K)$, atunci A^i_i este urma matricei A.

Considerăm acum **schimbarea bazei**. Fie $\hat{e}$ o nouă bază a lui V şi fie $T = (T^i_j) \in \mathrm{GL}_n(K)$ matricea de trecere de la e la $\hat{e}$. Formal, avem

$$\hat{e} = eT\ ; \qquad \hat{e}_j = e_i T^i_j.$$

Fie $\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n$ coordonatele lui x relativ la baza $\hat{e}$. După cum ştim, coordonatele se transformă astfel:

$$\hat{x} = T^{-1} x\ ; \qquad \hat{x}^i = (T^{-1})^i_j x^j,$$

Spunem că aceasta este o transformare *contravariantă* de coordonate.

9.2.2 Spaţiul dual. Covectori

Definiţia 9.2.2 a) Spaţiul vectorial $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) =: \mathcal{L}(V, K)$ al formelor (funcţionalelor) liniare $f : V \to K$ se numeşte *dualul spaţiului* V. Elementele lui V^* se mai numesc *covectori*.

b) Aceasta este tot un spaţiu de dimensiune n şi are o bază $\epsilon = e^*$ asociată în mod canonic bazei e, notată formal ca o matrice coloană $\epsilon = (\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n)^t$, definită de egalităţile

$$\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j.$$

Baza ϵ se numeşte *duala bazei* e şi de multe ori se notează tot cu e, diferenţa fiind dată de poziţia indicilor. Ca definiţie alternativă, să observăm că pentru orice $x \in V$ avem $\epsilon^i(x) = x^i$.

c) Dacă $f \in V^*$, atunci (cu notaţia lui Einstein) avem

$$f = f\epsilon = f_i \epsilon^i,$$

unde $f_i = f(e_i) \in K$ şi f este identificat cu matricea linie a coordonatelor sale relativ la baza ϵ:

$$f = (f_1, \dots, f_n).$$

Elementele spaţiului V^*, precum şi matricele linie care le reprezintă se mai numesc *covectori*.

d) *Produsul interior* dintre un covector $f = f_i \epsilon^i \in V^*$ şi un vector $x = x^j e_j \in V$ este dat de evaluare: $\langle f|x \rangle = f(x) = f_i x^i \in K$.

Observaţii 9.2.3 Deoarece au aceeaşi dimensiune n, spaţiile V şi V^* sunt izomorfe, dar nu există un izomorfism canonic între ele. În schimb, V este canonic izomorf cu *bidualul* său V^{**}, adică cu dualul lui V^*. *Izomorfismul canonic*

$$\Psi : V \to V^{**}, \qquad \Psi(v)(f) = f(v)$$

este determinat de corespondenţa $e_i \mapsto e_i^{**}$, unde $e^{**} := \epsilon^*$ este duala bazei $\epsilon = e^*$, deoarece observăm că $\Psi(e_j)(\epsilon^i) = \delta^i_j$.

Considerăm din nou **schimbarea bazei** de la e la $\hat{e} = eT$. Fie $\hat{\epsilon}$ duala bazei $\hat{e}$, adică $\hat{\epsilon}^i(\hat{e}_j) = \delta^i_j$. Notăm cu S matricea de trecere de la baza ϵ la baza $\hat{\epsilon}$, deci S este definită de egalităţile

$$\hat{\epsilon} = S\epsilon; \qquad \hat{\epsilon}^i = S^i_j \epsilon^j.$$

Propoziţia 9.2.4 1) *Avem* $S = T^{-1}$*, adică matricea de trecere de la* ϵ *la* $\hat{\epsilon}$ *este inversa matricei de trecere de la* e *la* $\hat{e}$.

2) *Componentele* f_i *ale unui covector* $f \in V^*$ *transformă covariant (folosind matricea* T*), adică avem*

$$\hat{f} = fT; \qquad \hat{f}_j = f_i T^i_j.$$

Demonstraţie. 1) Avem $\delta^i_j = \hat{\epsilon}^i(\hat{e}_j) = S^i_k \epsilon^k(T^l_j e_l) = S^i_k T^l_j \delta^l_k = S^i_k T^k_j$, deci $ST = I_n$.

2) Avem $f\epsilon = \hat{f}\hat{\epsilon} = \hat{f}S\epsilon$, deci $\hat{f} = fS^{-1} = fT$, adică în coordonate, $\hat{f}_j = f_i T^i_j$. ■

Observaţii 9.2.5 Să recapitulăm convenţiile acestui capitol.

• Vectorii sunt reprezentaţi de matrice coloană; indicii superiori sunt indici de linie, iar componentele (coordonatele) respective se transformă contravariant, adică folosind matricea T^{-1}.

• Covectorii sunt reprezentaţi de matrice linie; indicii inferiori sunt indici de coloană, iar componentele (coordonatele) respective se transformă covariant, adică folosind matricea T.

9.3 Definiţii ale tensorilor

Există diferite moduri echivalente de a defini tensorii, diferenţa fiind doar de limbaj şi de nivel de abstracţiune.

9.3.1 Tabele (matrice) multidimensionale

În esenţă, definiţia mai jos a de tensorului este cea dată de Ricci, şi continuă să fie utilizată în texte de fizică şi inginerie.

Definiţia 9.3.1 Printr-un *tensor* A de *tip* (p, q) înţelegem asocierea la fiecare bază $e = (e_1, ..., e_n)$ a spaţiului V a unui tabel multidimensional $A \in K^{n^{p+q}}$, notat

$$A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q},$$

astfel încât dacă aplicăm o schimbare de bază

$$e \mapsto \hat{e} = eT = (T^i_1 e_i, \dots, T^i_n e_i)$$

atunci tabelul multidimensional satisface următoarea regulă de transformare:

$$\hat{A}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (T^{-1})^{i_1}_{k_1} \cdots (T^{-1})^{i_p}_{k_p} T^{l_1}_{j_1} \cdots T^{l_q}_{j_q} A^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q}.$$

Ordinul tensorului A este numărul total de indici $p + q$. Spunem că A este un tensor de p ori *contravariant* şi de q ori *covariant*. (De notat că aici T^i_j nu e tensor.)

9.3.2 Forme multiliniare

Dezavantajul definiţiei de mai sus este că nu e clar că tensorul este de fapt independent de alegerea bazei. O definiţie intrinsecă este de aceea utilă.

Definiţia 9.3.2 Un tensor A de tip (p, q) este o funcţie (formă) multiliniară

$$A : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ factori}} \to K,$$

Aplicând forma multiliniară A bazelor e şi e^*, obţinem tabelul $p + q$-dimensional de componente

$$A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} := A(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).$$

Această definiţie este frecvent utilizată în textele de geometrie diferenţială şi de fizică teoretică.

Observaţii 9.3.3 a) Tabelul multidimensional ale componentelor lui A este un tensor conform definiţiei din paragraful precedent. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\hat{A}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= A(\hat{\epsilon}^{i_1}, \dots, \hat{\epsilon}^{i_p}, \hat{e}_{j_1}, \dots, \hat{e}_{j_q}) = \\ &= A((T^{-1})^{i_1}_{k_1} \epsilon^{k_1}, \dots, (T^{-1})^{i_p}_{k_p} \epsilon^{k_p}, T^{l_1}_{j_1} e_{l_1}, \dots, T^{l_q}_{j_q} e_{l_q}) = \\ &= (T^{-1})^{i_1}_{k_1} \cdots (T^{-1})^{i_p}_{k_p} T^{l_1}_{j_1} \cdots T^{l_q}_{j_q} A(\epsilon^{k_1}, \dots, \epsilon^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = \\ &= (T^{-1})^{i_1}_{k_1} \cdots (T^{-1})^{i_p}_{k_p} T^{l_1}_{j_1} \cdots T^{l_q}_{j_q} A^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q}.\end{aligned}$$

Mai mult, nu e greu de arătat că definiţiile sunt echivalente.

b) De multe ori este util să ţinem cont de ordinea factorilor din definiţia tensorului. De exemplu, tensorul $A : V^* \times V \times V \to K$ are componentele ${A^i}_{jk}$, în timp ce $A : V \times V^* \times V \to K$ are componentele ${{A_j}^i}_k$, iar $A : V \times V \times V^* \to K$ are componentele ${A_{jk}}^i$.

c) Există două notaţii utile pentru tensori, inventate de Roger Penrose:

• **Notaţia abstractă**. Aceasta este o notaţie independentă de alegerea bazei în V şi arată tipul tensorului. De exemplu, ${A^{ab}}_c$, ${{A^a}_b}^c$, ${A^a}_{ba}$, unde a, b, c nu sunt indici, ci poziţii pentru indici.

• **Notaţia grafică**. Tensorul se reprezintă printr-o formă geometrică (cerc, pătrat, triunghi, etc.), iar tipul este indicate de'liniuţe' sau 'antene' sau 'picioruşe' îndreptate în sus sau în jos, câte unul pentru fiecare poziţie de indice. Operaţiile descrise mai jos se indică prin 'legarea sau unirea picioruşelor'. Şi această notaţie este independentă de bază şi nu e nevoie să folosim litere pentru indici.

9.3.3 Produse tensoriale de spaţii vectoriale

O definiţie chiar mai abstractă este de multe ori utilă în matematică. Pentru aceasta, introducem întâi produsul tensorial de spaţii vectoriale, construcţie care satisface o proprietate de universalitate.

Dacă V şi W sunt K-spaţii vectoriale de dimensiune n, respectiv m şi baze $e = (e_1, \dots, e_n)$, respectiv $f = (f_1, \dots, f_m)$, putem forma *produsul tensorial* $V \otimes W$.

• Prin definiţie, $V \otimes W$ este un K-spaţiu de dimensiune nm având ca bază produsul cartezian $e \times f$, şi vom nota $e \times f = \{e_i \otimes f_j \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}$.

• Produsul tensorial este caracterizat de o *proprietate de universalitate*, care spune că există izomorfismele canonice

$$\mathcal{L}^2(V \times W, K) \simeq \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, K) \simeq V^* \otimes W^*,$$

unde $\mathcal{L}^2(V \times W, K)$ este spaţiul formelor biliniare de la $V \times W$ la K.

• Această definiţie se generalizează imediat la produsul tensorial al unui număr finit de spaţii, şi avem izomorfismul canonic

$$\mathcal{L}^r(V_1 \times \cdots \times V_r, K) \simeq \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, K) \simeq V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*.$$

• Există izomorfismele canonice

$$V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}_K(V, W) \simeq \mathcal{L}^2(V \times W^*, K);$$

primul asociază elementului $\epsilon^i \otimes f_j$ din baza lui $V^* \otimes W$ funcţia liniară $\varphi^j_i : V \to W$, definită de $\varphi^j_i(e_k) = \delta_{ik} f_j$, unde $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Cu alte cuvinte, matricea $[\varphi^j_i]_{e,f}$ are un singur 1 în poziţia (j, i) şi 0 în rest. Inversa acestui izomorfism asociază funcţiei liniare $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ elementul $\varphi(e_i)^j \epsilon^i \otimes f_j \in V^* \otimes W$ (unde am folosit notaţia lui Einstein).

Definiţia 9.3.4 a) Un tensor de tip (p, q) este un element

$$A \in \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ factori}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ factori}}.$$

b) Componentele tensorului A sint coeficienţii lui A relativ la bazele e şi e^*, adică

$$A = A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_q}.$$

c) Din proprietatea de universalitate rezultă că există izomorfismele canonice

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^p_q(V) &:= V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^* \\ &\simeq \mathcal{L}(V^* \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V \otimes \cdots \otimes V, K) \\ &\simeq \mathcal{L}^{p+q}(V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V, K).\end{aligned}$$

Exemple 9.3.5 a) Spaţiul $V \otimes V$ al tensorilor de tip $(2, 0)$ are o bază constând din tensorii $e_i \otimes e_j$. Un tensor $A \in V \otimes V$ se scrie sub forma $A = A^{ij} e_i \otimes e_j$.

b) Spaţiul $V \otimes V^*$ al $(1, 1)$-tensorilor este canonic izomorf cu spaţiul operatorilor liniari $\mathrm{Hom}_K(V, V)$.

c) Dacă $A \in V \otimes V \otimes V^*$ este un tensor de tip $(2, 1)$, atunci avem $A = A^{ij}{}_k e_i \otimes e_j \otimes \epsilon^k$. Dacă T este matricea schimbării de bază de la e la e', atunci componentele se transformă astfel:

$$\hat{A}^{i'j'}{}_{k'} = T^{i'}{}_i\, T^{j'}{}_j\, (T^{-1})^k{}_{k'}\, A^{ij}{}_k.$$

9.4 Operaţii cu tensori

Este clar că mulţimea $\mathcal{T}^p_q(V)$ a tensorilor de tip (p, q) formează un K-spaţiu vectorial cu adunarea şi înmulţirea cu scalari definite pe componente. În afară de aceste două operaţii, avem câteva operaţii specifice.

9.4.1 Produsul tensorial al doi tensori

Produsul tensorial al tensorului A de tip (p, q) cu tensorul B de tip (k, l) este tensorul $A \otimes B$ de tip $(p+k, q+l)$, unde, în termeni de forme multiliniare avem

$$\begin{aligned}&(A \otimes B)(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+k}, x^1, \ldots, x^q, x^{q+1}, \ldots, x^{q+l}) \\ &\qquad = A(f_1, \ldots, f_p, x^1, \ldots, x^q) B(f_{p+1}, \ldots, f_{p+k}, x^{q+1}, \ldots, x^{q+l}),\end{aligned}$$

iar componentele sunt date de:

$$(A \otimes B)^{i_1 \ldots i_p i_{l+1} \ldots i_{p+k}}_{j_1 \ldots j_q j_{q+1} \ldots j_{q+l}} = A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} B^{i_{p+1} \ldots i_{p+k}}_{j_{q+1} \ldots j_{q+l}}$$

Produsul Kronecker a două matrice poate fi privit ca un caz particular al acestei construcţii, chiar dacă formal se obţin obiecte diferite. Dacă $A = (a_{ij})$ este o matrice de tip $m \times n$ iar $B = (b_{kl})$ este de tip $p \times q$, atunci

$$A \otimes B = (a_{ij} B)$$

este o matrice de tip $(mp) \times (nq)$.

9.4.2 Contracţia unui tensor

Contracţia reduce un (p, q)-tensor la un $(p-1, q-1)$-tensor. În componente, operaţia se realizează însumând după un indice contravariant şi unul covariant al tensorului.

De exemplu, un $(1, 1)$-tensor A^i_j se contractă la scalarul A^i_i, care este chiar urma matricei A^a_b.

Să observăm că această construcţie are la bază funcţia biliniară canonică $\mathrm{Tr} : V^* \times V \to K, \quad (f, v) \mapsto f(v)$, sau echivalent, funcţia liniară canonică $\mathrm{Tr} : V^* \otimes V \to K, \quad f \otimes v \mapsto f(v)$, numită *trace* sau *urmă*.

De exemplu, $\mathrm{Tr}^1_3 :\ A^a{}_{bc}{}^d{}_e \mapsto A^a{}_{bc}{}^d{}_a$ respectiv $\mathrm{Tr}^2_1 :\ A^a{}_{bc}{}^d{}_e \mapsto A^a{}_{bc}{}^b{}_e$.

Exemple 9.4.1 Produsul a două matrice A^a_b şi B^a_b poate fi obţinut folosind produsul tensorial urmat de contracţie: $(AB)^a_b = A^a_c \otimes B^c_b$.

9.4.3 Coborârea şi ridicarea indicilor

O formă biliniară simetrică $g : V \times V \to K$ corespunde unui $(0, 2)$-tensor numit **tensorul metric (covariant)** şi notat $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Definiţia 9.4.2 Cu ajutorul lui g definim operaţia care converteşte un indice contravariant (superior) al unui tensor de tip (p, q) intr-un indice covariant (inferior), prin contractarea indicelui superior al tensorului cu un indice inferior al metricii g:

$$g_{i_k j} A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Obţinem un tensor de tip $(p - 1, q + 1)$, cu indicele inferior în poziţia indicelui superior contractat. Această operaţie se numeşte **coborârea unui indice**.

Invers, dacă în plus, forma biliniară g este nedegenerată atunci putem defini în mod canonic inversa (duala) metricii g, care este un $(2, 0)$-tensor $g^* : V^* \times V^* \to K$, numit **tensorul metric contravariant**. Definind $g^{ij} := g^*(\epsilon^i, \epsilon^j)$, avem că matricea $(g^{ij}) \in M_n(K)$ este inversa matricei (g_{ij}), adică

$$g^{ij} g_{jk} = g_{kj} g^{ji} = \delta^i_k.$$

Definiţia 9.4.3 Folosind g^{ij}, contractăm un indice inferior al (p, q)-tensorului A cu un indice superior al metricii inverse:

$$g^{i j_k} A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Obţinem un tensor de tip $(p + 1, q - 1)$, cu indicele superior în poziţia indicelui inferior contractat. Această operaţie se numeşte **ridicarea unui indice**.

Exemple 9.4.4 a) $g^{ij} A_j = A^i$ şi $g_{ij} A^j = A_i$.

b) $g_{ij} A^k{}_m{}^{li} = A^k{}_m{}^l{}_j$ şi $g^{ij} A_{kmjl} = A_{km}{}^i{}_l$.

c) Putem folosi δ_{ij} pentru a coborâ indicii vectorilor, adică $u_i = \delta_{ij} u^j$ and $v_i = \delta_{ij} v^j$. Atunci produsul scalar standard poate fi scris astfel:

$$\langle u|v\rangle = u^i v^j \delta_{ij} = u^i v_i = u_j v^j.$$

c) Transpusa matricei A poate fi scrisă astfel: $(A^t)^i_j = \delta_{ik} A^k_l \delta^{lj} = A^j_i$.

d) **Tensorul metric euclidian (produsul scalar standard) în** $\mathbb{R}^3$**.** Notaţia consacrată foloseşte litere latine pentru indici. Astfel, pentru un vector $x \in \mathbb{R}^3$ scriem:

$$x = x^a = (x^i) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Produsul scalar standard este

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x^i y^i = \delta_{ij} x^i y^j,$$

deci în acest caz $g_{ij} = \delta_{ij}$ şi $g^{ij} = \delta^{ij}$, deoarece $I_3^{-1} = I_3$. Vectorului x^a îi corespunde covectorul

$$x_b = (x_j) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

unde $x_j = \delta_{ij} x^i$ se mai numesc şi *componentele covariante* ale vectorului x^a. Evident, în acest caz $x_i = x^j$.

e) **Tensorul metric Minkowski în** $\mathbb{R}^{1,3}$**.** Notaţia consacrată foloseşte litere greceşti pentru indici. Astfel, pentru un vector $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ scriem:

$$x = x^\alpha = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Uneori, în loc de x^0 se foloseşte $x^4 = ict$, inde $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ este unitatea imaginară.) Metrica Minkowski este forma pătratică de signatură $(1, 3)$

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

deci în acest caz $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ şi $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, unde $\eta = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, deci $\eta^{-1} = \eta$. Vectorului x^a îi corespunde covectorul

$$x_\beta = (x_\nu) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

unde $x_\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu$ se mai numesc şi *componentele covariante* ale vectorului x^α. Evident, în acest caz $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$ şi $x_3 = -x^3$. (Unii autori, în loc de tensorul metric η lucrează cu $-\eta$, caz în care metrica Minkowski este formă o pătratică de signatură $(3,1)$. Diferenţele nu sunt semnificative, deoarece $\mathbb{R}^{3,1}$ este canonic izomorf cu $\mathbb{R}^{1,3}$.)

Observaţii 9.4.5 a) Forma biliniară simetrică nedegenerată $g(-,-)$ determină un izomorfism explicit între V şi dualul său V^*, astfel: pentru $x \in V$ notăm

$$f_x : V \to K, \qquad f_x(y) = g(x,y),$$

deci $f_x = g(x,-) \in V^*$; este uşor de verificat că funcţia

$$\Phi : V \to V^*, \qquad \Phi(x) = f_x = g(x,-)$$

este izomorfism de K-spaţii vectoriale. Fie $\epsilon = e^*$ este duala bazei e. În baza e^* scriem $f_x = x_j \epsilon^j$; prin abuz de limbaj, componentele x_j ale covectorului f_x se numesc *componentele covariante* ale vectorului x. Avem

$$x_j = x_j \epsilon^j(e_i) = f_x(e_j) = g(x, e_j) = g(x_i^e, e_j) = x^i g_{ij}.$$

Deoarece Φ este izomorfism, familia $\Phi(e_i) = f_{e_i} = g(e_i, -)$, $i = 1, \ldots, n$; este o altă bază în V^*. Scriind $f_{e_i} = y_{ij}\epsilon^j$, avem

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = f_{e_i}(e_j) = y_{ik}\epsilon^k(e_j) = y_{ik}\delta^k_j = y_{ij},$$

deci $f_{e_i} = g_{ij}\epsilon^j$. Aceasta arată că matricea formei g coincide cu $[\Phi]_{e,\epsilon}$ Din nou prin abuz de limbaj, se scrie de obicei $e_i = g_{ij}\epsilon^j$. (Alternativ, notând $f_{e_i} =: e^i$, avem $e^i = g^i{}_j \epsilon^j$, unde $g^i{}_j = g_{ij}$, adică matricea formei g este chiar matricea de trecere de la baza (ϵ^i) la baza (e^i) în spaţiul dual V^*.)

b) Tensorul metric contravariant g^* este unica formă biliniară $g^* : V^* \times V^* \to K$ cu proprietatea $g^*(f_x, f_y) = g(x,y)$, sau echivalent $g^*(e^i, e^j) = g(e_i, e_j) = g_{ij}$. Într-adevăr, din egalităţile

$$g_{ij} = g^*(e^i, e^j) = g^*(g_{ik}\epsilon^k, g_{jl}\epsilon^l) = g_{ik} g^{kl} g_{jl}$$

obţinem $[g]_e = [g]_e [g^*]_\epsilon [g]_e$, deci $[g^*]_\epsilon = [g]_e^{-1}$ este unic determinat. Evident, avem $x^i = g^{ij} x_j$. Prin abuz de limbaj ca mai sus, scriem $\epsilon^i = g^{ij} e_i$.

9.4.4 Împletirea (braiding), simetrizarea şi antisimetrizarea

Considerăm permutările $\sigma \in S_m$ şi alegem m indici, toţi superiori sau toţi inferiori. Dintr-un tensor A de tip (p,q) se obţin tot tensori de tip (p,q). Definim următoarele operaţii:

a) **Împletirea** indicilor $i_1, \ldots, i_m$ determinată de $\sigma \in S_m$: $\quad A^{\cdots}_{i_1 \ldots i_m \ldots} \mapsto A^{\cdots}_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(m)} \ldots}$.

b) **Simetrizarea** indicilor $i_1, \ldots, i_m$:

$$A^{\cdots}_{(i_1 \ldots i_m)\ldots} := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A^{\cdots}_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(m)} \ldots}.$$

c) **Antisimetrizarea** indicilor $i_1, \ldots, i_m$:

$$A^{\cdots}_{[i_1 \ldots i_m]\ldots} := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} A^{\cdots}_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(m)} \ldots}.$$

Exerciţiul 137 Fie $V = \mathbb{R}^{1,3}$ dotat cu tensorul metric Minkowski $\eta = \eta_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$. Se dau $(1,0)$-tensorul (vectorul) $x = x^\alpha = (x^\mu) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $(2,0)$-tensorul $X = X^{\alpha\beta} = (X^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (deşi ambii indici sunt superiori, aici primul indice este de linie, iar al doilea de coloană). Să se calculeze:

a) $x_\mu = \eta_{\mu\lambda}x^\lambda$;
b) $x^\mu x_\mu$;
c) $x_\mu X^{\mu\nu}$;
d) $X^\mu{}_\nu = X^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu}$;
e) $X_\mu{}^\nu = X^{\lambda\nu}\eta_{\mu\lambda}$;
f) $X^\lambda{}_\lambda$;
g) $X_{\mu\nu} = X^{\lambda\pi}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\pi\nu}$;
h) $X^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(X^{\mu\nu} + X^{\nu\mu})$;
i) $X_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} - X_{\nu\mu})$.

Exerciţiul 138 Fie $V = \mathbb{R}^2$ dotat cu tensorul metric covariant $g_{ab} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Fie $x^a = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $y_a = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X^a{}_b = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $Y^{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $Z_{ab} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A^a{}_{bc} = (a^i_{jk})$ unde $A^a_{b1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $A^a_{b2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ (în fiecare matrice, primul indice este de linie, iar al doilea de coloană). Să se calculeze:

a) tensorul metric contravariant $g^{ab} = (g^{ij})$;
b) x_b şi y^a;
c) X_{ab}, $X_a{}^b$, X^{ab}, $X^a{}_a$, $X_a{}^a$, $X_{(ab)}$;
d) $Y_a{}^b$, $Y^a{}_b$, Y_{ab}, $Y^a{}_a$, $Y_a{}^a$, $Y^{[ab]}$;
e) $Z^a{}_b$, $Z_a{}^b$, Z_{ab}, $Z^a{}_a$, $Z_a{}^a$;
f) A_{abc}, $A_{(ab)c}$, $A_{(abc)}$, $A^{ab}{}_c$, A^{abc}, $A^{a[bc]}$, $A^{[abc]}$;
g) produsul Kronecker de matrice $X^a{}_b \otimes Y^a{}_b$;
h) produsele tensoriale $x^a \otimes y_b$, $x^a \otimes Y^{bc}$, $y_a \otimes Z^b{}_c$.

9.4.5 Dualul unui spaţiu Hilbert finit dimensional. Notaţia bra-ket a lui Dirac

Fie $(V, \langle -|-\rangle)$ un spaţiu Hilbert, unde $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Fie $e = (e_1, \dots, e_n)$ o bază ortonormată în V. Relativ la această bază, produsul scalar al vectorilor $x, y \in V$ este dat de:

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i y^i = \delta_{ij}\bar{x}^i y^j,$$

sau altfel spus, tensorul metric este δ_{ij}. Amintim că $\langle x|y\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$, $\langle ax|y\rangle = \bar{a}\langle x|y\rangle$ şi $\langle x|ay\rangle = a\langle x|y\rangle$, pentru orice scalar $a \in K$.

La fel ca în Observaţia 9.4.5, pentru orice $x \in V$, funcţia $f_x = \langle x|-\rangle : V \to K, \quad y \mapsto \langle x|y\rangle$ este liniară. Mai mult, produsul scalar determină un izomorfism explicit de K-spaţii vectoriale între V şi dualul său:

$$\Phi : V \to V^*, \quad x \mapsto \langle x|-\rangle.$$

Astfel, y este un vector, iar $f_x = \langle x|-\rangle$ este un covector, mai exact, este covectorul ce corespunde vectorului x prin izomorfismul Φ. (Să notăm că înmulţirea cu scalari în V^* este dată de $(a \cdot f)(y) = \bar{a}f(y) = f(\bar{a}y)$ pentru orice $a \in K$, $f \in V^*$ şi $y \in V$.)

Fizicianul englez Paul Dirac a avut ideea de a introduce o notaţie simetrică: $|y\rangle$ pentru vectori şi $\langle x|$ pentru forme liniare (covectori). Deoarece expresia $\langle x|y\rangle$ este un ,,bracket", adică o ,,paranteză", covectorul $\langle x|$ a fost numit ,,bra", iar vectorul $|y\rangle$ a fost numit ,,ket". Deşi pare aproape o glumă, această notaţie conduce la un formalism eficient mai ales în mecanica cuantică.

Ilustrăm mai jos acest formalism.

1. Notăm $|i\rangle := e_i$, deci baza lui V este formată din vectorii $|1\rangle, \dots, |n\rangle$ şi avem $|x\rangle = \sum_{i=1}^n x^i|i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle i|x\rangle|i\rangle$, unde $x^i = \langle e_i|x\rangle = \langle i|x\rangle$ sunt componentele vectorului $|x\rangle$. Pentru orice $a \in K$ avem $a|x\rangle = |ax\rangle$.

2. Notăm $\langle i| := \epsilon^i$, deci baza duală e^* lui V^* este formată din covectorii $\langle 1|, \dots, \langle n|$ şi avem $\langle x| = \sum_{j=1}^n \langle i|x\rangle\langle j|$, unde x_j sunt *componentele covariante* ale vectorului $|x\rangle$. Pentru orice $a \in K$ avem $a \cdot \langle x| = \langle \bar{a}x|$.

3. Avem $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, iar componentele covariante x_j ale lui $|x\rangle$ sunte date de

$$x_j = \langle x|e_j\rangle = \langle x^i e_i|e_j\rangle = \bar{x}^i\langle e_i|e_j\rangle = \bar{x}^i\delta_{ij} = \bar{x}^j.$$

Matricial scriem $|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ şi $\langle x| = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}^h$.

4. Produsul scalar al vectorilor $|x\rangle$ şi $|y\rangle$ se identifică cu *produsul intern* dintre covectorul $\langle x|$ şi vectorul $|y\rangle$:

$$\langle x|y\rangle = \delta_{ij}\bar{x}^j y^i = x_j y^i.$$

5. Produsul extern $|y\rangle\langle x|$ dintre vectorul $|y\rangle$ şi covectorul $\langle x|$ se identifică cu produsul tensorial $|y\rangle \otimes \langle x|$, care este un $(1,1)$-tensor:

$$|y\rangle\langle x| = |y\rangle \otimes \langle x| = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

6. În particular $|i\rangle\langle j| = e_i \otimes \epsilon^j = E_i^j$ este matricea cu un singur element 1 în poziţia pe linia i şi coloana j. Aceste matrice formează baza canonica a spaţiului vectorial $M_n(K)$. Dacă $A = (A_j^i) \in M_n(K)$, atunci avem

$$A = (A_j^i) = A_j^i E_i^j = \sum_{i,j=1}^{n} |i\rangle A_j^i \langle j| \qquad \text{şi în particular,} \qquad I_n = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|.$$

7. Fie $A : V \to V$ un operator liniar cu matricea $A = (A_j^i) \in M_n(K)$ relativ la perechea de baze (e, e). Avem (identificând pe $x \in V$ cu matricea sa $[x]_e$):

$$|y\rangle = A|x\rangle \;\Leftrightarrow |y\rangle = |Ax\rangle \;\;\Leftrightarrow\;\; y = Ax \;\Leftrightarrow\; y^i = A_j^i x^j.$$

8. Îl putem privi pe acelaşi A şi ca pe un operator liniar $A : V^* \to V^*$, astfel:

$$\langle y| = \langle x|A \;\Leftrightarrow\; y_j = x_i A_j^i \;\Leftrightarrow\; y^h = x^h A \;\Leftrightarrow\; y = A^h x \;\Leftrightarrow\; |y\rangle = A^h|x\rangle \;\Leftrightarrow\; |y\rangle = |A^h x\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle y| = \langle A^h x|.$$

9. Forma sesquiliniară $B : V \times V \to K$ determinată de matricea A se exprimă astfel:

$$B(x,y) = x^h A y = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}^i A^i{}_j y^j = \bar{x}^i A_{ij} y^j = x_i A_j^i y^j = x_i A_j^i y^j =$$
$$= \langle x|A|y\rangle = \langle x|Ay\rangle = \langle A^h x|y\rangle = \overline{\langle y|A^h|x\rangle}.$$

9.5 Determinanţi şi simbolul lui Levi-Civita

Definiţia 9.5.1 *Simbolul lui Levi-Civita* în dimensiune n este dat de:

$$\varepsilon_{i_1 \dots, i_n} = \begin{cases} +1 & \text{dacă}(i_1, \dots, i_n) \text{ este o permutare pară a lui } (1, \dots, n) \\ -1 & \text{dacă } (i_1, \dots, i_n) \text{ este o permutare impară a lui } (1, \dots, n) \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Cu această notaţie şi filosind comvenţia lui Einstein, determinantul matricei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ poate fi scris sub forma

$$\det A = \varepsilon^{i_1 \cdots i_n} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}.$$

De notat că ε nu este un tensor, ci un *pseudotensor*, deoarece la o schimbare de bază trebuie ţinut cont şi *orientare*, adică de semnul determinantului matricei de trecere.

Exerciţiul 139 Să se arate că:
1) Produsul vectorial al vectorilor $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$ şi $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3)$ din $\mathcal{V}_3$ este dat de

$$(\vec{a} \times \vec{b})^i = \varepsilon^i{}_{jk} a^j b^k.$$

2) Produsul mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c} = (c^1, c^2, c^3)$ este dat de

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

Exerciţiul 140 Să se verifice următoarele formule:

1) În dimensiune 2:

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon^{mn} = \delta_i^m\delta_j^n - \delta_i^n\delta_j^m$$
$$\varepsilon_{ij}\varepsilon^{in} = \delta_j^n$$
$$\varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} = 2$$

2) În dimensiune 3:

$$\varepsilon_{jmn}\varepsilon^{imn} = 2\delta_j^i$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = 6$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta_j^m\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^m$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_i^l & \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n \\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n \end{vmatrix}$$

3) În dimensiune n:

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\varepsilon^{j_1\ldots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \delta_{i_1}^{j_2} & \ldots & \delta_{i_1}^{j_n} \\ \delta_{i_2}^{j_1} & \delta_{i_2}^{j_2} & \ldots & \delta_{i_2}^{j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n}^{j_1} & \delta_{i_n}^{j_2} & \ldots & \delta_{i_n}^{j_n} \end{vmatrix}$$
$$\varepsilon_{i_1\ldots i_k\ i_{k+1}\ldots i_n}\varepsilon^{i_1\ldots i_k\ j_{k+1}\ldots j_n} = k! \begin{vmatrix} \delta_{i_{k+1}}^{j_{k+1}} & \delta_{i_{k+1}}^{j_{k+2}} & \ldots & \delta_{i_{k+1}}^{j_n} \\ \delta_{i_{k+2}}^{j_{k+1}} & \delta_{i_{k+2}}^{j_{k+2}} & \ldots & \delta_{i_{k+2}}^{j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n}^{j_{k+1}} & \delta_{i_n}^{j_{k+2}} & \ldots & \delta_{i_n}^{j_n} \end{vmatrix}$$
$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\varepsilon^{i_1\ldots i_n} = n!$$

Bibliografie

[1] **Appel, W.:** *Mathematics for Physics and Physicists.* Princeton University Press, 2007.

[2] **Arfken, G.B., Weber, H.J.**: *Essential Mathematical Methods for Physicists.* Elsevier Academic Press, 2003.

[3] **Arfken, G.B., Weber, H.J., Harris F.E.**: *Mathematical Methods for Physicists.* 7th ed. Elsevier Academic Press, 2013.

[4] **Chow, Tai L.:** *Mathematical Methods for Physicists.* Cambridge University Press, 2000.

[5] **Frankel, Th.:** *The geometry of physics: an introduction.* 3rd ed. Cambridge University Press, 2012.

[6] **Hassani, S.:** *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields.* 2nd ed. Springer, 2009.

[7] **Hassani, S.:** *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations.* 2nd ed. Springer, 2013.

[8] **Ion, I.D., Radu, N.:** *Algebra.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[9] **Jeevanjee, N.:** *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists.* 2nd ed. Birkhäuser, 2015.

[10] **Marcus, A.:** *Algebra.* Presa Universitară Clujeană, 2008.

[11] **Nearing, J.:** *Mathematical Tools for Physics.* classroom notes University of Miami, 2010.

[12] **Proskuryakov, I.V.:** *Problems in Linear Algebra.* Mir Publishers Moscow, 1978.

[13] **Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J.:** *Mathematical Methods for Physics and Engineering.* Cambridge University Press, 2006.

[14] **Schwichtenberg, J.:** *Physics from Symmetry.* Springer, 2015.

[15] **Susskind, L., Friedman, A.:** *The Theoretical Minimum: What You Need to Know to Start Doing Physics.* Vol. II, III. Basic Books, 2014, 2017.

[16] **Szekeres, P.:** *A course in modern mathematical physics.* Cambridge Univ. Press, 2004.

[17] **Woit, P.:** *Quantum Theory, Groups and Representations.* Springer, 2017.

Glosar