



UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Facultatea de Matematică și Informatică



Babeş-Bolyai University Cluj-Napoca
Faculty of Mathematics and Computer Science
400084 Cluj-Napoca, CP 253, Romania

Raport științific

privind implementarea proiectului

Transfer de Masă și Căldură în Nanofluide

(cod: PN-III-P4-ID-PCE-2016-0036)

in perioada iulie 2017 – septembrie 2019

Convecția fluidelor vâscoase, a nanofluidelor și a nanofluidelor hibride, au numeroase aplicații în inginerie, aerodinamică, sisteme geotermice, extracția petrolului, poluarea apelor, izolarea termică, schimbul de cădură, stocarea deșeurilor nucleare, construcții, agricultură, etc.

A. Nanofluidele

Sunt o clasă relativ nouă de fluide care constau dintr-o suspensie formată dintr-un fluid de bază și particule având dimensiunea de 1-100 nm. Termenul a fost introdus de Choi în 1995 la Argonne National Laboratory, USA.

Fluide de bază și nanoparticule

Fluide de bază

Apă, Etilenă, Petrol, etc.

Nanoparticule

Metal: Cu, Al, Ti, Zn, Ni, Fe

Carbides: SiC

Nitrides: AiN, SiN

Ne-metale: Graphite, Carbon Nanotubes, Diamond

Oxides: CuO, Al₂O₃, TiO₂, ZnO

Avantajele nanofluidelor

Comarate cu suspensiile conventionale solid-lichidutilizate la intensificarea trasferului de căldură, nanofluidele posedă, următoarele avantaje:

O suprafață specifica mai mare și, prin urmare, o suprafață mai mare pentru transferul de căldură dintre particule și fluidul de bază.

Dispersia mare, predominantă mișcării Browniene a particulelor nanofluidelor.

Reducerea aglomerării particulelor, în comparație cu amestecul conventional.

Ajustarea proprietăților fizice ale nanofluidelor, incluzând conductivitatea termică, prin variația concentrației particulelor nanofluide pentru diferite aplicații.

Aplicații ale Nanofluidelor

Aplicații pentru transferul de căldura

Aplicații industriale de răcire (industria americană poate reduce până la un miliard Btu de energie din 10-30 miliarde Btu pe an, poate reduce 5.6 milioane tone de dioxid de carbon, 8.600 tone NOx, 21.000 tone de dioxid de sulf, vezi Routbort et al., 2008).

Fluide nepoluante (Datorită absenței surselor de energie nepoluată, și multitudinea innstalațiilor bateriilor operaționale, precum telefoanele mobile și laptopuri, este esential să fie folosite nanofluidele. Ele pot fi folosite pentru controlul transferului de căldură, Das et al., 2008; Minkowycz et al., 2013; Shenoy et al., 2016).

Reactoare nucleare (Folosind nanofluide în locul apei (fluid de bază), barele de combustibil sunt acoperite cu nanoparticule precum alumina, evitând formarea stratului de vaporii în jurul barei și apoi crescând substanțial transferul de căldură, Das et al., 2008; Minkowycz et al., 2013; Shenoy et al., 2016).

Aplicații biomedicale:

Nanomedicamente (nanodispozitive ce livreaza si elibereaza tintit medicamentele, applications nanogeluri sau nanoparticule acoperite cu aur/argint)

Terapeutica cancerului (Această inițiativă implică folosirea nanoparticulelor feromagnetice împreuna cu tehnica iradierii)

Senzori si Imagistica (Aurul coloidal, este adesea considerat ca cel mai stabil coloid. Acesta este folosit pentru cataliza chimică, optică și imagistica).

Aplicații electronice (Nanofluidele pot fi folosite pentru răcirea procesoarelor calculatoarelor datorită conductivității lor ridicate. Se prevede, că generațiile viitoare de calculatoare vor produce un flux local de cădură de peste 10 MW/m, cu o putere totală de peste 300W. În combinație cu evaporarea stratului subțire, sisteme de tip heat pipe vor face posibilă reducerea fluxului de caldura cu peste 10 MW/m, făcând posibilă manevrarea disipației care provine de la tehologia viitoare).

Producerea nanoparticulelor

Metodă fizică

Metoda macinării, Condensația gazelor

Metodă chimică

Precipitarea Chimică, Depositarea Vaporizării, Emulsia Micro, etc.

Cercetarea în Nanofluid

Cercetare Experimentală

Proprietăți termice

Corelații pentru transferul de căldură

Cercetări Numerice

Nanofluid monofazice (Khanafar et al., 2003; Boungiorno, 2006; Tiwari & Das, 2007) nanofluid bi-fazice (Devi and Devi, 2016a,b; 2017)

B. Nanofluid Hibride

Așa după cum s-a arătat mai sus, nanofluidul posedă proprietăți reologice mai bune, dar, totuși, nu posedă toate caracteristicile esențiale pentru aplicații particulare. Multe aplicații practice reale, cer o performanță superioară a numeroaselor proprietăți/caracteristici ale nanofluidelor. De exemplu, oxidul de aluminiu (Al_2O_3) prezintă proprietăți chimice constante, dar posedă o conductivitate termică inferioară, în timp ce nanoparticulele metalice, precum aluminiul (Al), cuprul (Cu), argintul (Ag) au conductibilități termice superioare, dar sunt reactivi chimici instabili. Prin hibridizarea acestor nanoparticule metalice cu oxizi metalici, fluidul rezultat, numit nanofluid hibrid, posedă proprietăți termofizice și comportări reologice îmbunătățite. Nanofluidul hibrid, care conține suspensii omogene din două sau mai multe nanoparticule, având proprietăți fizice și chimice superioare nanofluidelor, formează un alt domeniu avansat pentru aplicațiile transferului de căldură.

Idea fundamentală din spatele nanofluidelor hibride este să se îmbunătățească transferul de căldură hidrodinamic și termofizic în comparație cu mononanofluidul, ca rezultat al efectului sinergic. Deoarece, domeniul nanofluidelor hibride este relativ nou, au fost elaborate și publicate puține studii până în prezent. Măsurători privind vâscozitatea și conductivitatea termică pentru nanofluidul hibrid $Al_2O_3 - Cu/apa$, a fost efectuată de Suresh et al. (2014). Acești autori, au ajuns la concluzia că toți parametrii nanofluidelor hibride, cresc cu creșterea volumului solid al nanoparticulelor. Totuși, câteva investigații numerice au fost recent elaborate și publicate privind nanofluidul hibrid, ca un concept nou al tehnologiei (a se vedea lista publicațiilor colectivului acestui grant).

Aplicații ale nanofluidelor hibride

Printre sursele existente de energie, energia solară este primară și prietenoasă cu mediul. Performanța colectoarelor solare, se îmbunătățește substanțial prin folosirea nanofluidelor, în schimbul fluidelor clasice (convenționale). Creșterea proprietăților termofizice ale nanofluidelor, face posibilă absorbția radiației solare. Nanofluidul hibrid, a atras atenția cercetătorilor, examinarea impactului

diferitelor compozitii de nanoparticule în diferite aplicații ale transferului de căldură, precum schimbatoarele de caldura, distilatoare, colectoare solare, boilere, microgeneratoare solare, etc.

În perioada iulie 2017 – septembrie 2019 au fost publicate în jurnale cotate ISI următoarele lucrări:

1. Sheremet M. A.; Revnic C.; Pop I., Natural convective heat transfer through two entrapped triangular cavities filled with a nanofluid: Buongiorno's mathematical model
INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCES Volume: 133 Pages: 484-494,
NOV 2017, WOS: 000415770300041
2. Amani Mohammad, Amani Pouria, Kasaeian Alibakhsh, Mahian Omid, Pop Ioan, Wongwises Somchai, Modeling and optimization of thermal conductivity and viscosity of $MnFe_2O_4$ nanofluid under magnetic field using an ANN, SCIENTIFIC REPORTS Volume: 7 Article Number: 17369 DOI: 10.1038/s41598-017-17444-5 Published: DEC 12 2017, WOS: 000417683800011.
3. Revnic, Cornelia, Abu-Nada, Eiyad, Grosan, Teodor, Pop, Ioan, Natural convection in a rectangular cavity filled with nanofluids: Effect of variable viscosity, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 6 Pages: 1410-1432 DOI: 10.1108/HFF-06-2017 Published: 2018, WOS: 000441017200009.
4. Izadi Mohsen, Mohebbi Rasul, Chamkha, A., Pop Ioan, Effects of cavity and heat source aspect ratios on natural convection of a nanofluid in a C-shaped cavity using Lattice Boltzmann method, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 8 Pages: 1930-1955 DOI: 10.1108/HFF-03-2018-0110, Published: 2018, WOS: 000447730300010.
5. Pop Ioan, Rosca, Natalia C., Rosca, Alin V., MHD stagnation-point flow and heat transfer of a nanofluid over a stretching/shrinking sheet with melting, convective heat transfer and second-order slip, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 9 Pages: 2089-2110 DOI: 10.1108/HFF-12-2017-0488, Published: 2018, WOS: 000447751900007.
6. Borrelli Alessandra, Giancesio Giulia, Patria Maria Cristina, Rosca, Natalia C., Rosca, Alin V., Pop Ioan, Influence of temperature and magnetic field on the oblique stagnation-point flow for a nanofluid past a vertical stretching/shrinking sheet, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 12 Pages: 2874-2894 DOI: 10.1108/HFF-12-2017-0497, Published: 2018, WOS: 000448741100008
7. Armaghani Taher, Kasaeipoor, A., Izadi Mohsen, Pop Ioan, MHD natural convection and entropy analysis of a nanofluid inside T-shaped baffled enclosure, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 12 Pages: 2916-2941 DOI: 10.1108/HFF-02-2018-0041, Published: 2018, WOS: 000448741100010.
8. Sheremet M. A., Pop I., Mahian O., Natural convection in an inclined cavity with time-periodic temperature boundary conditions using nanofluids: Application in solar collectors.
INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER Volume: 116 Pages: 751-761 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.070 Published: JAN 2018, WOS: 000415391800066
9. Sheremet Mikhail A., Pop Ioan, Rosca Alin V., The influence of thermal radiation on unsteady free convection in inclined enclosures filled by a nanofluid with sinusoidal boundary conditions, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW

Volume: 28 Issue: 8 Pages: 1738-1753 DOI: 10.1108/HFF-09-2017-0375, Published: 2018, WOS: 000447730300001.

10. Zargartalebi H., Ghalambaz M., Chamkha A., Pop Ioan, Nezhad Amir Sanati, Fluid-structure interaction analysis of buoyancy-driven fluid and heat transfer through an enclosure with a flexible thin partition, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 9 Pages: 2072-2088 DOI: 10.1108/HFF-09-2017-0348, Published: 2018, WOS: 000447751900006.
11. Jusoh R., Nazar R., Pop I., Three-dimensional flow of a nanofluid over a permeable stretching/shrinking surface with velocity slip: A revised model, PHYSICS OF FLUIDS Volume: 30 Issue: 3 Article Number: 033604 DOI: 10.1063/1.5021524, Published: MAR 2018, WOS: 000428930500043.
12. Naganthran Kohilavani, Nazar Roslinda, Pop Ioan, Effects of Thermal Radiation on Mixed Convection Flow over a Permeable Vertical Shrinking Flat Plate in an Oldroyd-B Fluid, SAINS MALAYSIANA Volume: 47 Issue: 5 Pages: 1069-1076 DOI: 10.17576/jsm-2018-4705-25 Published: MAY 2018, WOS: 000435559100025
13. Armaghani T., Esmaeili H., Mohammadpoor Y. A., Pop I., MHD mixed convection flow and heat transfer in an open C-shaped enclosure using water-copper oxide nanofluid, HEAT AND MASS TRANSFER Volume: 54 Issue: 6 Pages: 1791-1801 DOI: 10.1007/s00231-017-2265-3 Published: JUN 2018, WOS:000431907800019
14. Jahan Shah, Sakidin Hamzah, Nazar Roslinda, Pop Ioan, Unsteady flow and heat transfer past a permeable stretching/shrinking sheet in a nanofluid: A revised model with stability and regression analyses, JOURNAL OF MOLECULAR LIQUIDS Volume: 261 Pages: 550-564 DOI: 10.1016/j.molliq.2018.04.041 Published: JUL 2018, WOS: 000436222000057.
15. Jahan Shah, Sakidin Hamzah, Nazar Roslinda, Pop Ioan, Analysis of heat transfer in nanofluid past a convectively heated permeable stretching/shrinking sheet with regression and stability analyses, RESULTS IN PHYSICS Volume: 10 Pages: 395-405 DOI: 10.1016/j.rinp.2018.06.021, Published: SEP 2018, WOS: 000443868900066
16. Awaludin Izyan Syazana, Ishak Anuar, Pop Ioan, On the Stability of MHD Boundary Layer Flow over a Stretching/Shrinking Wedge, SCIENTIFIC REPORTS Volume: 8 Article Number: 13622 DOI: 10.1038/s41598-018-31777-9, Published: SEP 11 2018, WOS: 000444279000028
17. Sheremet Mikhail A., Pop Ioan, Effect of local heater size and position on natural convection in a tilted nanofluid porous cavity using LTNE and Buongiorno's model, JOURNAL OF MOLECULAR LIQUIDS Volume: 266 Pages: 19-28 DOI: 10.1016/j.molliq.2018.06.065 Published: SEP 15 2018, WOS: 000442976500003
18. Nayak, R. K., Bhattacharyya, S., Pop, I., Effects of nanoparticles dispersion on the mixed convection of a nanofluid in a skewed enclosure, INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER Volume: 125 Pages: 908-919, Published: OCT 2018, WOS: 000440118600078.
19. Sheremet, M. A., Trimbilas, R., Grosan, T., Pop, I., Natural convection of an alumina-water nanofluid inside an inclined wavy-walled cavity with a non-uniform heating using Tiwari and Das' nanofluid model, APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS-ENGLISH EDITION Volume: 39 Issue: 10 Pages: 1425-1436 DOI: 10.1007/s10483-018-2377-7 Published: OCT 2018, WOS: 000445268100004.
20. Grosan Teodor, Sheremet Mikhail A., Pop Ioan, Pop Serban Rares, Double-Diffusive Natural Convection in a Differentially Heated Wavy Cavity Under Thermophoresis Effect, JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER Volume: 32 Issue: 4 Pages: 1045-1058 DOI: 10.2514/1.T5389 Published: OCT 2018, WOS: 000448732900020.
21. Rostami, Mohammadreza Nademi, Dinarvand, Saeed, Pop, Ioan, Dual solutions for mixed convective stagnation-point flow of an aqueous silica-alumina hybrid nanofluid, CHINESE

- JOURNAL OF PHYSICS Volume: 56 Issue: 5 Pages: 2465-2478 DOI: 10.1016/j.cjph.2018.06.013, Published: OCT 2018, WOS: 000449093900066.
22. Lok, Y. Y., Merkin, J. H., Pop, I., Axisymmetric rotational stagnation-point flow impinging on a permeable stretching/shrinking rotating disk, EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS B-FLUIDS Volume: 72 Pages: 275-292 DOI: 10.1016/j.euromechflu.2018.05.013 Published: NOV-DEC 2018 WOS: 000447570200022.
 23. Jusoh, Rahimah, Nazar, Roslinda, Pop, Ioan, Magnetohydrodynamic rotating flow and heat transfer of ferrofluid due to an exponentially permeable stretching/shrinking sheet, JOURNAL OF MAGNETISM AND MAGNETIC MATERIALS Volume: 465 Pages: 365-374 DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.06.020 Published: NOV 1 2018 WOS: 000446439300052.
 24. Soid, Siti Khuzaimah, Ishak, Anuar, Pop, Ioan, MHD Stagnation-Point Flow over a Stretching/Shrinking Sheet in a Micropolar Fluid with a Slip Boundary SAINS MALAYSIANA Volume: 47 Issue: 11 Pages: 2907-2916 DOI: 10.17576/jsm-2018-4711-34 Published: NOV 2018, WOS: 000453579300034.
 25. Merkin, J. H., Pop, I., Stagnation point flow past a stretching/shrinking sheet driven by Arrhenius kinetics, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION Volume: 337 Pages: 583-590 DOI: 10.1016/j.amc.2018.05.024, Published: NOV 15 2018, WOS: 000439036700045.
 26. Sheremet, Mikhail A., Rosca, Natalia C., Rosca, Alin V.), Pop, Ioan, Mixed convection heat transfer in a square porous cavity filled with a nanofluid with suction/injection effect, COMPUTERS & MATHEMATICS WITH APPLICATIONS Volume: 76 Issue: 11-12 Pages: 2665-2677 DOI: 10.1016/j.camwa.2018.08.069, Published: DEC 1 2018, WOS: 000451358900008.
 27. Lok, Yian Yian, Ishak, Anuar, Pop, Ioan, Oblique stagnation slip flow of a micropolar fluid towards a stretching/shrinking surface: A stability analysis CHINESE JOURNAL OF PHYSICS Volume: 56 Issue: 6 Pages: 3062-3072 DOI: 10.1016/j.cjph.2018.10.016 Published: DEC 2018, WOS: 000452305200043.
 28. Anuar, Nur Syazana, Bachok, Norfifah, Pop, Ioan, A Stability Analysis of Solutions in Boundary Layer Flow and Heat Transfer of Carbon Nanotubes over a Moving Plate with Slip Effect, ENERGIES Volume: 11 Issue: 12 Article Number: 3243 DOI: 10.3390/en11123243 Published: DEC 2018, WOS: 000455358300004.
 29. Jusoh, Rahimah, Nazar, Roslinda, Pop, Ioan, Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow and Heat Transfer of Nanofluids Past a Bidirectional Exponential Permeable Stretching/Shrinking Sheet With Viscous Dissipation Effect, JOURNAL OF HEAT TRANSFER-TRANSACTIONS OF THE ASME Volume: 141 Issue: 1 Article Number: 012406 DOI: 10.1115/1.4041800 Published: JAN 2019, WOS: 000451391300017.
 30. Rosca, Alin V., Rosca, Natalia C., Pop, Ioan, Stagnation point flow of a nanofluid past a non-aligned stretching/shrinking sheet with a second-order slip velocity, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 29 Issue: 2 Pages: 738-762 DOI: 10.1108/HFF-05-2018-0201 Published: 2019, WOS: 000459562500016.
 31. Shahriari, Alireza, Ashorynejad, Hamid Reza, Pop, Ioan, Entropy generation of MHD nanofluid inside an inclined wavy cavity by lattice Boltzmann method JOURNAL OF THERMAL ANALYSIS AND CALORIMETRY Volume: 135 Issue: 1 Pages: 283-303 DOI: 10.1007/s10973-018-7061-x Published: JAN 2019, WOS: 000459206500021.
 32. Sheremet, Mikhail A., Pop, Ioan, Marangoni natural convection in a cubical cavity filled with a nanofluid Buongiorno's nanofluid model, JOURNAL OF THERMAL ANALYSIS AND CALORIMETRY Volume: 135 Issue: 1 Pages: 357-369 DOI: 10.1007/s10973-018-7069-2 Published: JAN 2019, WOS: 000459206500025.
 33. Dogonchi, A. S., Sheremet, M. A., Ganji, D. D., Pop, I., Free convection of copper-water nanofluid in a porous gap between hot rectangular cylinder and cold circular cylinder under the

- effect of inclined magnetic field, *JOURNAL OF THERMAL ANALYSIS AND CALORIMETRY* Volume: 135 Issue: 2 Pages: 1171-1184 DOI: 10.1007/s10973-018-7396-3 Published: JAN 2019, WOS: 000459515100023.
34. Kamal, Fatinnabila, Zaimi, Khairy, Ishak, Anuar, Pop, Ioan, Stability Analysis of MHD Stagnation-point Flow towards a Permeable Stretching/Shrinking Sheet in a Nanofluid with Chemical Reactions Effect, *SAINS MALAYSIANA* Volume: 48 Issue: 1 Pages: 243-250 DOI: 10.17576/jsm-2019-4801-28 Published: JAN 2019, WOS: 000459984200028
 35. Rana, Puneet, Shukla, Nisha, Gupta, Yogesh, Pop, Ioan, Analytical prediction of multiple solutions for MHD Jeffery-Hamel flow and heat transfer utilizing KKL nanofluid model, *PHYSICS LETTERS A* Volume: 383 Issue: 2-3 Pages: 176-185 DOI: 10.1016/j.physleta.2018.10.026, Published: JAN 12 2019, WOS: 000451654800013
 36. Rahman, M. M., Pop, I., Saghir, M. Z., Steady free convection flow within a titled nanofluid saturated porous cavity in the presence of a sloping magnetic field energized by an exothermic chemical reaction administered by Arrhenius kinetics, *INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER* Volume: 129 Pages: 198-211 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.105 Published: FEB 2019 WOS:000453113500017
 37. Mahian Omid, Kolsi Lioua, Amani Mohammad, Estelle Patrice, Ahmadi Goodarz, Kleinstreuer Clement, Marshalli Jeffrey S., Siavashi Majid, Taylor Robert, Niazmand Hamid, Wongwises Somchai, Hayat Tasawar, Kolanjiyil Arun, Kasaeian, Alibakhsh, Pop Ioan, Recent advances in modeling and simulation of nanofluid flows-Part I: Fundamentals and theory, *PHYSICS REPORTS-REVIEW SECTION OF PHYSICS LETTERS* Volume: 790 Pages: 1-48 DOI: 10.1016/j.physrep.2018.11.004 Published: FEB 3 2019, WOS: 000459949000001.
 38. Mahian Omid, Kolsi Lioua, Amani Mohammad, Estelle Patrice, Ahmadi Goodarz, Kleinstreuer Clement, Marshalli Jeffrey S., Siavashi Majid, Taylor Robert, Niazmand Hamid, Wongwises Somchai, Hayat Tasawar, Kolanjiyil Arun, Kasaeian, Alibakhsh, Pop Ioan, Recent advances in modeling and simulation of nanofluid flows-Part II: Applications, *PHYSICS REPORTS-REVIEW SECTION OF PHYSICS LETTERS* Volume: 791 Pages: 1-59 DOI: 10.1016/j.physrep.2018.11.003 Published: FEB 13 2019, WOS: 000459949100001
 39. Esmaili Hossein, Armaghani T., Abedini A., Pop I., Turbulent combined forced and natural convection of nanofluid in a 3D rectangular channel using two-phase model approach, *JOURNAL OF THERMAL ANALYSIS AND CALORIMETRY* Volume: 135 Issue: 6 Pages: 3247-3257 DOI: 10.1007/s10973-018-7471-9 Published: MAR 2019, WOS: 000462553400033.
 40. Jamaludin Anuar, Nazar Roslinda, Pop Ioan, Mixed Convection Stagnation-Point Flow of a Nanofluid Past a Permeable Stretching/Shrinking Sheet in the Presence of Thermal Radiation and Heat, *ENERGIES* Volume: 12 Issue: 5 Article Number: 788 DOI: 10.3390/en12050788 Published: MAR 1 2019, WOS: 000462646700021.
 41. Armaghani Taher, Ismael Muneer A., Chamkha, Ali J., Pop Ioan, Mixed Convection and Entropy Generation of an Ag-Water Nanofluid in an Inclined L-Shaped Channel *ENERGIES*, Volume 12, Issue 6, DOI: 10.3390/en12061150, Published MAR 2019, WOS: 000465616800105.
 42. Jafarimoghaddam Amin, Pop Ioan, Numerical modeling of Glauert type exponentially decaying wall jet flows of nanofluids using Tiwari and Das' nanofluid model, *INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW*, Volume 29, Issue 3, Pages: 1010-1038 DOI: 10.1108/HFF-08-2018-0437, Published MAR 4 2019, WOS: 000459458100009.
 43. Abu-Nada Eiyad, Pop Ioan, Mahian Omid, A dissipative particle dynamics two-component nanofluid heat transfer model: Application to natural convection *INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER* Volume: 133 Pages: 1086-1098 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.151, Published APR 2019, WOS: 000460710100096.

44. Khashi'ie Najiyah Safwa, Arifin Norihan Md, Nazar Roslinda, Hafidzuddin Ezad Hafidz, Wahi Nadiyah, Pop Ioan, A Stability Analysis for Magnetohydrodynamics Stagnation Point Flow with Zero Nanoparticles Flux Condition and Anisotropic Slip, ENERGIES Volume: 12 Issue: 7 Article Number: 1268 DOI: 10.3390/en12071268 Published APR 1 2019, WOS: 000465561400085.
45. Izadi Mohsen, Maleki Nemat M., Pop Ioan), Mehryan, S. A. M, Natural convection of a hybrid nanofluid subjected to non-uniform magnetic field within porous medium including circular heater, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 29 Issue: 4 Pages: 1211-1231 DOI: 10.1108/HFF-08-2018-0428, Published APR 1 2019, WOS: 000482282000002.
46. Revnic Cornelia, Ghalambaz Mohammad, Grosan Teodor, Sheremet Mikhail, Pop Ioan, Impacts of Non-Uniform Border Temperature Variations on Time-Dependent Nanofluid Free Convection within a Trapezium: Buongiorno's Nanofluid Model, ENERGIES Volume: 12 Issue: 8 Article Number: 1461 DOI: 10.3390/en12081461 Published APR 2 2019, WOS: 000467762600054.
47. Jafarimoghaddam Amin, Pop I.), Merkin J. H., On the propagation of the non-similar wall jet flows with suction/injection, EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL PLUS Volume: 134 Issue: 5 Article Number: 215 DOI: 10.1140/epjp/i2019-12647-5 Published MAY 2019, WOS: 000468219300006.
48. Waini Iskandar, Ishak Anuar, Pop Ioan, Unsteady flow and heat transfer past a stretching/shrinking sheet in a hybrid nanofluid, INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER Volume: 136 Pages: 288-297 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.02.101, Published: JUN 2019, WOS: 000467195600024.
49. Jafarimoghaddam Amin, Merkin J. H., Pop I, Mixed Convection Boundary Layer Flow on a Vertical Surface in a Saturated Porous Medium: New Perturbation Solutions, TRANSPORT IN POROUS MEDIA Volume: 128 Issue: 2 Pages: 741-753 DOI: 10.1007/s11242-019-01268-0 Published: JUN 2019, WOS: 000467699200017.
50. Mikhailenko, S. A., Sheremet, M. A., Pop, I., Convective heat transfer in a rotating nanofluid cavity with sinusoidal temperature boundary condition, JOURNAL OF THERMAL ANALYSIS AND CALORIMETRY Volume: 137 Issue: 3 Pages: 799-809 DOI: 10.1007/s10973-018-7984-2 Published: AUG 2019, WOS:000473246100008.
51. Waini, I., Ishak, A., Pop, I., On the stability of the flow and heat transfer over a moving thin needle with prescribed surface heat flux, CHINESE JOURNAL OF PHYSICS Volume: 60 Pages: 651-658 DOI: 10.1016/j.cjph.2019.06.008 Published: AUG 2019 WOS:000481616100057
52. Pal, S. K., Bhattacharyya, S., Pop, I., A numerical study on non-homogeneous model for the conjugate-mixed convection of a Cu-water nanofluid in an enclosure with thick wavy wall, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION Volume: 356 Pages: 219-234 DOI: 10.1016/j.amc.2019.03.008 Published: SEP 1 2019, WOS:000464931100016
53. Waini, I., Ishak, A., Pop, I., Flow and heat transfer along a permeable stretching/shrinking curved surface in a hybrid nanofluid, PHYSICA SCRIPTA Volume: 94 Issue: 10 Article Number: 105219 DOI: 10.1088/1402-4896/ab0fd5 Published: OCT 2019, WOS:000480328600001
54. Merkin, J.H., Lok, Y.Y., Pop, I., On an equation arising in natural convection boundary layer flow in a porous medium ZEITSCHRIFT FUR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND PHYSIK Volume: 70 Issue: 5 Article Number: 143 DOI: 10.1007/s00033-019-1187-y Published: OCT 2019, WOS:000483469500001

În perioada iulie 2017 – septembrie 2019 s-au prezentat la conferinte:

1. Natalia C. Rosca, *Cost Action CA15119 (NANOUP TAKE) for the 2nd Grant Period* (Lisbon, Portugal, 9 to 12 October 2017), where she has presented the paper: Axisymmetric rotational stagnation point flow impinging radially a permeable stretching/shrinking surface in a nanofluid using Tiwari and Das model.
2. Alin V. Rosca, *Cost Action CA15119 (NANOUP TAKE) for the 2nd Grant Period* (Lisbon, Portugal, 9 to 12 October 2017), where he has presented the paper: MHD oblique stagnation-point flow for a Boussinesquian nanofluid past a stretching/shrinking sheet using Buongiorno's model.
3. Mikhail A. Sheremet and Ioan Pop, Transient free convection in an inclined square porous cavity filled with a nanofluid using LTNE and Buongiorno's models. *11th International Conference on Computational Heat, Mass and Momentum Transfer*, Cracow, Poland, 21 - 24 May, 2018.
4. I. Pop and M.A. Sheremet, Turbulent natural convection combined with entropy generation in a nanofluid cavity with non-uniformly heated side walls. *2nd International Conference on Applied & Industrial Mathematics and Statistics (CoAIMS-2019)*, 23 - 25 July, 2019, Universiti Malaysia Pahang, Malaysia.
5. Stepan Mikhailenko, Mikhail A. Sheremet and Ioan Pop, Natural convection combined with surface radiation in a rotating cavity with an element of variable volumetric heat generation. *International Conference on Computational Heat and Mass Transfer (ICCHMT)*, 03-06 September, 2019, Rome, Italy.

Invited lectures

1. I. Pop, Convective flow in nanofluids and hybrid nanofluids: application to stretching/shrinking surfaces. *2nd International Conference on Applied & Industrial Mathematics and Statistics (CoAIMS-2019)*, 23 to 25 July, 2019, Universiti Malaysia Pahang, Malaysia.
2. I. Pop, Nanofluids and hybrid nanofluids with applications, *Symposium on multidisciplinary science*, 31st July, 2019, University Putra Malaysia, Malaysia.

Lucrări reprezentative:

Sheremet M. A., Pop I., Mahian O., Natural convection in an inclined cavity with time-periodic temperature boundary conditions using nanofluids: Application in solar collectors. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER Volume: 116 Pages: 751-761 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.070 Published: JAN 2018, WOS: 000415391800066

În această lucrare se studiază numeric convecția naturală a alumina-apă nanofluid în interiorul unei cavități patrute cu temperatură sinusoidală dependentă de timp. Domeniul de interes este o cavitare pătrată având peretele $\bar{x} = L$ menținut la o temperatură constantă, în timp ce temperatura peretelui $\bar{x} = 0$ este o funcție sinusoidală de timp, ceilalți doi pereți fiind adiabatici. Ecuațiile adimensionale ale problemei, formulate folosind funcția de curent, rotaționalul și temperatura sunt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = H_1 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + H_2 \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\alpha) \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{H_3}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

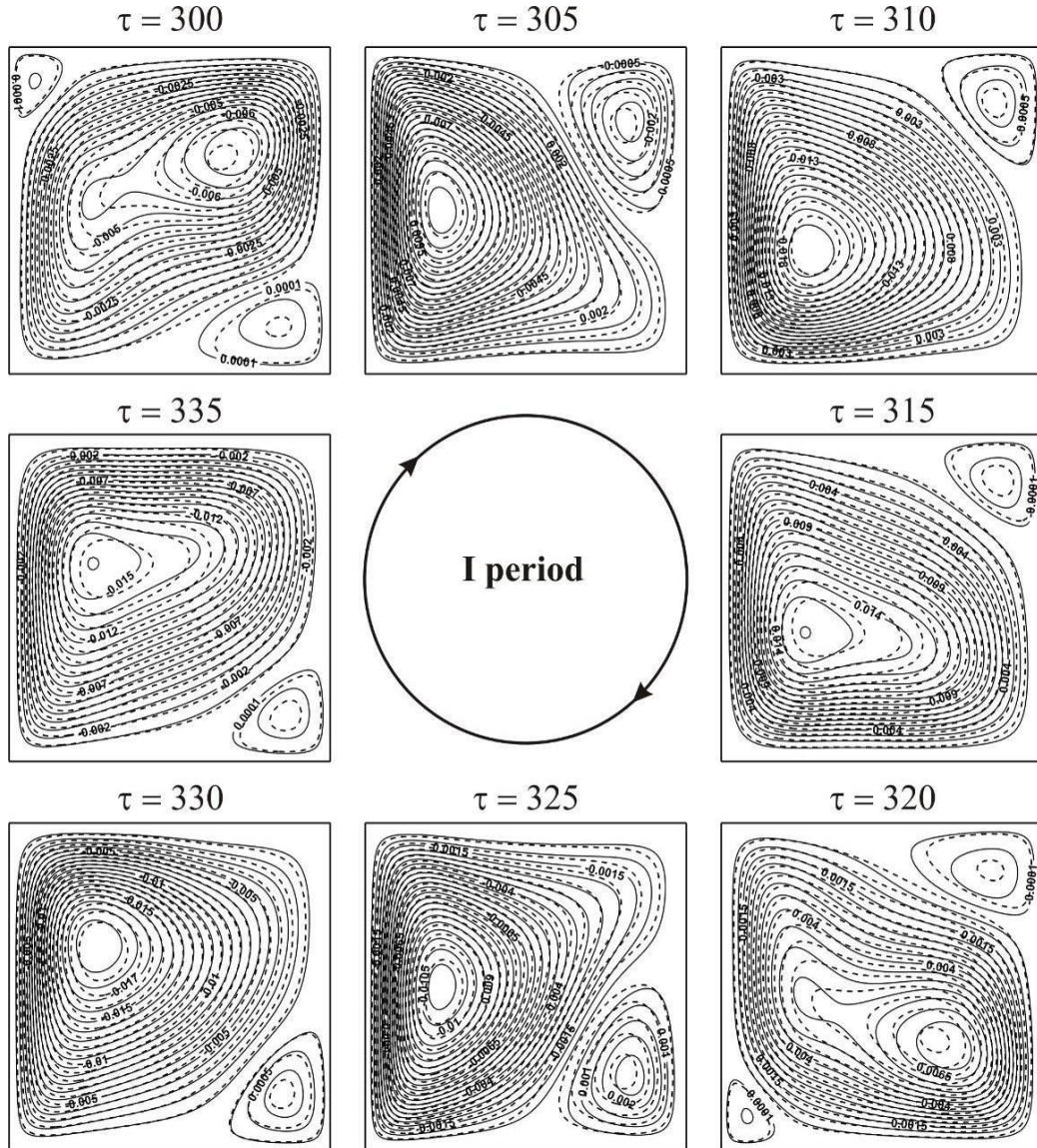


Fig. 1. Liniile de current pentru o perioadă de oscilație pentru $Ra = 10^5$, $f = 0.05\pi$, $\alpha = 0$ și $\phi = 0.0$ (liniile continue), $\phi = 0.03$ (liniile punctate).

împreună cu condițiile la limită

$$\tau = 0: \psi = 0, \omega = 0, \theta = 0.5 \text{ at } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$\tau > 0: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \theta = \sin(f\tau) \text{ at } x = 0, 0 \leq y \leq 1;$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \theta = 0 \text{ at } x = 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, 1, 0 \leq x \leq 1$$

(4)

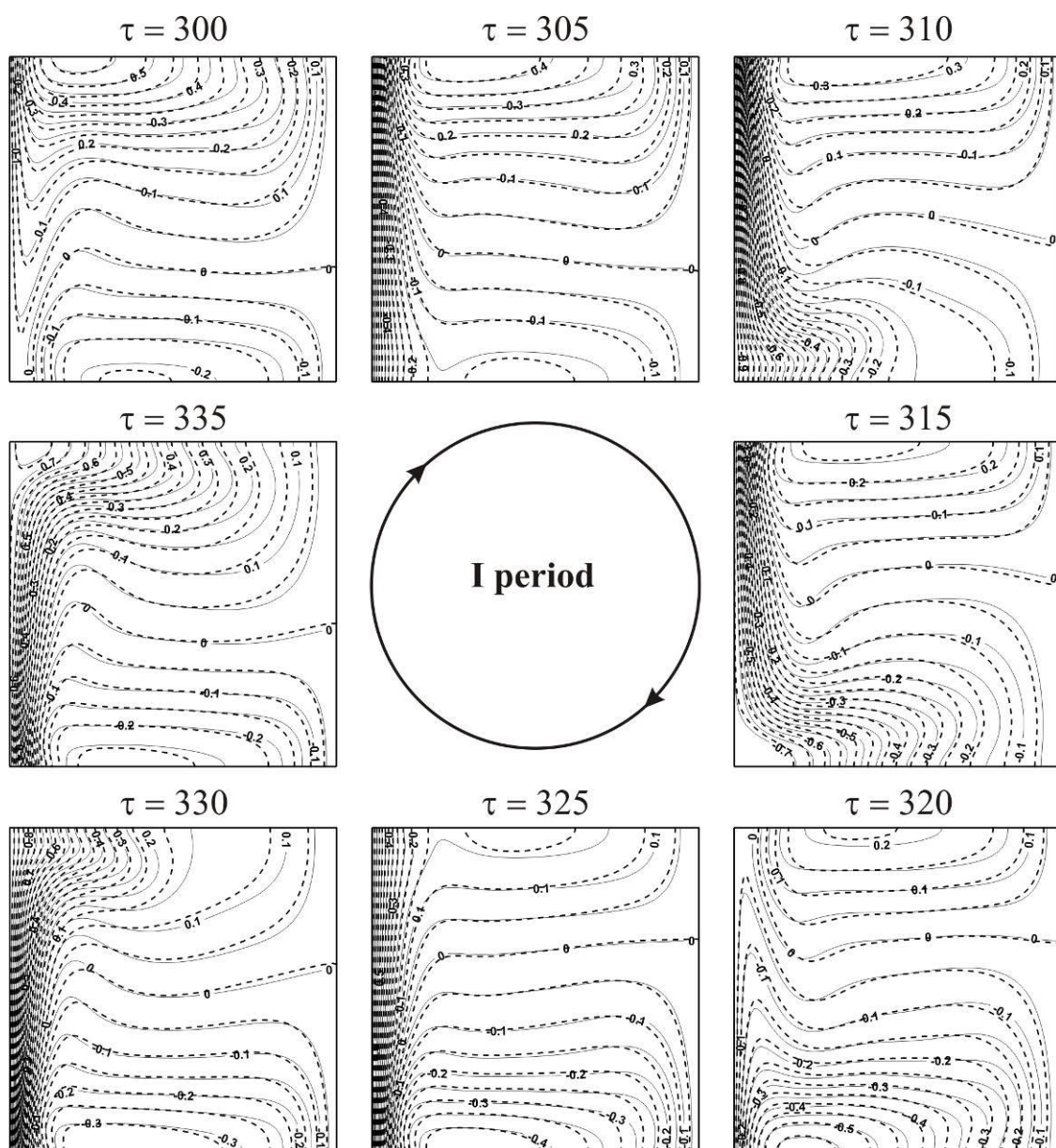


Fig. 2. Liniile isoterme pentru o perioadă de oscilație pentru $Ra = 10^5$, $f = 0.05\pi$, $\alpha = 0$ și $\phi = 0.0$ (liniile continue), $\phi = 0.03$ (liniile punctate).

În scopul determinării transferului total de căldură de la peretele vertical stâng al cavității cu ajutorul numărului local Nusselt $Nu = (k_{nf} / k_f)(-\partial\theta / \partial x)_{x=0}$. Astfel, numărul lui Nusselt mediat \overline{Nu} este

$$\text{definit de } \overline{Nu} = \int_0^1 Nu \, dy.$$

Ecuațiile (1)–(3), împreună cu condițiile la limită (4) au fost rezolvate numeric folosind metoda diferențelor finite de ordinul doi (Sheremet and Pop, 2015; Sheremet et al. 2014,2015). În scopul validării prezentei metode numerice, ea a fost comparată cu rezultatele experimentale (Ho et al., 2010) și numerice (Saghir et al., 2016). Valorile lui \overline{Nu} pentru $\phi = 1\%$, $Ra = 7.74547 \times 10^7$ și $Pr = 7.0659$ sunt: 32.2037 (Ho et al., 2010) și 30.657 (Shagir et al., 2016). Se poate vedea, astfel, că rezultatele obținute în prezenta lucrare, demonstrează că ele sunt corecte. Liniile de current și izoterme sunt prezentate în Fig. 1 și 2 pentru $Ra = 10^5$, $f = 0.05\pi$, $\alpha = 0$ cu $\phi = 0.03$.

Revnice, Cornelia, Abu-Nada, Eiyad, Grosan, Teodor, Pop, Ioan, Natural convection in a rectangular cavity filled with nanofluids: Effect of variable viscosity, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 6 Pages: 1410-1432 DOI: 10.1108/HFF-06-2017 Published: 2018, WOS: 000441017200009

Considerăm o mișcare liberă într-o cavitate pătrată umplută cu nanofluidul CuO-apă. Notăm lungimea și lățimea cavității prin H , respectiv, W . Peretele stâng este încălzit și menținut la temperatură constantă T_H , iar peretele drept este răcit și menținut la temperatură constantă T_C unde

$T_H > T_C$, și pereții de sus și de jos sunt considerați adiabatici. Fluxul nanoparticulelor este

$$j_p = -\left(\rho_p D_B \nabla \bar{\varphi} + \rho_p D_T \frac{\nabla T}{T_C}\right) \text{ considerat zero pe pereții cavității. Difuzivitatea termică, densitatea}$$

și capacitatea de căldură a nanofluidului sunt date de:

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}, \quad \rho_{nf} = (1 - \phi_b)\rho_f + \phi_b \rho_p, \quad (\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi_b)(\rho C_p)_f + \phi_b (\rho C_p)_p \quad (1)$$

unde b este concentrația de volum medie a nanoparticulelor din interiorul cavității. Conductivitatea termică efectivă a nanofluidului k_{nf} este exprimată după modelul:

$$\frac{k_{nf}}{k_{bf}} = 1 + 64.7 \phi_b^{0.7640} \left(\frac{d_{bf}}{d_p}\right)^{0.3690} \left(\frac{k_{bf}}{k_p}\right)^{0.7476} Pr_T^{0.9955} Re^{1.2321} \quad (2)$$

unde Pr_T și Re sunt definite ca $Pr_T = \frac{\mu_f}{(\rho\alpha)_f}$, $Re = \frac{\rho_f k_b T}{3\pi\mu_f^2 l_f}$

Ecuțiile adimensionale ce guvernează mișcarea nanofluidului sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = K_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] + K_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + 4K_1 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ + K_1 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + K_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = L_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \\ + L_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + L_3 \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{Pr}{Sc} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{N_{BT}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (6)$$

Considerăm condițiile limită pentru aceste ecuații

$$1- \text{ Pe peretele cald } x=0: \quad \psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta = 1, \quad J_p = 0$$

$$2- \text{ Pe peretele rece } x=1: \quad \psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta = 0, \quad J_p = 0 \quad (7)$$

$$3- \text{ Pe pereții de sus și de jos } y=1 \text{ and } y=0: \quad \psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad J_p = 0$$

Considerăm pentru primul exemplu următoare expresie a vâscozității $\bar{\mu}_{CuO}(\bar{\varphi}, T)$ în formă adimensională.

$$\begin{aligned} \mu_{CuO}(\varphi, T) = -0.6967 + \frac{15.937}{T_C + \Delta T \theta} + 1.238 \varphi_b \phi + \frac{1356.14}{(T_C + \Delta T \theta)^2} - 0.259 \varphi_b^2 \phi^2 \\ - 30.88 \frac{\varphi_b \phi}{T_C + \Delta T \theta} - \frac{19652.74}{(T_C + \Delta T \theta)^3} + 0.01593 \varphi_b^3 \phi^3 + 4.38206 \frac{\varphi_b^2 \phi^2}{T_C + \Delta T \theta} \\ + 147.573 \frac{\varphi_b \phi}{(T_C + \Delta T \theta)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

respectiv, pentru al doilea exemplu,

$$\ln \mu_{\text{CuO}}(\varphi, T) = A \left(\frac{1}{T_c + \Delta T \theta} \right) - B, \quad (9)$$

unde $A = 20587\varphi_b^2\phi + 15857\varphi_b\phi + 1078.3$ și $B = -107.12\varphi_b^2\phi + 53.548\varphi_b\phi + 2.8715$

Transferul de căldură este dat de numărul lui Nuselt și a lui Sherwood mediu prin

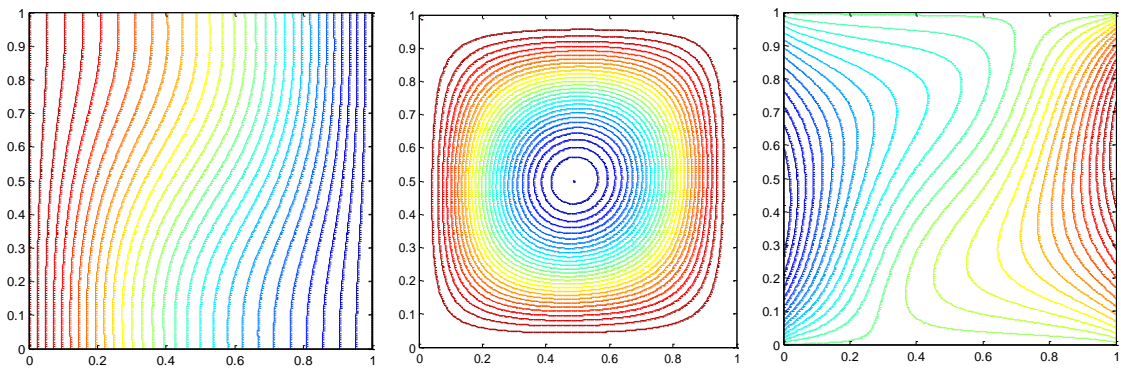
$$Nu_{\text{avg}} = \int_0^1 Nu(y)dy, \quad Sh_{\text{avg}} = \int_0^1 Sh(y)dy \quad (10)$$

Folosim schema diferențelor finite centrale pentru a rezolva ecuațiile diferențiale parțiale împreună cu condițiile la limită. Sistemul algebric obținut după discretizare a fost rezolvat folosind iterația Gauss-Seidel pentru grid uniform. Conform analizei dependenței de rețea am decis ca rețeaua având 150x150 puncte este potrivită pentru această problemă și următorul criteriu a fost folosit pentru a

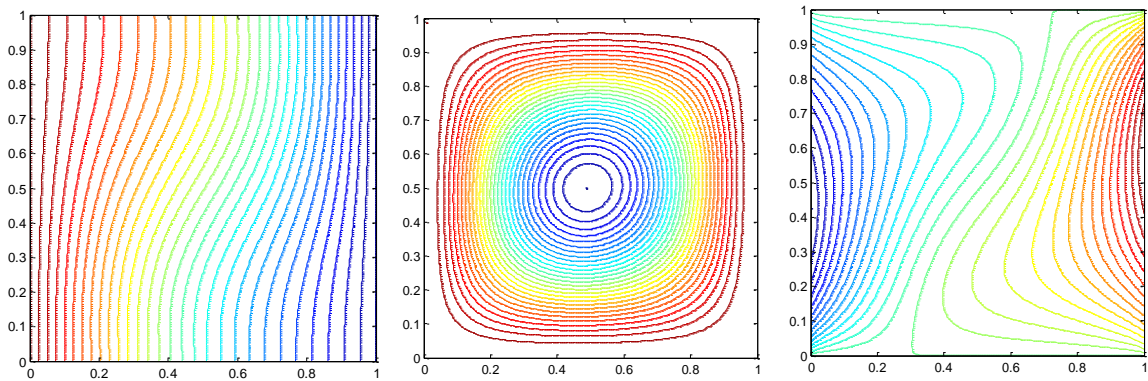
verifica convergența acestei metode $\frac{\|\Theta^{\text{new}} - \Theta^{\text{old}}\|}{\|\Theta^{\text{new}}\|} \leq \delta$ unde Θ este una din variabilele ω, ψ, θ

sau ϕ , și δ este eroarea prescrisă, cedepinde de valorile parametrilor ce guvernează mișcarea și are valoarea 10^{-8} . Valorile parametrilor ce intervin în rezolvarea ecuațiilor guvernante împreună cu condițiile la limită sunt numărul lui $Ra = 10^3, 10^4$ și 10^5 , fracția de volum $\varphi_b = 0.02$ și 0.05 iar diferența de temperatură între peretele cald și rece este fixate la $10^0 C$. Temperatura peretelui rece și cald este luată ca $T_c = 22^0 C, 40^0 C, 70^0 C$ și $T_h = 32^0 C, 50^0 C, 80^0 C$.

Influența fracției de volum φ_b asupra izotermelor, liniilor de current și concentrației de volum pentru vîscozitatea dinamică a nanofluidului și pentru temperatura peretelui egală cu $T_h = 32^0 C$ și $T_c = 22^0 C$ sunt afișate în Fig. 1. Se observă că atunci când convecția este în domeniul $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ transferul de căldură de la peretele cald la peretele rece crește. De asemenea, mișcarea fluidului crește iar imaginea concentrației de volum ϕ este puternic modificată de distribuția temperaturii. Mai mult, pentru $Ra = 10^3$ se formează un singur vortex central al liniilor de current (Fig. 1) în timp ce pentru $Ra = 10^5$ acestea prezintă două vortex-uri (Fig. 2). După cum se vede din Fig. 2, are loc un transport energetic mare de nanoparticule. În plus, pentru toate valorile lui Ra , vortex-ul central al liniilor de current se rotesc în sensul acelor de ceasornic pe măsură ce fracția de volum φ_b crește. Grosimea stratului limită crește cu, creșterea lui Ra .

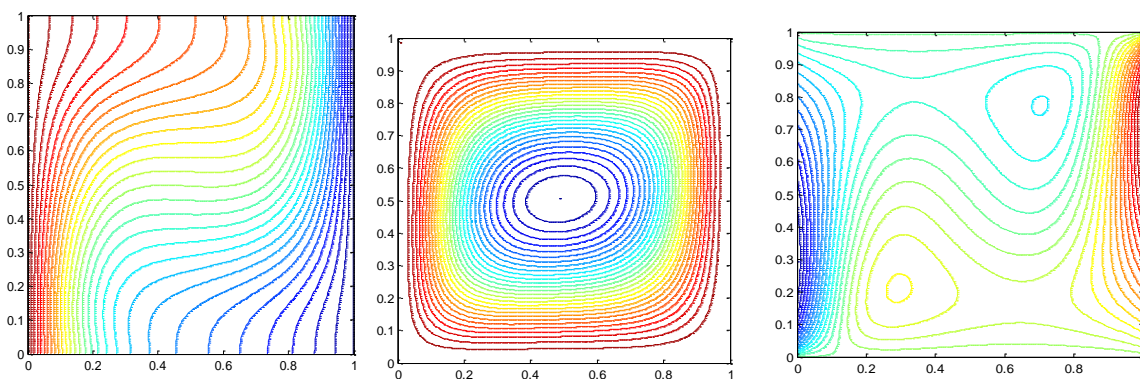


a)

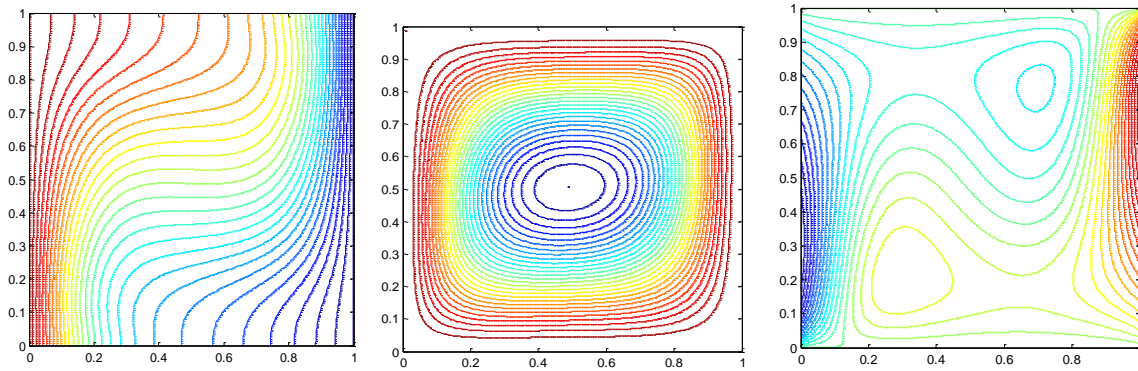


b)

Fig. 1. Izotermele, linii de current și liniile concentrațiilor pentru diferite valori ale fracției de volum pentru $Ra = 10^3$, $T_C = 22^\circ$, $T_h = 32^\circ$, a) $\varphi_b = 0.02$, b) $\varphi_b = 0.05$.



a)



b)

Fig. 2. Izotermele, linii de current și liniile concentrațiilor pentru diferite valori ale fracției de volum pentru $Ra = 10^4$, $T_C = 22^\circ$, $T_h = 32^\circ$, a) $\phi_b = 0.02$, b) $\phi_b = 0.05$.

Rosca, Alin V., Rosca, Natalia C., Pop, Ioan, Stagnation point flow of a nanofluid past a non-aligned stretching/shrinking sheet with a second-order slip velocity, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 29 Issue: 2 Pages: 738-762 DOI: 10.1108/HFF-05-2018-0201 Published: 2019, WOS: 000459562500016.

1. Modelul matematic

Considerăm punctul de stagnare staționar 2-dimensional al unui nanofluid pe o placă ce se dilată/comprimează situată în planul $y = 0$, așa cum este prezentat în Fig. 1, unde x și y sunt coordonatele carteziene măsurate de-a lungul suprafeței și respectiv, normal la aceasta. Presupunem că nanofluidul este diluat astfel încât instabilitatea datorată bioconvecției poate fi evitată. De asemenea, presupunem că nanoparticulele suspendate în fluidul de bază sunt stabile și nu se aglomerează în fluid. Atât controlul pasiv cât și cel activ pentru fracția volumului de nanoparticule la frontiera părții solide sunt luate în considerare.

Având în vedere toate aceste presupuneri și folosind modelul propus de Buongiorno (2006), legea conservării masei, a mișcării, a energiei și concentrației nanoparticulelor sunt descrise prin intermediul următoarelor ecuații cu derivate parțiale în forma vectorială:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) T = \alpha \nabla^2 T + \delta \left(D_B \nabla C \cdot \nabla T + \frac{D_T}{T_\infty} \nabla T \cdot \nabla T \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v})C = D_B \nabla^2 C + \frac{D_T}{T_\infty} \nabla^2 T \quad (4)$$

Aici \mathbf{v} este vectorul viteza, T este temperatura nanofluidului, C este volumul fractiei de nanofluid, T_∞ si C_∞ sunt temperatura constanta si volumul fractiei constante a nanofluidului a fluidului ambiental, p este presiunea, ∇^2 este Laplacianul 2-dimensional, t este timpul, ρ este densitatea nanofluidului, α este difusivitatea termala, D_B este coeficientul de difuzie Browniana, D_T este coeficientul de difuzie termoforetica si δ este un parametru definit ca $\delta = (\rho C_p)_p / (\rho C_p)_f$, unde $(\rho C_p)_p$ este capacitatea de caldura efectiva a materialului nanoparticulelor, $(\rho C_p)_f$ este capacitatea de caldura efectiva a fluidului si C_p este caldura specifica la presiune constanta.

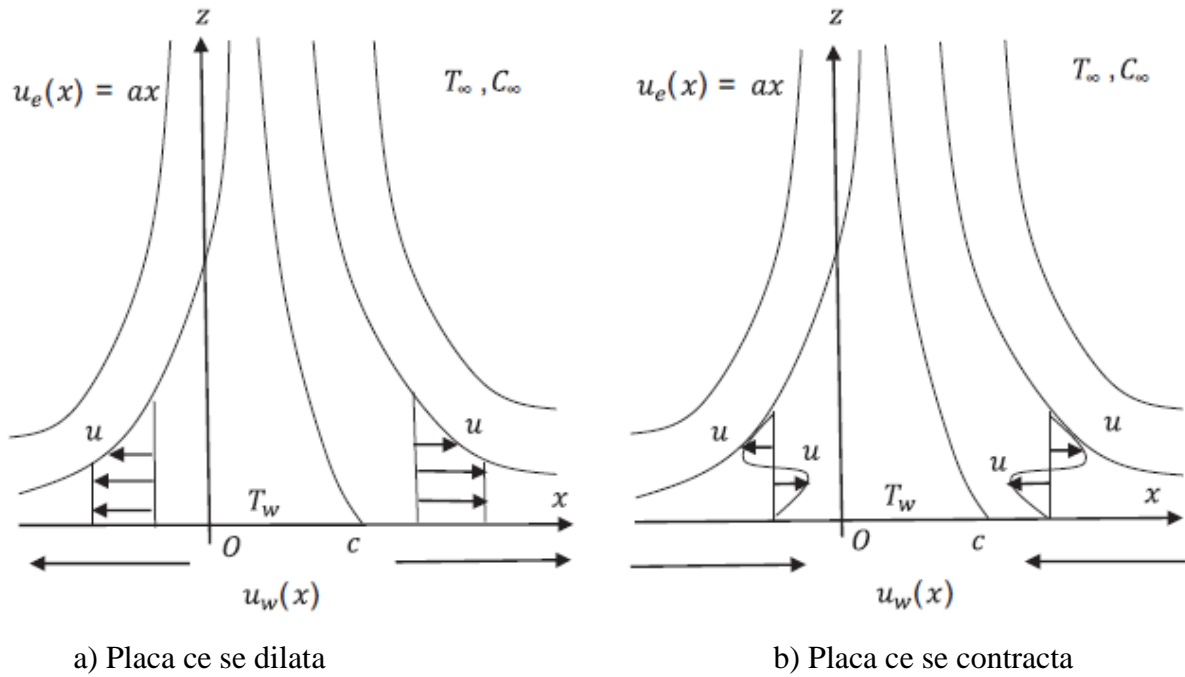


Fig. 1. Modelul fizic si sistemul de coordonate.

Ecuatiile (1)-(4) pot fi scrise in coordonate carteziene (x, y, z) astfel

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (7)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \delta \left[D_B \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{D_T}{T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (9)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (10)$$

unde u si v sunt componentele vitezei de-a lungul directiilor x si y . Suprafata ce se dilata/comprima este situata in planul $x-z$ astfel componenta vitezei in directia y este $v=0$ pentru cazul curgerii bidimensionale. Astfel conditiile la limita corespunzatoare ecuatiilor (5)-(10) sunt urmatoarele (vezi Kuznetsov si Nield (2013))

$$\left. \begin{aligned} u = u_w(x) = b(x+c) + u_{\text{slip}}(x), \quad w = 0, \quad T = T_w, \quad D_B \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0 \\ u \rightarrow u_e(x) = ax, \quad v \rightarrow v_e(y) = 0, \quad w \rightarrow w_e(z) = -az \\ T \rightarrow T_\infty, \quad C \rightarrow C_\infty \end{aligned} \right\} \text{ as } z \rightarrow \infty \quad (11)$$

Aici $u_{\text{slip}}(x)$ este viteza de alunecare, data prin

$$u_{\text{slip}}(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{3 - \varepsilon l^2}{\varepsilon} - \frac{3(1-l^2)}{2K_n} \right) \beta \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{4} \left[l^4 + \frac{2}{K_n^2} (1-l^2) \right] \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = A \frac{\partial u}{\partial z} + B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (12)$$

unde A si B sunt constante, K_n este numarul lui Knudsen, $l = \min(1/K_n, 1)$, ε este coeficientul acomodarii miscarii cu $0 \leq \varepsilon \leq 1$, si β este miscarea moleculara libera medie. Pe baza definitiei lui l , se poate observa ca pentru orice valoare data K_n , avem ca $0 \leq l \leq 1$. Deoarece β este mereu pozitiv rezulta ca B este un numar negativ. Trebuie mentionat ca expresia (12) pentru $u_{\text{slip}}(x)$ a fost data de Wu (2008) si folosita de Fang et al. (2010), si Roşca si Pop (2013).

Folosind ecuatiile (6) and (8) impreuna cu conditiile la frontiera (11), observam ca presiunea p este data de relatia:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{w^2}{2} + v \frac{\partial w}{\partial z} \quad (13)$$

unde p_0 este presiunea de stagnare.

Introducem urmatoarele variabile similare

$$\begin{aligned} u = ax f'(\eta) + bc g(\eta), \quad v = 0, \quad w = -\sqrt{av} f(\eta), \quad \theta(\eta) = (T - T_\infty) / \Delta T \\ \phi(\eta) = (C - C_\infty) / \Delta C, \quad \eta = z \sqrt{a/v} \end{aligned} \quad (14)$$

unde derivarea are loc in raport cu η , iar $\Delta T = T_w - T_\infty$ si $\Delta C = C_w - C_\infty$. Astfel, ecuatiile cu derivate partiale (5) pana la (10) se reduc la urmatoarele ecuatii similare

$$f'''' + f f'' + 1 - f'^2 = 0 \quad (15)$$

$$g'' + f g' - g f' = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' + Nb \phi' \theta' + Nt \theta'^2 = 0 \quad (17)$$

$$\phi'' + Le f \phi' + \frac{Nt}{Nb} \theta'' = 0 \quad (18)$$

avand conditiile la frontiera

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f'(0) = \lambda + a_1 f''(0) + b_1 f'''(0), \quad g(0) = 1 + a_2 g'(0) + b_1 g''(0) \\ \theta(0) = 1, \quad Nb \phi'(0) + Nt \theta'(0) = 0 \\ f'(\eta) \rightarrow 1, \quad g(\eta) \rightarrow 0, \quad \theta(\eta) \rightarrow 0, \quad \phi(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (19)$$

Aici Pr este numarul lui Prandtl, λ este coeficientul de dilatare/comprimare cu $\lambda > 0$ pentru placa ce se dilata si $\lambda < 0$ placa ce se contracta, respectiv, Le este numarul lui Lewis, Nb este parametrul miscarii Browniene, Nt este parametrul de termoforeza, $a_1 > 0$ si $a_2 < 0$ parametrii de ordinul 1 ai vitezei de alunecare si $b_1 < 0$ este parametrul de ordinul 2 al vitezei de alunecare, definiti astfel

$$\begin{aligned} Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{b}{a}, \quad Le = \frac{\nu}{D_B}, \quad Nb = \frac{\delta D_B \Delta C}{\nu}, \quad Nt = \frac{\delta D_T \Delta T}{\nu T_\infty} \\ a_1 = A \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad a_2 = AB \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad b_1 = B \frac{a}{\nu} \end{aligned} \quad (20)$$

Mentionam ca ecuatiile (15) si (16) sunt identice cu cele raportate de Wang (2008), dar cu conditii la limita diferite. O masura de interes este functia de curent adimensionala $\tilde{\psi}$, definita astfel:

$$\tilde{\psi} = xf(\eta) + \lambda c \int_0^\eta g(s) ds \quad (21)$$

unde $\tilde{\psi} = \psi / (av)^{1/2}$ cu ψ ce se determina uzual ca $u = \partial \psi / \partial z$ si $v = -\partial \psi / \partial x$.

Cantitatile fizice de interes sunt coeficientul de frecare la perete C_f si numarul lui Nusselt local

Nu_x , definite astfel

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2(x)}, \quad Nu_x = \frac{q_w}{k \Delta T} \quad (22)$$

unde τ_w si q_w sunt

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (23)$$

Folosind (14), relatiile (22) se pot scrie ca si

$$Re_x^{1/2} C_f = f''(0) + \frac{bc}{u_e(x)} g'(0) \quad Re_x^{-1/2} Nu_x = -\theta'(0) \quad (24)$$

unde $Re_x = u_e(x)x/\nu$ este numarul lui Reynolds local.

2. Metoda numerica si rezultate

In lipsa unei solutii analitice problema la frontiera (15)-(19) a fost rezolvata folosind functia `bvp4c` din MATLAB pentru cateva valori ale parametrilor implicati astfel, parametrul dilatariei/comprimarii λ si parametrii alunecarii de ordinul intai (a_1, a_2) si de ordinul doi (b_1) iar numarul lui Prandtl Pr este fixat la $Pr = 1$, si parametrii Le, Nb si Nt sunt fixati la $Le = 10$, si $Nb = Nt = 0.5$. Mai intai, trebuie sa transformam problema la frontiera (15)-(19) intr-un sistem de ordinul intai de 9 ecuatii diferentiale ordinare astfel:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= y_3, \\ y_3' &= -y_1 y_3 - 1 + y_2^2, & y_4' &= y_5 \\ y_5' &= -y_1 y_5 + y_4 y_2, & y_6' &= y_7 \\ y_7' &= Pr(-y_1 y_7 - Nb y_7 y_9 - Nt y_7^2), & y_8' &= y_9 \\ y_9' &= -Le y_1 y_9 + \frac{Nt}{Nb} Pr(y_1 y_7 + Nb y_7 y_9 + Nt y_7^2) \end{aligned} \quad (25)$$

unde

$$\begin{aligned} y_1 &= f(\eta), y_2 = f'(\eta), y_3 = f''(\eta), y_4 = g(\eta), \\ y_5 &= g'(\eta), y_6 = \theta(\eta), y_7 = \theta'(\eta), y_8 = \phi(\eta), y_9 = \phi'(\eta). \end{aligned} \quad (26)$$

Transformari similare folosim pentru conditiile la frontiera. Functia utilizata `bvp4c` este un program cu diferente finite ce implementeaza formula in 3 etape Lobatto IIIa. Aceasta este o formula de colocatie iar polinoamele de colocatie ne furnizeaza o solutie de clasa C^1 care este de ordinul 4 de acuratete uniform pe intervalul unde se integreaza functia. Selectia punctelor de pe grid si controlul erorii se bazeaza pe rezidualele solutiei continue. Rezidualul $r(\eta)$ este definit astfel

$$r(\eta) = S'(\eta) - f(\eta, S(\eta)) \quad (27)$$

unde $S(\eta)$ este solutia aproximativa a urmatoarei probleme la frontiera:

$$y'(\eta) = f(\eta, y(\eta)), \quad a \leq \eta \leq b \quad (28)$$

cu conditiile pe frontiera

$$bc(y(a), y(b)) = 0 \quad (29)$$

Fixam toleranta erorii relative la 10^{-7} pentru toate aproximatiile numerice. In abordarea noastra, pentru conditiile asimptotice la frontiera $\eta \rightarrow \infty$ am ales o valoare finita pentru η , si anume $\eta = \eta_\infty = 20$ pentru prima solutie si $\eta = \eta_\infty$ intre 30 si 50 pentru a doua solutie. Observam ca pentru aceste valori finite pentru η variatia la infinit a vitezei, temperaturii si concentratiei sunt extrem de mici asa cum se obisnuieste in teoria stratului limita. Ne asteptam ca prezenta problema sa aiba mai mult de o solutie, asadar gasirea unei solutii initiale este esentiala in rezolvarea numerica a problemei la frontiera (15)-(19). Solutia initiala trebuie sa satisfaca conditiile la frontiera si sa prezinte alura corecta a solutiei generale.

Valorile pentru $f''(0)$ si $g'(0)$ au fost comparate cu cele din Mahapatra et al. (2012) si Wang (2008) in Tabelele 1 si 2. Se poate observa din aceste tabele ca este o potrivire excelenta a rezultatelor obtinute de noi cu lucrarile de mai sus. Astfel, suntem pe deplin increzatori ca rezultatele obtinute sunt corecte si acurate.

Rezultatele numerice obtinute sunt prezentate in figurile 2-9 in termenii coeficientilor de frecare la perete $f''(0)$ and $g'(0)$, ratei reduse de transfer a caldurii $-\theta'(0)$, si profilelor de viteza si temperatura adimensionale $f'(\eta)$ si $\theta(\eta)$ pentru diverse valori ale parametrilor a_1, a_2 si b_1 . Se observa din figurile 2 la 7 ca sistemul de ecuatii diferentiale ordinare (15)-(18) impreuna cu conditiile la frontiera (19) admite solutii multiple (duble). Pentru a determina care dintre cele doua solutii este stabila determinam cele mai mici valori proprii γ rezolvand numeric sistemul de ecuatii diferentiale ordinare obtinut folosind functia `bvp4c` din MATLAB (vezi Shampine et al. (2003)).

Din analiza stabilitatii efectuate de noi rezulta ca o solutie a problemei este stabila si deci realizabila fizic, iar a doua solutie este instabila si deci nu este realizabila fizic. Cele mai mici valori proprii γ

pentru cateva valori ale parametrilor a_1, a_2 si b_1 sunt date Tabelele 3 si 4. Mentionam aici ca cele mai mici valori sunt pozitive pentru solutia stabila si negative pentru solutia instabila.

Figurile 17 la 19 prezinta liniile de curent pentru cele doua solutii ale problemei pentru cateva valori ale lui a_1 (Fig. 17); ale lui b_1 (Fig. 18) ale lui c (Fig. 19) in cazul in care placa se comprima ($\lambda < 0$). Fig. 17 arata ca regiunea de curgere inversa pentru solutia instabila creste cu parametrul a_1 , si descreste cu parametrul b_1 (vezi Fig. 18). Figura 19 prezinta liniile de curent pentru cazurile aliniate si nealiniate pe o placa ce se comprima. Din aceasta figura, se poate observa ca efectul nealinierii este mai pronuntat pentru curgerea pe o placa ce se comprima. Deasemenea se poate observa ca pentru punctul de stagnare exista o regiune in apropierea placii unde are loc o curgere inversa.

Table 1. Comparatii ale valorilor lui $f''(0)$ pentru $a_1 = a_2 = b_1 = 0$ si cateva valori ale lui λ .

λ	Mahapatra et al. (2012)		Present study	
	Upper branch	Lower branch	Upper branch	Lower branch
-0.25	1.4022	-	1.4022	-
-0.5	1.4956	-	1.4956	-
-0.75	1.4892	-	1.4892	-
-1	1.3288	0	1.3288	0
-1.1	1.1866	0.0492	1.1866	0.0492
-1.15	1.0822	0.1167	1.0822	0.1167
-1.2	0.9324	0.2336	0.9324	0.2336
-1.2465	0.5843	0.5542	0.5843	0.5542

Table 2. Comparatii ale valorilor lui $g'(0)$ pentru $a_1 = a_2 = b_1 = 0$ si cateva valori ale lui λ .

λ	Mahapatra et al. (2012)		Present study	
	Upper branch	Lower branch	Upper branch	Lower branch
-0.25	-0.6685	-	-0.6685	-
-0.5	-0.5014	-	-0.5014	-
-0.75	-0.2937	-	-0.2937	-
-1	0.0	-	0.0	-
-1.1	0.1769	4.2657	0.1769	4.2657

-1.15	0.2979	2.7634	0.2979	2.7634
-1.2	0.4718	1.8831	0.4718	1.8831
-1.2465	0.9476	0.9991	0.9476	0.9991

Table 3. Cele mai mici valori proprii γ pentru cateva valori ale lui λ (< 0 , placa comprimata) si a_1 cand $b_1 = -0.5$.

b_1	a_1	λ	Upper branch γ	Lower branch γ
-0.5	0.5	-1.4	1.2031	-1.1293
		-1.5	0.9946	-0.9483
		-1.7	0.2706	-0.2676
	1	-2	1.2300	-1.1508
		-2.2	0.9225	-0.8811
		-2.4	0.4359	-0.4272
	2	-3.5	0.9875	-0.9391
		-3.7	0.7385	-0.7121
		-3.9	0.3432	-0.3376

Table 4. Cele mai mici valori proprii γ pentru cateva valori ale lui λ (< 0 , placa comprimata) si b_1 cand $a_1 = 0.5$.

a_1	b_1	λ	Upper branch γ	Lower branch γ
0.5	-1	-1.9	0.5544	-0.5496
		-1.95	0.3908	-0.3885
		-1.99	0.1713	-0.1709
	-1.5	-2	0.9453	-0.9372
		-2.2	0.6635	-0.6598
		-2.35	0.3169	-0.3161
	-2	-2.5	0.7702	-0.7668
		-2.7	0.4876	-0.4863
		-2.8	0.2454	-0.2451

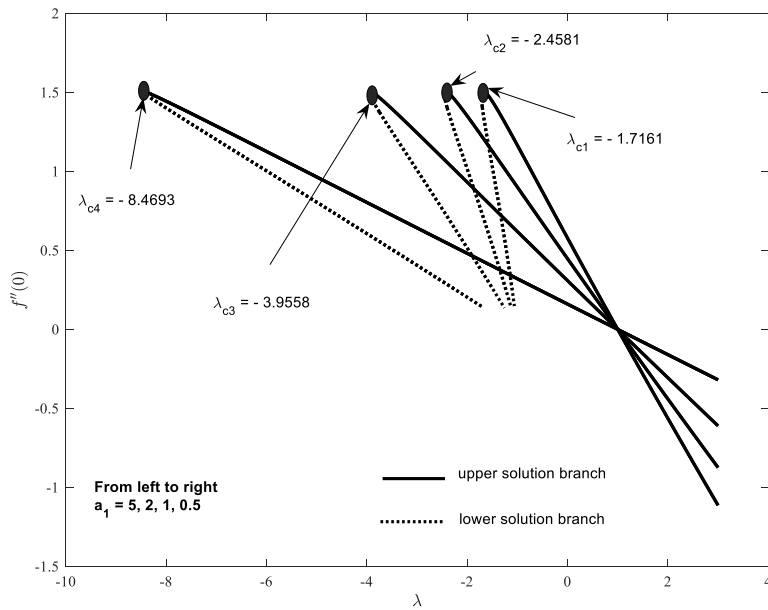


Fig. 2. Variatia lui $f''(0)$ cu λ pentru cateva valori ale lui a_1 cand $a_2 = b_1 = -0.5$.

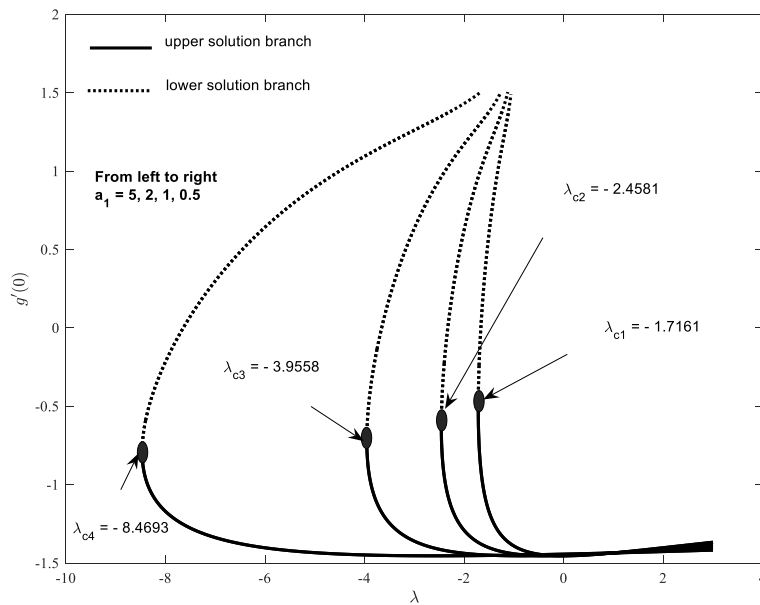


Fig. 3. Variatia lui $g'(0)$ with λ pentru cateva valori ale lui a_1 cand $a_2 = b_1 = -0.5$.

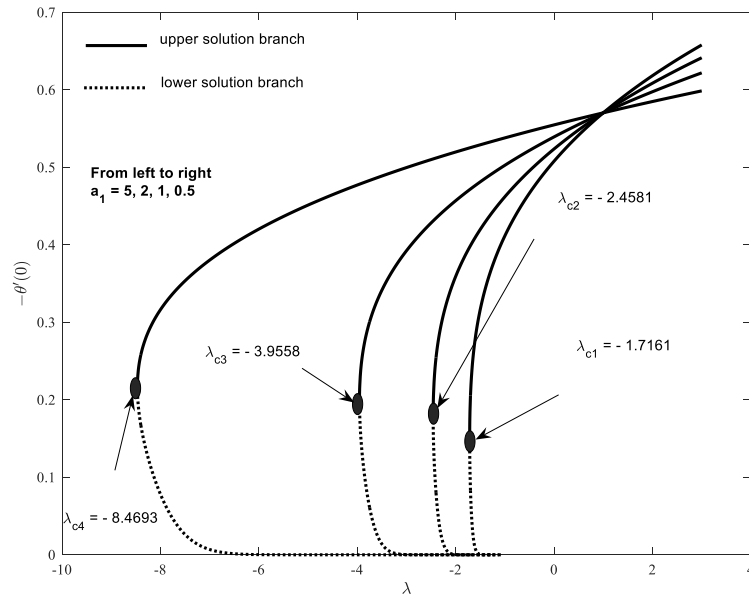


Fig. 4. Variatia lui $-\theta'(0)$ with λ pentru cateva valori ale lui a_1 cand $a_2 = b_1 = -0.5$.

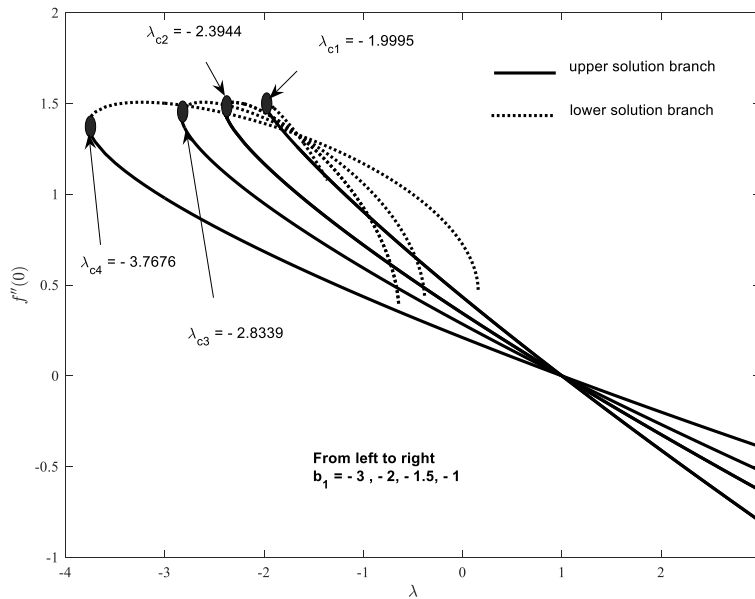


Fig. 5. Variatia lui $f''(0)$ with λ pentru cateva valori ale lui b_1 cand $a_1 = 0.5$ si $a_2 = -0.5$.

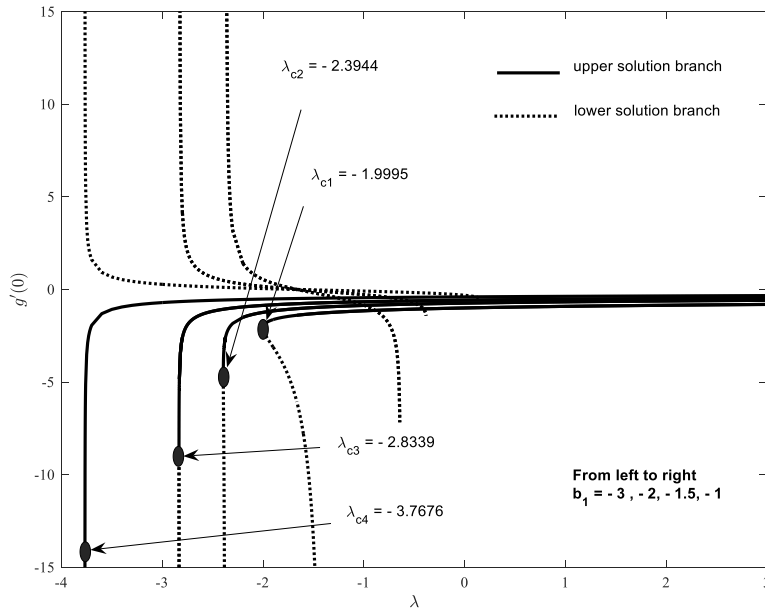


Fig. 6. Variatia lui $g'(0)$ with λ pentru cateva valori ale lui b_1 cand $a_1 = 0.5$ si $a_2 = -0.5$.

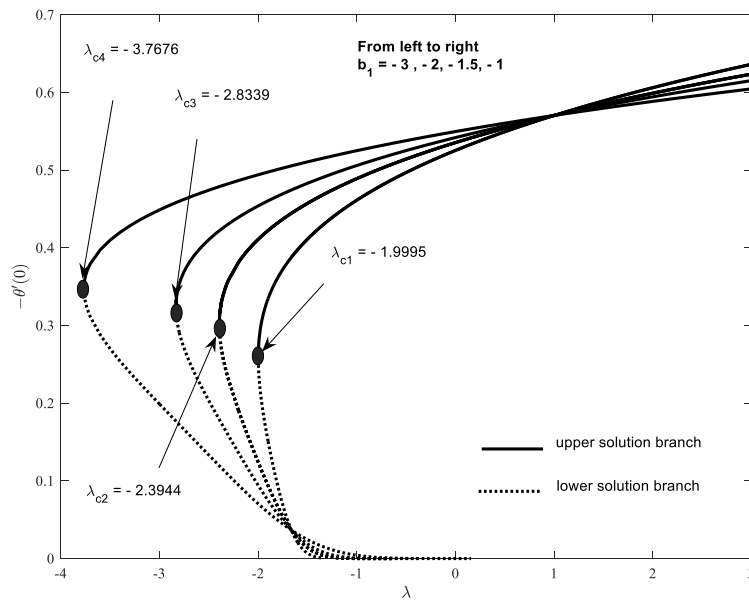


Fig. 7. Variatia lui $-\theta'(0)$ with λ pentru cateva valori ale lui b_1 cand $a_1 = 0.5$ si $a_2 = -0.5$.

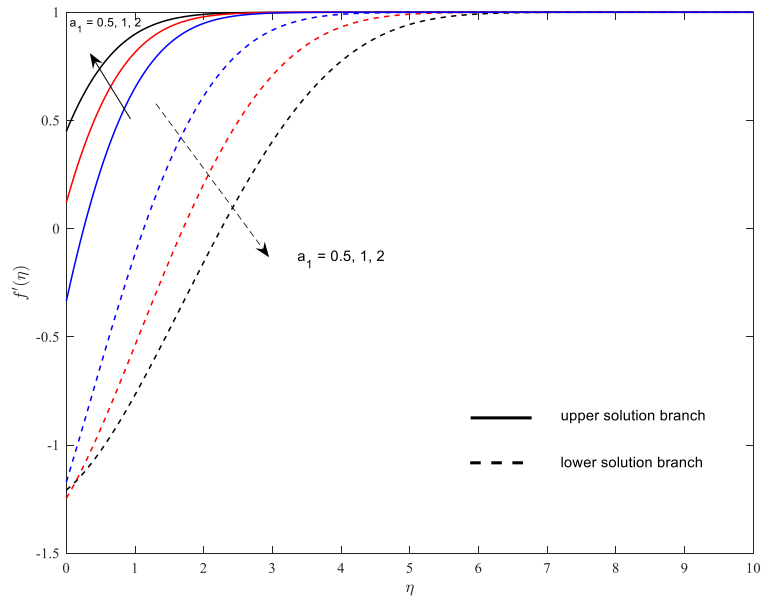


Fig. 8. Profilele adimensionale de viteza $f'(\eta)$ pentru cateva valori ale lui a_1 cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, b_1 = a_2 = -0.5$ si $\lambda = -1.5$.

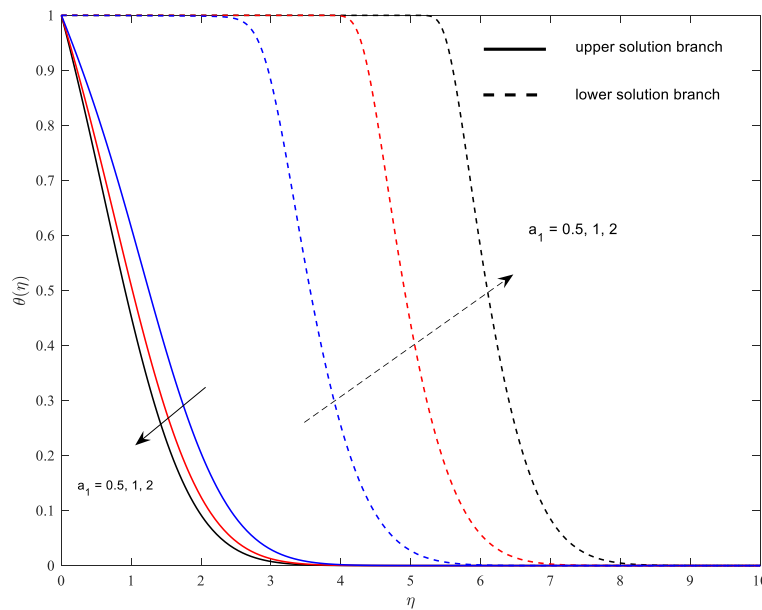


Fig. 9. Profilele adimensionale de temperatura $\theta(\eta)$ pentru cateva valori ale lui a_1 cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, b_1 = a_2 = -0.5$ si $\lambda = -1.5$.

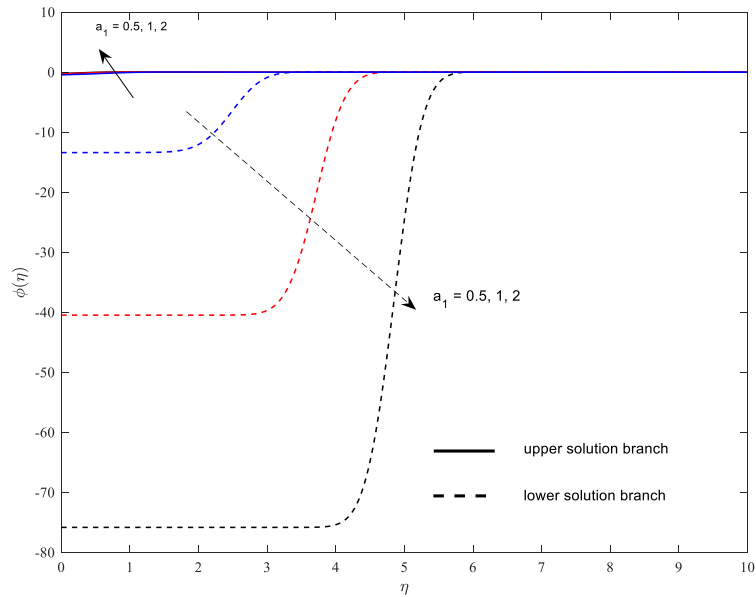


Fig. 10. Profilele adimensionale de concentratie $\phi(\eta)$ pentru cateva valori ale lui a_1 cand $Pr = 1$, $Nb = Nt = 0.5$, $Le = 10$, $b_1 = a_2 = -0.5$ si $\lambda = -1.5$.

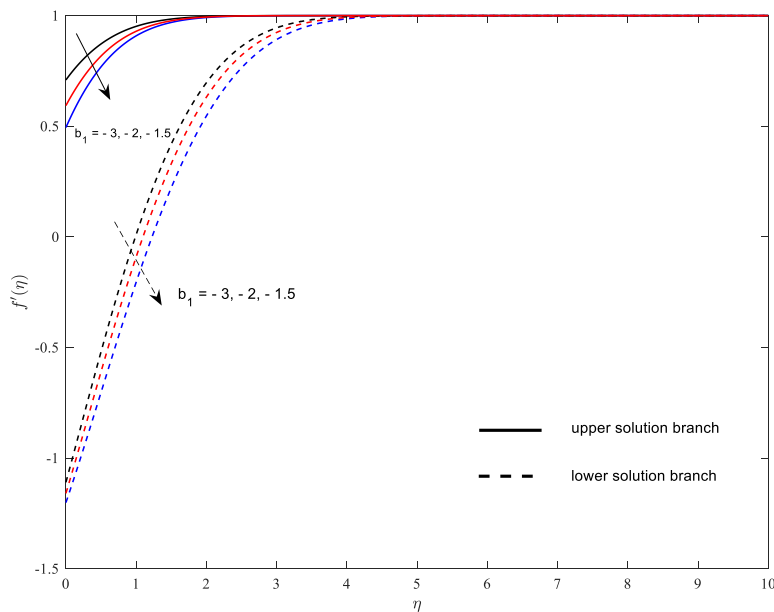


Fig. 11. Profilele adimensionale de viteza $f'(\eta)$ pentru cateva valori ale lui b_1 cand $Pr = 1$, $Nb = Nt = 0.5$, $Le = 10$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = -0.5$ si $\lambda = -1$.

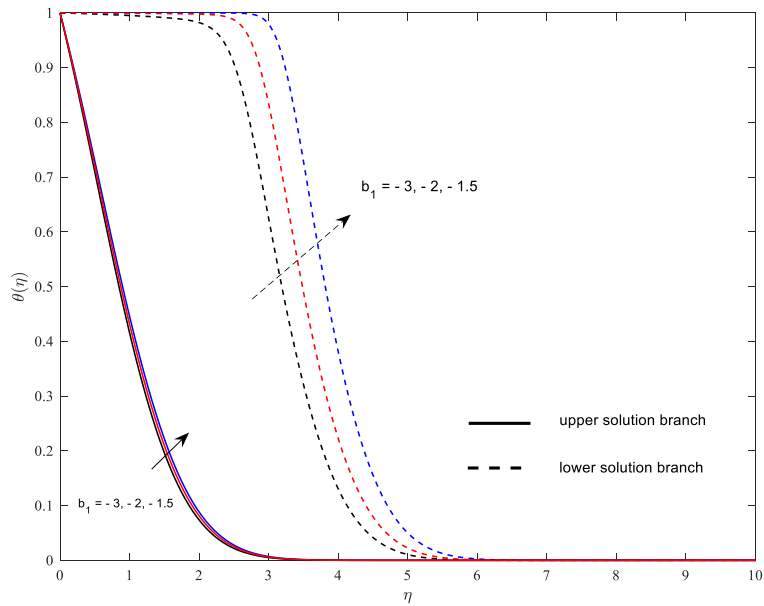


Fig. 12. Profilele adimensionale de temperatura $\theta(\eta)$ pentru cateva valori ale lui b_1 cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, a_1 = 0.5, a_2 = -0.5$ si $\lambda = -1$.

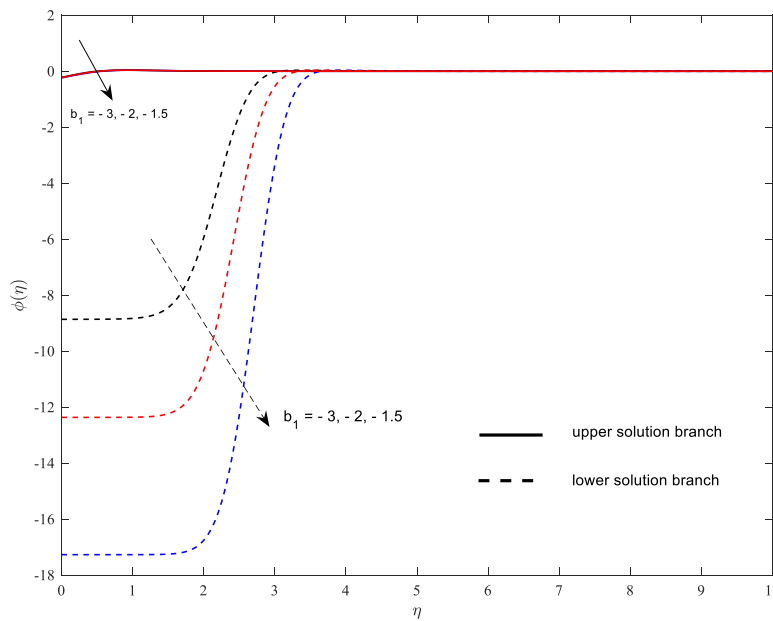


Fig. 13. Profilele adimensionale de concentratie $\phi(\eta)$ pentru cateva valori ale lui b_1 cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, a_1 = 0.5, a_2 = -0.5$ si $\lambda = -1$.

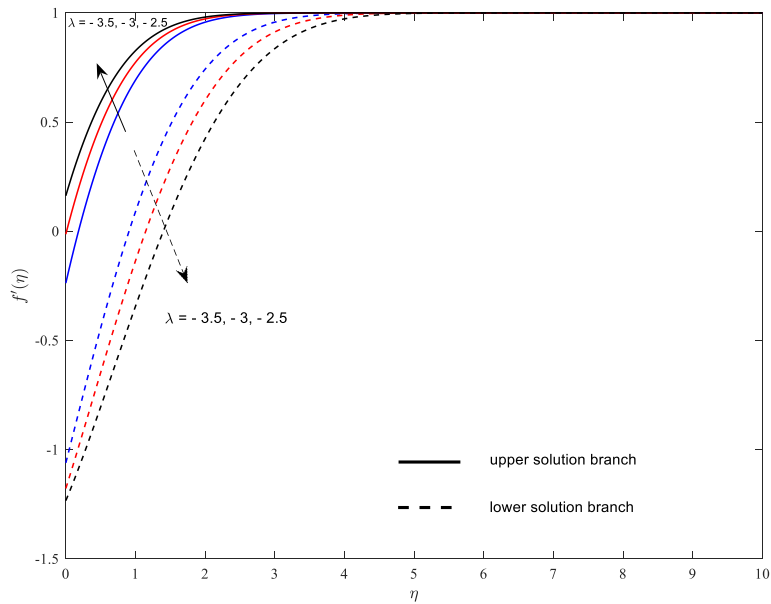


Fig. 14. Profilele adimensionale de viteza $f'(\eta)$ pentru cateva valori ale lui $\lambda < 0$ cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, a_1 = 2, a_2 = -0.5$ si $b_1 = -0.5$.

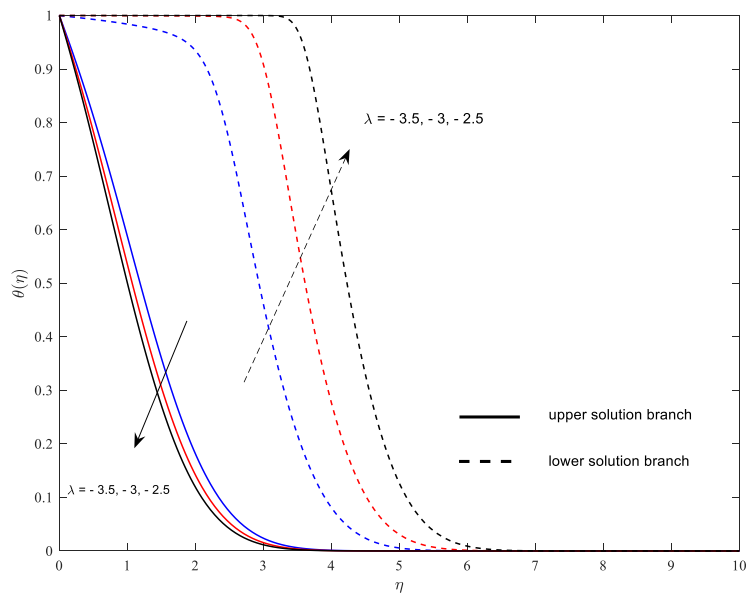


Fig. 15. Profilele adimensionale de temperatura $\theta(\eta)$ pentru cateva valori ale lui $\lambda < 0$ cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, a_1 = 2, a_2 = -0.5$ si $b_1 = -0.5$.

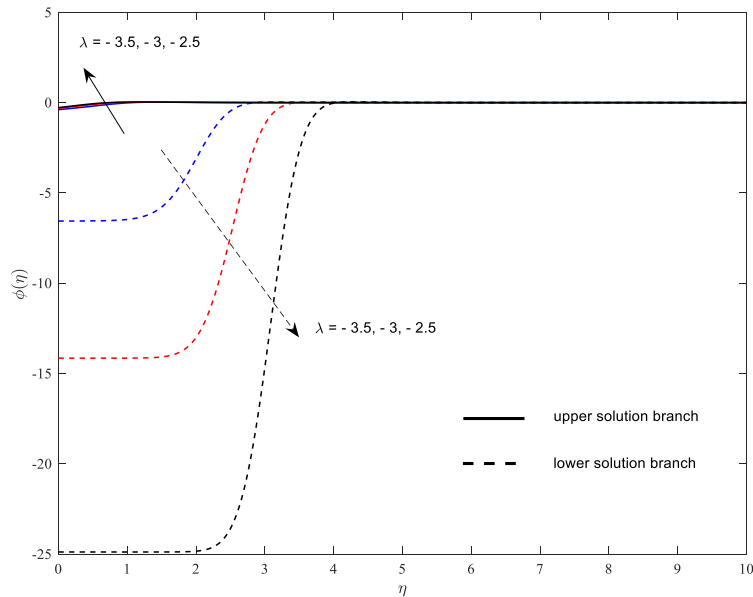


Fig. 16. Profilele adimensionale de concentratie $\phi(\eta)$ pentru cateva valori ale lui $\lambda < 0$ cand $Pr = 1, Nb = Nt = 0.5, Le = 10, a_1 = 2, a_2 = -0.5$ si $b_1 = -0.5$.

Sheremet Mikhail A., Pop Ioan, Rosca Alin V., The influence of thermal radiation on unsteady free convection in inclined enclosures filled by a nanofluid with sinusoidal boundary conditions, INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT & FLUID FLOW Volume: 28 Issue: 8 Pages: 1738-1753 DOI: 10.1108/HFF-09-2017-0375, Published: 2018, WOS: 000447730300001.

1. Modelul matematic al problemei

Modelul fizic de convecție liberă într-o cavitate patrata inclinată umplută cu un nanofluid pe baza de ce conține nanoparticule de Al_2O_3 și sistemul de coordonate sunt prezentate schematic în Figura 1. Domeniul de interes include cavitatea umplută cu nanofluid cu o distribuție sinusoidală a temperaturii de-a lungul peretelui stâng. Peretii orizontali sunt adiabatici, în timp ce peretele vertical drept este ținut la temperatura constantă T_c . Presupunem în această analiză că proprietățile termofizice ale lichidului sunt independente de temperatura, iar curgerea este laminară.

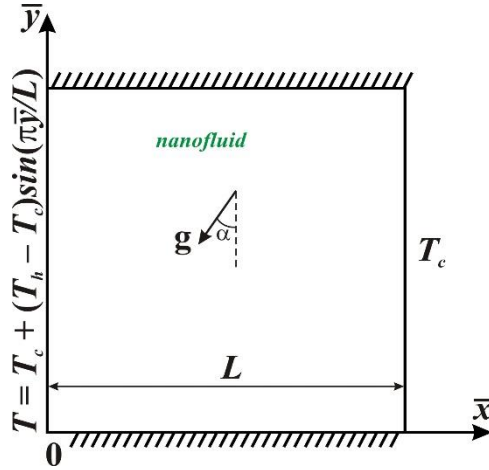


Fig. 1. Reprezentarea schematica a problemei

Nanofluidul este Newtonian si aproximarea Boussinesq este valida. Fluidul de baza si nanoparticulele sunt in echilibru termic. Presupunem ca disipatia vascoasa se neglijeaza. Luand in considerare ipotezele de mai sus ecuatiile ce guverneaza miscarea se pot scrie in forma adimensionala in coordonate carteziene dupa cum urmeaza

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = H_1 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + H_2 \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\alpha) \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{H_3}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

avand conditiile la limita si conditiile initiale

$$\tau = 0: \psi = 0, \omega = 0, \theta = 0.5 \text{ at } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$\tau > 0: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \theta = \sin(\pi y) \text{ at } x = 0, 0 \leq y \leq 1;$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \theta = 0 \text{ at } x = 1, 0 \leq y \leq 1; \quad (4)$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, 1, 0 \leq x \leq 1$$

Cantitatile fizice de interes sunt numarul lui Nusselt local Nu de-a lungul peretelui vertical cu temperatura sinusoidala si numarul lui Nusselt mediu \overline{Nu} , care sunt definite astfel

$$Nu = -\frac{k_{nf}}{k_f} \left(1 + \frac{4}{3} R_d \frac{k_f}{k_{nf}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \overline{Nu} = \int_0^1 Nu dy \quad (5)$$

2. Metoda numerica si rezultatele obtinute

Ecuatiile (1)-(3) avand conditiile initiale si la limita (4) au fost rezolvate numeric printr-o metoda cu diferente finite de ordinul 2. A fost facut un studiu pentru independenta gridului folosind cinci tipuri de grid de dimensiuni diferite (50×50, 100×100, 200×200, 300×300 si 400×400) cu $Ra = 10^5$, $Pr = 7.0$, $\phi = 0.03$, $R_d = 1$, $\alpha = 0$. La final, un grid avand dimensiunile 200×200 a fost selectat pentru toate rezultatele numerice.

In acest studiu, investigam convectia naturala tranzitorie a unui nanofluid de tip aluminiu-apa intr-o cavitate patrata inclinata cu temperature sinusoidala de-a lungul peretelui vertical drept. Efectele numarului lui Rayleigh ($Ra = 10^4-10^6$), ale unghiului de inclinatie ($\alpha = 0-\pi/3$), a fractiei volumetrice de nanoparticule ($\phi = 0.0-0.04$) si a radiatiei ($R_d = 0-3$) in curgerea fluidului si transferului de caldura, pentru $Pr = 7.0$, sunt studiate. Rezultatele sunt prezentate sub forma liniilor de temperatura si liniilor de curent, si deasemenea pentru numarul lui Nusselt mediu si rata de curgere a nanofluidului. Liniile de temperatura si liniile de curent sunt reprezentate continuu pentru fluidul clar ($\phi = 0.0$) si respectiv intrerupt pentru nanofluid ($\phi = 0.04$).

Figura 2 prezinta evolutia liniilor de temperatura si a liniilor de curent pentru $Ra = 10^5$, $\alpha = 0$, $R_d = 1$ in cazul unui fluid clar (linii continue) si a unui nanofluid cu $\phi = 0.04$ (linii intrerupte). Domeniul considerat este o cavitate incalzita diferentiat, unde temperatura de-a lungul peretelui vertical stang variaza de la $y = 0$ pana la 0 at $y = 1$ folosind o lege sinusoidala $\theta = \sin(\pi y)$ cu valoarea maxima 1 la $y=0.5$. In acelasi timp temperatura de-a lungul peretelui vertical drept este constanta si are o valoare minima egala cu „0”. Luand in considerare gradientul de temperatura orizontala si influenta gravitatiei curgerea convectiva evolueaza in interiorul cavitatii. La $\tau = 1$ (Fig. 2a) avem incalzirea din peretele stang si racirea dinspre peretele drept, in timp ce temperatura initiala este 0.5. Asadar, se formeaza trei celule convective langa peretele stang, si anume, una de circulatie majora localizata langa partea centrala a acestui perete, unde se mentine temperatura mare, si doua de circulatie minora in partile stanga jos si sus datorita temperaturii joase din aceste zone. O celula convectiva se formeaza in apropierea peretelui drept. Campul de temperatura ilustreaza formarea de izoterme in apropierea peretilor izotermali verticali. Trecerea timpului conduce la o combinatie de doua celule convective majore cu o deplasare a miezului celulei obtinute, la inceput catre partea

dreapta la $\tau = 3$ (Fig. 2b) si in continuare catre partea centrala la $\tau = 10$ (Fig. 2e). Izotermele arata formarea unei unde fierbinti cu curgere ascendenta langa peretele stang si a unei unde reci cu curgere descendenta langa peretele vertical drept.

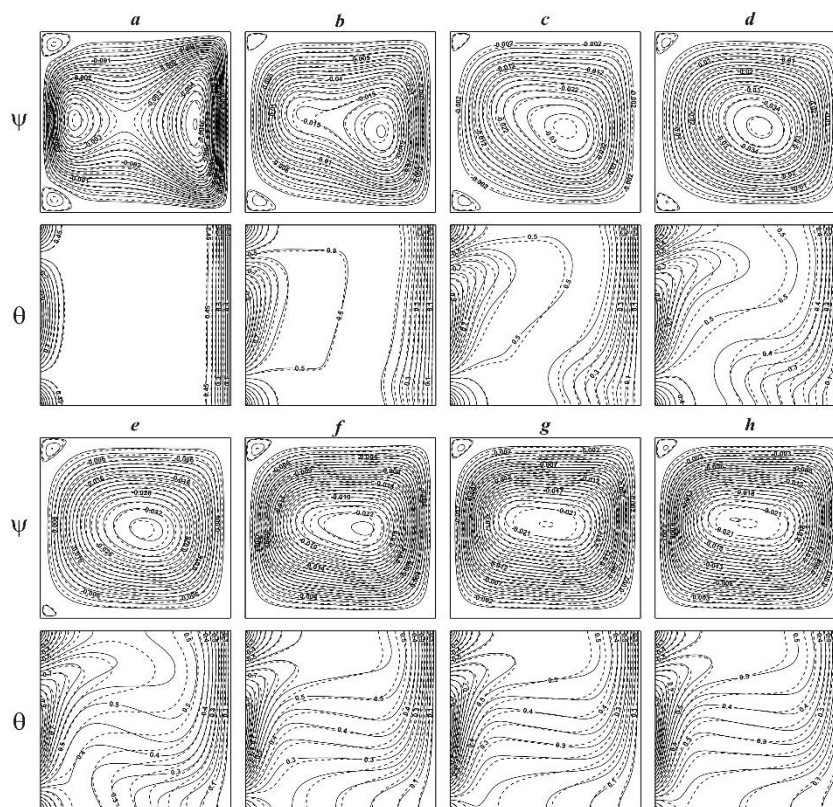


Fig. 2. Linii de curent ψ si linii de temperatura θ pentru $Ra = 10^5$, $\alpha = 0$, $R_d = 1$ si $\phi = 0.0$ (linii solide), $\phi = 0.04$ (linii intrerupte): $\tau = 1 - a$, $\tau = 3 - b$, $\tau = 5 - c$, $\tau = 7 - d$, $\tau = 10 - e$, $\tau = 20 - f$, $\tau = 50 - g$, $\tau = 200 - h$.

Distributia izotermelor ilustreaza formarea a doua straturi limita ale temperaturii de-a lungul peretilor verticali izotermali. Partea centrala a cavitatii este caracterizata de formarea unui miez stratificat de temperatura incalzit dispre partea superioara si racit dinspre partea inferioara. Curgerea descrisa si si comportamentul transferului de caldura sunt similare pentru fluidul clar si nanofluid. Cateva diferente apar in liniile de curent si liniile de temperatura datorita curgerii mai inertiiale a nanofluidului cu vascozitate efectiva mai scazuta. Se observa ca stratificarea temperaturii are loc mai repede pentru fluidul clar decat pentru nanofluid.

Evolutia transferului de caldura si a ratei de curgere sunt prezentate in Fig. 3 pentru diferite fractii volumetrice de nanoparticule. Evolutia numarului Nusselt mediu poate fi decria ca o schimbare in trei niveluri, ultimul corespunzand unei stari de echilibru cu o valoare constanta pentru

numarul lui Nusselt mediu. Curgerea fluidului reflecta cele trei niveluri. O crestere a volumului fractiei de nanoparticule conduce la o reducere a numarului lui Nusselt mediu si a ratei de curgere a fluidului.

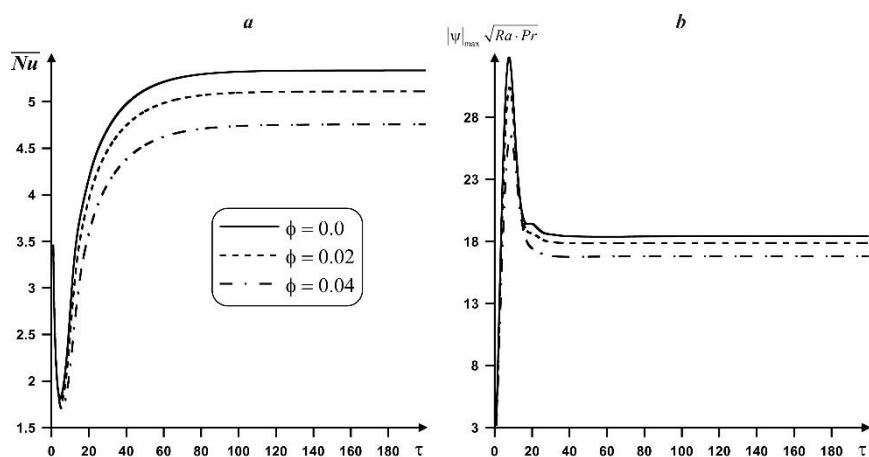


Fig. 3. Variatii ale numarului lui Nusselt mediu la peretele stang (*a*) si valoarea absoluta maxima a functiei de curent (*b*) cu timpul pentru $Ra = 10^5$, $\alpha = 0$, $R_d = 1$ pentru diferite valori ale fractiei volumetrice de nanoparticule.

3. Concluzii

Din cele două lucrări prezentate, se pot desprinde urmatoarele concluzii:

Existenta solutiilor duale pentru cazul placii ce se comprima $\lambda < 0$ cu grafice ce se bifurca la valorile critice λ_c .

Graficele $f''(0)$, $g'(0)$ si $-\theta'(0)$ pentru prima solutie descresc monoton cu parametrul de alunecare de ordinul intai $a_1 > 0$ si cresc monoton cu parametrul de alunecare de ordin doi $b_1 < 0$.

Valorile critice λ_c descresc cu parametrul de alunecare a_1 sugerand ca acest parametru creste regiunea unde problema pe frontiera (15) la (19) are solutii. Pentru parametrul de alunecare de ordin doi $b_1 < 0$ se observa un comportament opus.

Liniile de curent pentru solutia stabila atunci cand curgerea si punctele de comprimare/dilatate sunt aliniata este similara cu cazul punctului de stagnare clasic. Insa, simetria este distrusa atunci cand are loc nealiniera. Mai mult, o curgere inversa este evidenta in cazul solutiei instabile. Acest lucru este in concordanta cu rezultatele prezentate de Wang (2008).

A fost gasit ca evolutia numarului lui Nusselt mediu si rata de curgere a fluidului pot fi descrise ca o schimbare in trei niveluri: unul initial de conductie a caldurii, unul intermediar de convecție a caldurii si un ultim nivel de echilibru.

Numarul lui Nusselt mediu si rata de curgere a fluidului sun functii crescatoare de numarului lui Rayleigh si radiatie si descrescatoare de fractia volumetrica de nanoparticule.

O crestere a unghiului inclinatiei considerat conduce la o crestere a intensitatii curgerii convective, in timp ce rata transferului de caldura este o functie neliniara de unghiul de inclinatie al cavitatii.

Waini Iskandar, Ishak Anuar, Pop Ioan, Unsteady flow and heat transfer past a stretching/shrinking sheet in a hybrid nanofluid, INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER Volume: 136 Pages: 288-297 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.02.101, Published: JUN 2019, WOS: 000467195600024

1. Formularea matematica

Consideram problema curgerii nestationare laminare in strat limita a unui nanofluid hibrid incompresibil peste o placa ce se dilata/contracta (vezi Figura 1)), unde x si y sunt coordonatele carteziane dimensionale cu axa Ox masurata de-a lungul suprafetei, iar Oy normal pe ea, suprafata fiind localizata in planul $y=0$. Presupunem ca viteza de dilatare/comprimare a placii este $u_w(x, t) = U_w(x)/(1 - \alpha t)$, unde t este timpul, α este un parametru ce masoara nestationaritatea problemei, iar $v_w(x, t)$ este viteza suptiunii masei ce va fi determinata ulterior si $U_w(x) = ax$, cu a constanta pozitiva. Din punct de vedere fizic $\alpha > 0$ reprezinta curgerea normala nestationara, $\alpha < 0$ reprezinta curgerea reversa nestationara, in timp ce $\alpha = 0$ corespunde curgerii stationare inviscide.

Presupunem ca lichidul de baza (de exemplu apa) si nanoparticulele sunt in echilibru termic si nu are loc fenomenul de alunecare intre ele. Asadar, folosind modelul matematic propus de Tiwari si Das (2007), ecuatiile ce guverneaza aceasta miscare scrise in coordonate carteziane sunt (vezi Rohni si al. (2011); Devi si Devi (2017))

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{hnf}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{hnf}}{\rho_{hnf}} \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{hnf}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{hnf}}{\rho_{hnf}} \nabla^2 v \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{hnf}}{(\rho C_p)_{hnf}} \nabla^2 T \quad (4)$$

avand conditiile initiale si la limita,

$$t < 0: \quad v = 0, \quad u = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{pentru orice } x, y$$

$$t \geq 0: \quad v = v_w(x, t), \quad u = \lambda u_w(x, t), \quad T = T_w \quad \text{daca } y = 0 \quad (5)$$

$$u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{cand} \quad y \rightarrow \infty$$

unde u si v sunt componentele vitezei de-a lungul axelor x si y , T este temperatura nanofluidului hibrid, p este presiunea, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ este Laplacianul, λ este parametrul de dilatare/contractie cu $\lambda > 0$ pentru placa ce se dilata si $\lambda < 0$ pentru placa ce se contracta, μ_{hnf} este vascozitatea dinamica, k_{hnf} este conductivitatea termica, ρ_{hnf} este densitatea nanofluidului si $(\rho C_p)_{hnf}$ este capacitatea termica a nanofluidului hibrid.

Folosind Devi si Devi (2017), o forma speciala a proprietatilor termofizice sunt introduse in aceasta lucrare pentru a face o analiza a ecuatiilor nestationare ale stratului limita ale unui nanofluid hibrid, considerand un amestec de nanoparticule de Cu cu concentratia volumetrica de 0.1 intr-un nanofluid de Al_2O_3 /apa pentru a forma nanofluidul hibrid necesar studiului. In acest model pentru inceput se adauga nanoparticule de Al_2O_3 (ϕ_1) in fluidul de baza cu o concentratie volumetrica 0.1 (i.e. $\phi_1 = 0.1$), fixata in aceasta problema iar apoi se adauga nanoparticule de Cu (ϕ_2) in diferite concentratii volumetrice pentru a forma nanofluidul hibrid Cu- Al_2O_3 /apa. Forma finala a proprietatilor termofizice pentru nanofluid si nanofluid hibrid este prezentata in Tabelul 1, iar in Tabelul 2 sunt prezentate proprietatile termofizice ale fluidului de baza si nanoparticulelor.

2. Solutia pentru curgerea stationara ($\partial/\partial t = 0$)

Pentru a obtine solutii similare pentru sistemul de ecuatii (1)-(4) relativ la conditiile initiale si la limita (5) introducem urmatoarele transformari similare:

$$\psi = x \sqrt{\frac{av_f}{1-\alpha t}} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{a}{v_f(1-\alpha t)}} \quad (6)$$

unde ψ este functia de curent ce satisface ecuatia (1), iar componentele vitezei sunt definite $u = \partial\psi/\partial y$ si $v = -\partial\psi/\partial x$. Cu aceste definitii, componentele vitezei devin

$$u = \frac{ax}{1-\alpha t} f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{av_f}{1-\alpha t}} f(\eta) \quad (7)$$

Presiunea poate fi integrata din ecuatia (3). Astfel viteza transferului de masa devine:

$$v_w(x,t) = -\sqrt{\frac{av_f}{1-\alpha t}} S \quad (8)$$

unde S este viteza constata a fluxului de masa cu $S > 0$ pentru suctiune si $S < 0$ pentru injectie.

Substituind (6) in ecuatiile (2)-(4) obtinem urmatorul sistem de ecuatii diferentiale neliniare:

$$f''' + (1 - \varphi_1)^{2.5} (1 - \varphi_2)^{2.5} \left\{ (1 - \varphi_2) \left[(1 - \varphi_1) + \varphi_1 \left(\frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \right) \right] + \varphi_2 \left(\frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right) \right\} \times \left[ff'' - f'^2 - \beta \left(f' + \frac{\eta}{2} f'' \right) \right] = 0 \quad (9)$$

$$\theta'' + Pr \left(\frac{k_f}{k_{mf}} \right) \left\{ (1 - \varphi_2) \left[(1 - \varphi_1) + \varphi_1 \frac{(\rho C_p)_{s1}}{(\rho C_p)_f} \right] + \varphi_2 \frac{(\rho C_p)_{s2}}{(\rho C_p)_f} \right\} \times \left[f \theta' - \frac{\beta}{2} \eta \theta' \right] = 0 \quad (10)$$

avand conditiile la limita

$$\begin{aligned} f(0) = S, f'(0) = \lambda, \theta(0) = 1 \\ f'(\eta) \rightarrow 0, \theta(\eta) \rightarrow 0 \text{ cand } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

unde derivatele sunt in raport cu η iar $\beta = \alpha/a$ este parametrul de nonstationaritate cu $\beta > 0$ pentru curgere accelerata si $\beta < 0$ pentru curgere decelerata. Pentru acest studiu consideram o curgere decelerata peste o placa ce se dilata/contracta. Observam ca atunci cand $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, Eq. (9) se reduce la Eq. (6) din Fang et al. (2009):

$$f''' + ff'' - f'^2 - \beta \left(f' + \frac{\eta}{2} f'' \right) = 0 \quad (12)$$

Cantitatile fizice de interes sunt coeficientul de frecare la perete C_f si numarul lui Nusselt local definite dupa cum urmeaza:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_f U_w^2}, \quad Nu_x = \frac{x q_w}{k_f (T_w - T_\infty)} \quad (13)$$

cu τ_w si q_w date de

$$\tau_w = \mu_{mf} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad q_w = -k_{mf} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (14)$$

Substituind (6) in (14) si folosind (13), obtinem

$$C_f \text{Re}_x^{1/2} = \frac{1}{(1-\varphi_1)^{2.5}(1-\varphi_2)^{2.5}} f''(0), \quad Nu_x \text{Re}_x^{-1/2} = -\frac{k_{hmf}}{k_f} \theta'(0) \quad (15)$$

unde $\text{Re}_x = u_w x / \nu_f$ este numarul lui Reynolds local.

3. Analiza stabilitatii

Conform cu Merkin (1980), Weidman et al. (2006), Roşca si Pop (2013a,b) si Harris et al. (2009) in cazul diferitelor probleme studiate ecuatiile similare ordinare admit solutii duale cu o solutie stabila si deci realizabila fizic si una instabila si deci fizic nerealizabila. Pentru a testa solutia obtinuta consideram problema (9)-(11) si introducem o noua variabila timp dimensionala $\tau = at/(1-\alpha t)$. Utilizand (6) si (7) avem ca:

$$u(x, \tau) = \frac{ax}{1-\alpha t} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\eta, \tau), \quad \theta(\eta, \tau) = \frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu_f(1-\alpha t)}}, \quad \tau = \frac{at}{1-\alpha t} \quad (16)$$

Folosind (16), Eqs. (9) si (10) se pot scrie astfel

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + (1-\varphi_1)^{2.5}(1-\varphi_2)^{2.5} \left\{ (1-\varphi_2) \left[(1-\varphi_1) + \varphi_1 \left(\frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \right) \right] + \varphi_2 \left(\frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right) \right\} \\ \times \left[f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \beta \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \tau} \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \left(\frac{k_f}{k_{hmf}} \right) \left\{ (1-\varphi_2) \left[(1-\varphi_1) + \varphi_1 \frac{(\rho C_p)_{s1}}{(\rho C_p)_f} \right] + \varphi_2 \frac{(\rho C_p)_{s2}}{(\rho C_p)_f} \right\} \times \left[f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\beta}{2} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (18)$$

iar conditiile la limita (11) devin

$$\begin{aligned} f(0, \tau) = S, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(0, \tau) = \lambda, \quad \theta(0, \tau) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta}(\eta, \tau) \rightarrow 0, \quad \theta(\eta, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (19)$$

Pentru a determina stabilitatea solutiei stationare $f = f_0(\eta)$ si $\theta = \theta_0(\eta)$ ce verifica problema cu valori pe frontiera (9)-(11) putem scrie (vezi Merkin (1980), Weidman et al. (2006), Roşca si Pop (2013a,b) si Harris et al. (2009))

$$f(\eta, \tau) = f_0(\eta) + e^{-\gamma\tau} F(\eta), \quad \theta(\eta, \tau) = \theta_0(\eta) + e^{-\gamma\tau} G(\eta) \quad (20)$$

unde γ este o valoare proprie necunoscuta iar functiile $F(\eta)$ si $G(\eta)$ sunt mici relativ la $f_0(\eta)$ si $\theta_0(\eta)$. Substituind (20) in ecuatiile (17) si (18) impreuna cu conditiile la frontiera (19) obtinem urmatoarea problema cu valori proprii

$$F''' + (1 - \varphi_1)^{2.5} (1 - \varphi_2)^{2.5} \left\{ (1 - \varphi_2) \left[(1 - \varphi_1) + \varphi_1 \left(\frac{\rho_{s1}}{\rho_f} \right) \right] + \varphi_2 \left(\frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right) \right\} \\ \times \left[f_0 F'' + F f_0'' - 2 f_0' F' - \beta \left(F' + \frac{\eta}{2} F'' \right) + \gamma F' \right] = 0 \quad (21)$$

$$G'' + \text{Pr} \left(\frac{k_f}{k_{mf}} \right) \left\{ (1 - \varphi_2) \left[(1 - \varphi_1) + \varphi_1 \frac{(\rho C_p)_{s1}}{(\rho C_p)_f} \right] + \varphi_2 \frac{(\rho C_p)_{s2}}{(\rho C_p)_f} \right\} \\ \times \left[f_0 G' + F \theta_0' - \frac{\beta}{2} \eta G' + \gamma G \right] = 0 \quad (22)$$

iar conditiile pe frontiera (19) devin

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad G(0) = 0 \\ F'(\eta) \rightarrow 0, \quad G(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (23)$$

Rezolvand problema cu valori proprii (21)-(23) se obtine un numar infinit de valori proprii $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots$. Daca cea mai mica in modul valoare proprie γ este pozitiva atunci curgerea este stationara iar daca cea mai mica in modul valoare proprie γ este negativa atunci curgerea este nestationara.

4. Rezultate si discutii

Solutiile numerice ale sistemului de ecuatii diferentiale ordinare neliniare (9)-(11) si (21)-(23) au fost obtinute folosind solverul bvp4c din programul MATLAB. Detaliile metodei sunt prezentate in Shampine et al. (2003). Solutia initiala furnizata si grosimea stratului limita η_∞ se aleg in functie de parametrii problemei.

Procedura numerica a fost validata in cazul particular $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ cu rezultatele numerice din lucrarile Khan and Pop (2010), Devi and Devi (2016a) si Wang (2008) obtinandu-se o potrivire excelenta (vezi Tabelul 3).

Valorile pentru $C_f \text{Re}_x^{1/2}$ si $Nu_x \text{Re}_x^{-1/2}$ in cazul nanofluidului hibrid Cu-Al₂O₃/apa cu diverse valori ale lui φ_2 cu $\varphi_1 = 0.1$, $S = 0$, $\beta = 0$, $\text{Pr} = 6.135$ si $\lambda = 1$ (placa ce se dilata) se regasesc in Tabelul 4. Conform Devi and Devi (2017), s-au folosit proprietatile termofizice ale apei la 25°C si anume $\rho_f = 997$, $(C_p)_f = 4180$ si $k_f = 0.6071$.

Variatia coeficientului redus de frecare la perete $f''(0)$ si a ratei reduse de transfer de caldura $-\theta'(0)$ pentru diverse valori ale parametrilor sunt prezentate in Figs. 2-7. Din aceste figuri se observa ca pentru un anumit interval de variatie al parametrului de nestationaritate β exista solutii duale. Solutiile duale exista numai daca valoarea lui β este mai mare sau egala cu o anumita valoare critica β_c , aceasta fiind valoarea unde cele doua solutii ale problemei se intalnesc. Dincolo de aceasta valoare critica nu exista solutii similare.

Profilele de viteza $f'(\eta)$ si temperatura $\theta(\eta)$ pentru diverse valori ale parametrului φ_2 cand $\text{Pr} = 6.2$, $\lambda = -1$, $\beta = -2$, $S = 2.2$ si $\varphi_1 = 0.1$ sunt prezentate in Figs. 8 si 9. Aceste figuri arata existenta a doua profile pentru diverse valori ale concentratiei volumetrice de particule φ_2 . Se observa ca odata cu cresterea parametrului φ_2 are loc si cresterea vitezei si temperaturii fluidului pentru solutia stabila. Totodata, viteza fluidului descreste, dar temperatura creste pentru solutia instabila odata cu cresterea concentratiei φ_2 .

Figurile 10 si 11 prezinta profilele de viteza $f'(\eta)$ si temperatura $\theta(\eta)$ pentru diverse valori ale parametrului de suctiune/injectie S pentru $\text{Pr} = 6.2$, $\lambda = -1$, $\beta = -2$, $\varphi_1 = 0.1$ si $\varphi_2 = 0.1$. Se observa ca o creste a suctiunii S conduce la o crestere a vitezei, dar la o descrestere a temperaturii pentru solutia stabila. Pentru solutia instabila viteza si temperatura fluidului descresc cu parametrul de suctiune S .

Cele mai mici valori proprii pentru diversi β cand $\text{Pr} = 6.2$, $\lambda = -1$, $S = 2.2$, $\varphi_1 = 0.1$ si $\varphi_2 = 0.01$ sunt prezentate in Fig. 12. Aceasta figura arata ca o valoare negativa a lui γ se refera la o crestere initiala in perturbatie, ducand la o solutie instabila, dar o valoare pozitiva a lui γ se refera la o diminuare initiala in perturbatie ducand la o solutie stabila. Deasemenea, se observa ca cele mai mici

valori proprii γ tind la zero atunci cand β tinde catre β_c . Acest lucru arata ca tranzitia de la solutia stabila la solutia instabila are loc in punctele de intoarcere.

Tabelul 1 Proprietatile termofizice ale nanofluidelor si nanofluidelor hibride (vezi Devi and Devi (2017); Yousefi et al. (2018); Khanafer et al. (2003); Oztop and Abu-Nada (2008))

Properties	Nanofluid	Hybrid Nanofluid
Density	$\rho_{nf} = (1 - \varphi_1)\rho_f + \varphi_1\rho_{s1}$	$\rho_{hmf} = (1 - \varphi_2)[(1 - \varphi_1)\rho_f + \varphi_1\rho_{s1}] + \varphi_2\rho_{s2}$
Heat capacity	$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi_1)(\rho C_p)_f + \varphi_1(\rho C_p)_{s1}$	$(\rho C_p)_{hmf} = (1 - \varphi_2)[(1 - \varphi_1)(\rho C_p)_f + \varphi_1(\rho C_p)_{s1}] + \varphi_2(\rho C_p)_{s2}$
Dynamic viscosity	$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi_1)^{2.5}}$	$\mu_{hmf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi_1)^{2.5}(1 - \varphi_2)^{2.5}}$
Thermal conductivity	$k_{nf} = \frac{k_{s1} + 2k_f - 2\varphi_1(k_f - k_{s1})}{k_{s1} + 2k_f + \varphi_1(k_f - k_{s1})} \times (k_f)$	$k_{hmf} = \frac{k_{s2} + 2k_{nf} - 2\varphi_2(k_{nf} - k_{s2})}{k_{s2} + 2k_{nf} + \varphi_2(k_{nf} - k_{s2})} \times (k_{nf})$
		where
		$k_{nf} = \frac{k_{s1} + 2k_f - 2\varphi_1(k_f - k_{s1})}{k_{s1} + 2k_f + \varphi_1(k_f - k_{s1})} \times (k_f)$

Tabelul 2 Proprietatile termofizice ale fluidelor si nanoparticulelor (vezi Rohni et al. (2011); Oztop and Abu-Nada (2008))

Physical properties	Fluid phase (water)	Al ₂ O ₃	Cu
$\rho(kg/m^3)$	997.1	3970	8933
$C_p(J/kgK)$	4179	765	385
$k(W/mK)$	0.613	40	400

Tabelul 3 Valorile pentru $-\theta'(0)$ in cazul fluidelor simple ($\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$) pentru diverse valori ale lui Pr daca $S = 0, \beta = 0$ si $\lambda = 1$

Pr	Khan and Pop (2010)	Devi and Devi (2017)	Wang (1989)	Gorla and Sidawi (1994)	Present results
2	0.9113	0.91135	0.9114	0.9114	0.911353
6.13	-	1.75968	-	-	1.759682
7	1.8954	1.89540	1.8954	1.8954	1.895400
20	3.3539	3.35390	3.3539	3.3539	3.353902

Tabelul 4 Valorile lui $C_{fx} Re_x^{1/2}$ si $Nu_x Re_x^{-1/2}$ pentru nanofluidul hibrid Cu-Al₂O₃/apa cu diverse valori ale lui φ_2 daca $\varphi_1 = 0.1, S = 0, \beta = 0, \lambda = 1$ si $Pr = 6.135$

φ_2	$C_{fx} Re_x^{1/2}$		$Nu_x Re_x^{-1/2}$	
	Devi and Devi (2017)	Present results	Devi and Devi (2017)	Present results
0.005	-1.327310	-1.327098	1.961686	1.961773
0.02	-1.409683	-1.409490	1.989226	1.989308
0.04	-1.520894	-1.520721	2.026368	2.026446
0.06	-1.634279	-1.634119	2.064075	2.064150

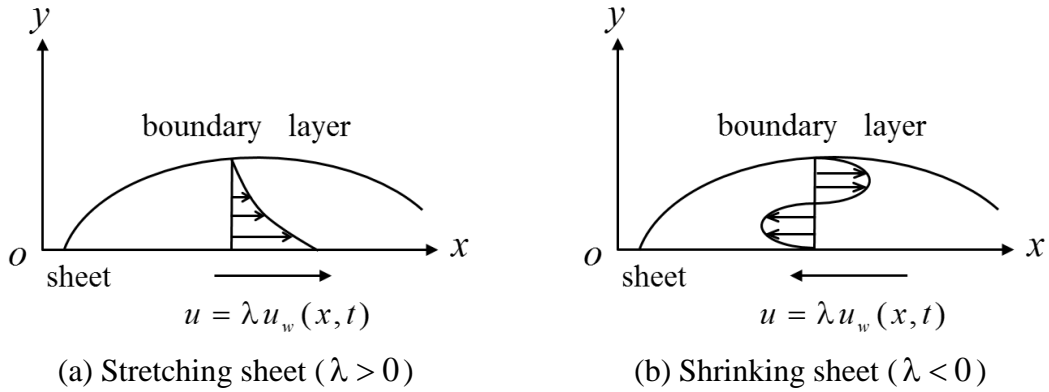


Fig. 1 Modelul fizic si sistemul de coordonate.

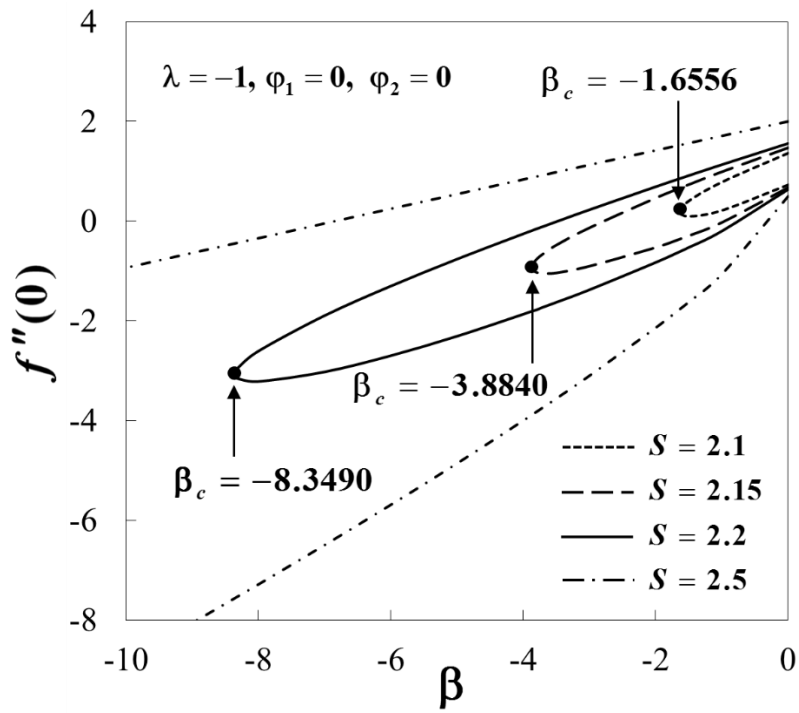


Fig. 2. Variatia lui $f''(0)$ cu β pentru diversi S daca $\lambda = -1, \varphi_1 = 0$ si $\varphi_2 = 0$

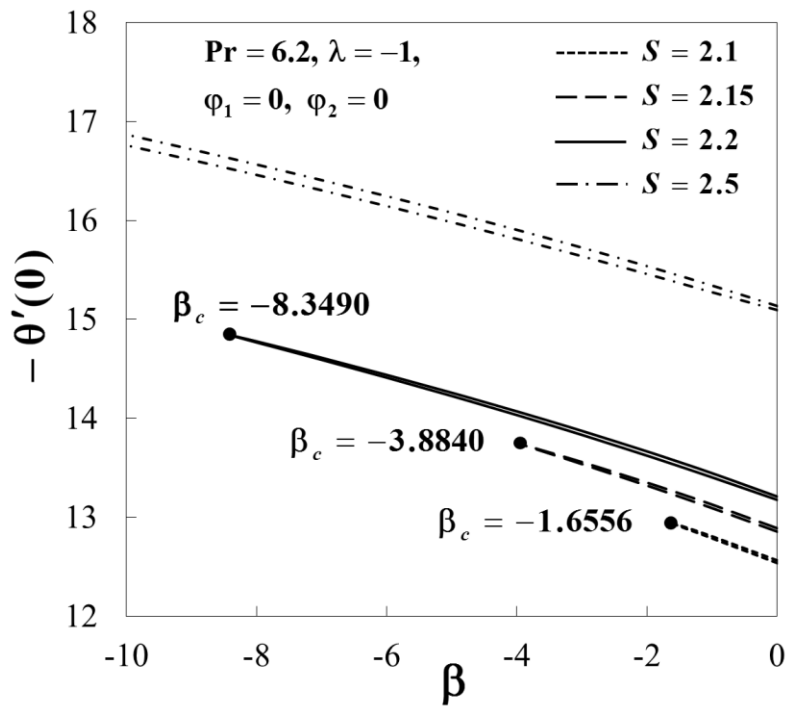


Fig. 3 Variatia lui $-\theta'(0)$ cu β pentru diversi S daca $Pr = 6.2, \lambda = -1, \varphi_1 = 0$ si $\varphi_2 = 0$

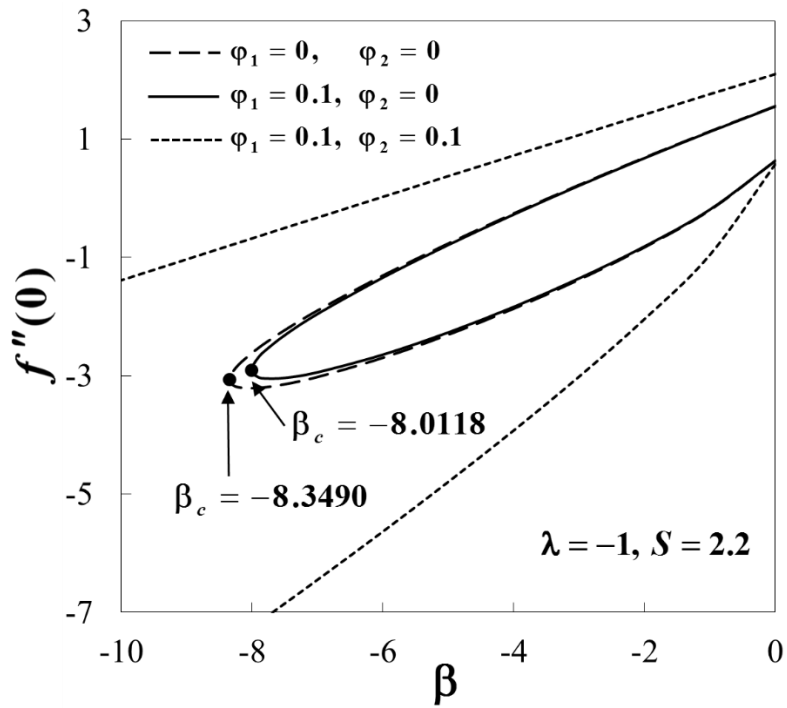


Fig. 4 Variatia lui $f''(0)$ cu β pentru diversi ϕ_1 si ϕ_2 daca $\lambda = -1$ si $S = 2.2$

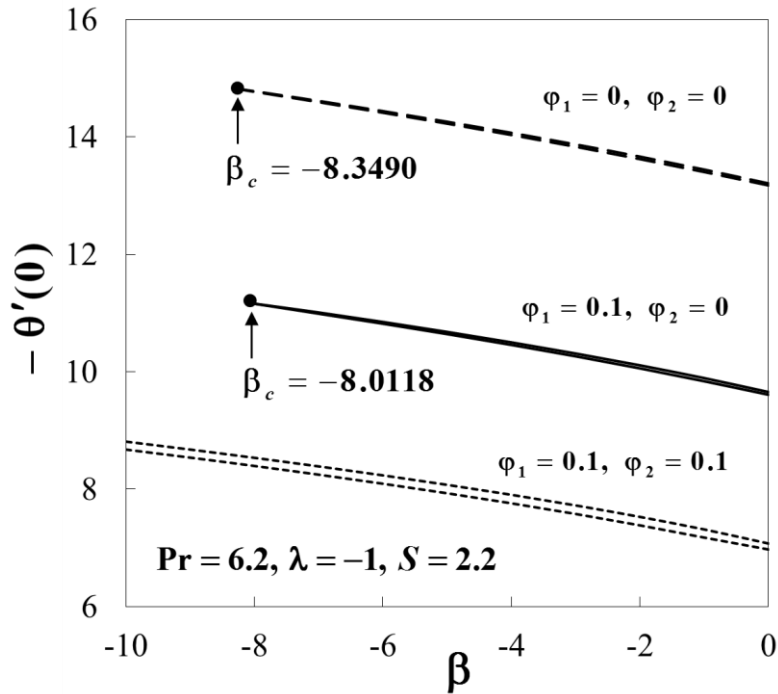


Fig. 5 Variatia lui $-\theta'(0)$ cu β pentru diversi ϕ_1 si ϕ_2 daca $Pr = 6.2, \lambda = -1$ si $S = 2.2$

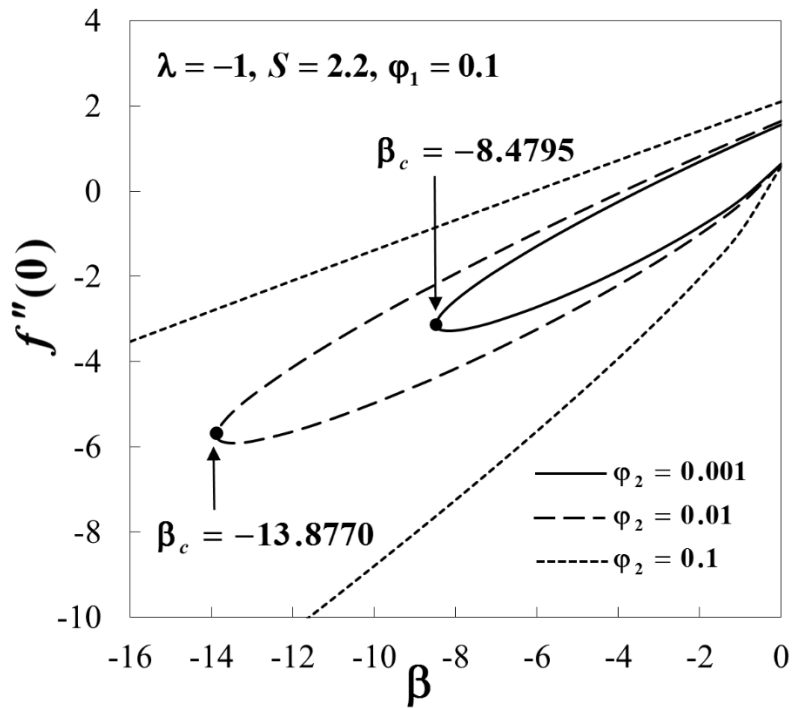


Fig. 6. Variatia lui $f''(0)$ cu β pentru diverse valori ale lui ϕ_2 daca $\lambda = -1$, $S = 2.2$ si $\phi_1 = 0.1$

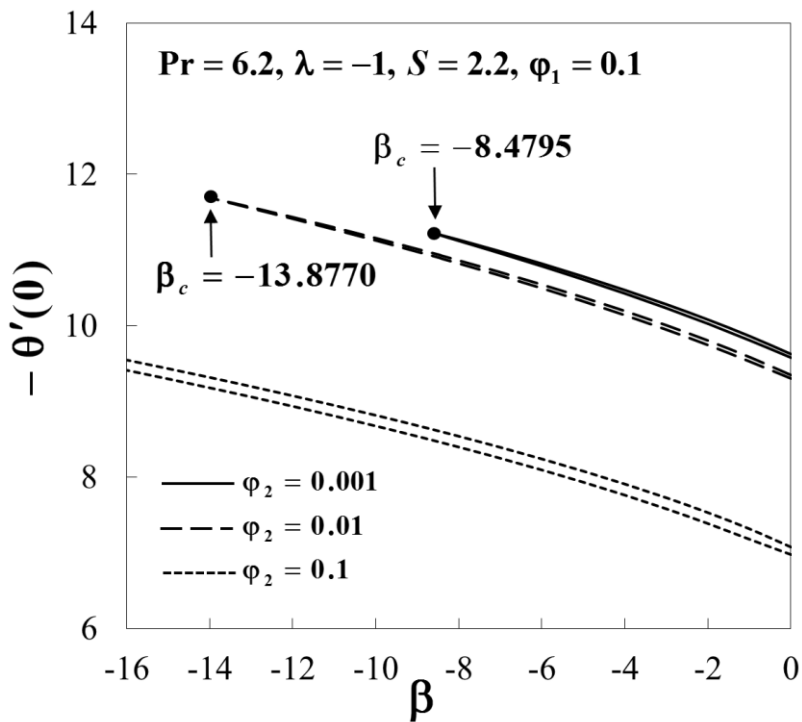


Fig. 7 Variatia lui $-\theta'(0)$ cu β pentru diversi ϕ_2 daca $Pr = 6.2$, $\lambda = -1$, $S = 2.2$ si $\phi_1 = 0.1$

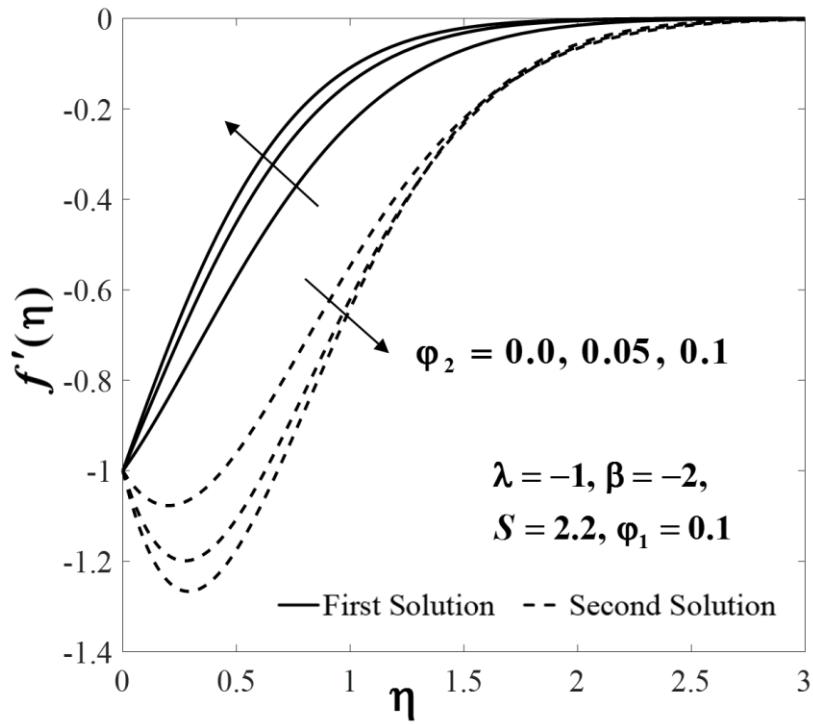


Fig. 8 Profilele adimensionale de viteza $f'(\eta)$ pentru diversi φ_2 daca $\lambda = -1$, $\beta = -2$, $S = 2.2$ si $\varphi_1 = 0.1$

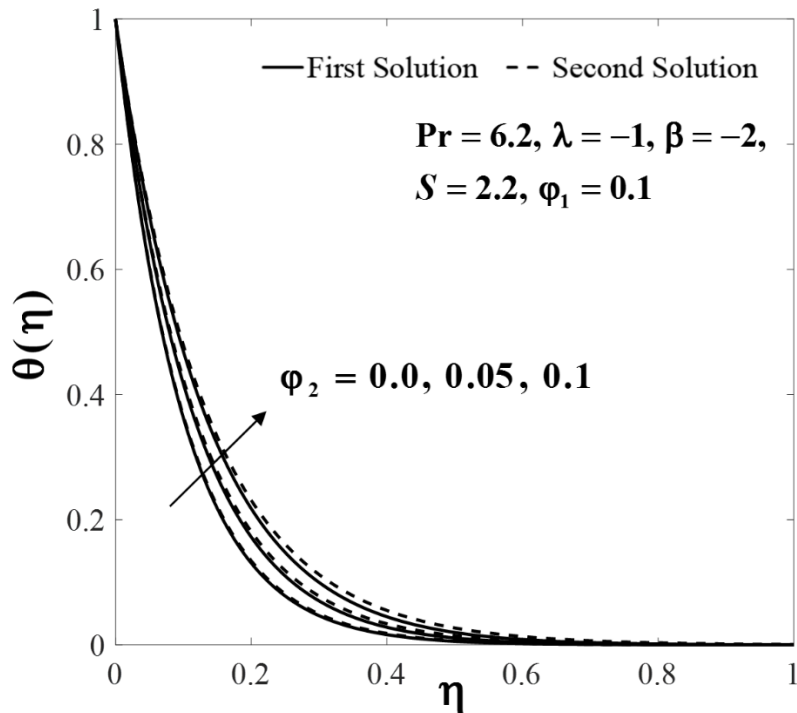


Fig. 9 Profilele adimensionale de temperatura $\theta(\eta)$ pentru diversi φ_2 daca $Pr = 6.2$, $\lambda = -1$, $\beta = -2$, $S = 2.2$ si $\varphi_1 = 0.1$

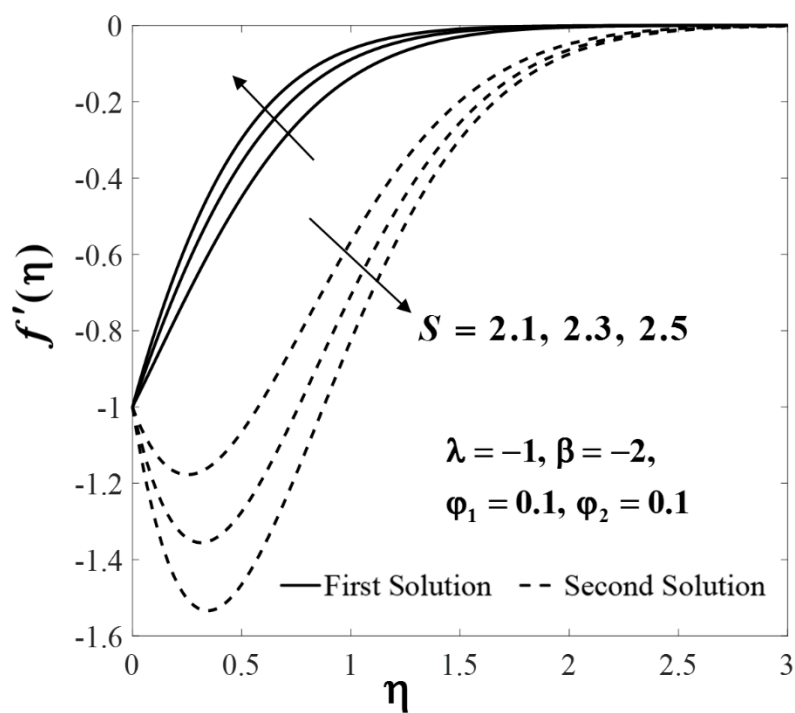


Fig. 10. Profilele adimensionale de viteza $f'(\eta)$ pentru diversi S daca $\lambda = -1$, $\beta = -2$, $\varphi_1 = 0.1$ si $\varphi_2 = 0.1$

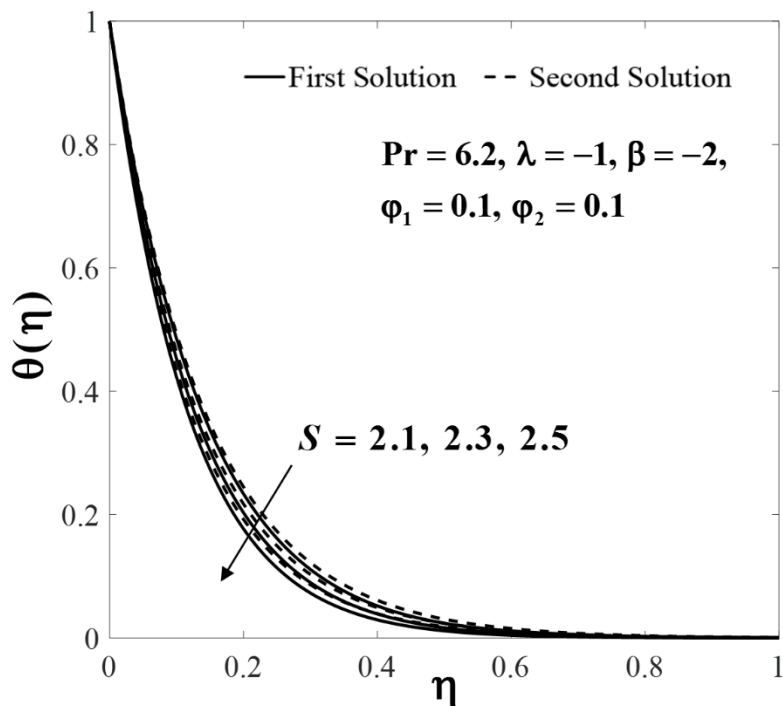


Fig. 11. Profilele adimensionale de temperatura $\theta(\eta)$ pentru diversi S daca $Pr = 6.2$, $\lambda = -1$, $\beta = -2$, $\varphi_1 = 0.1$ si $\varphi_2 = 0.1$

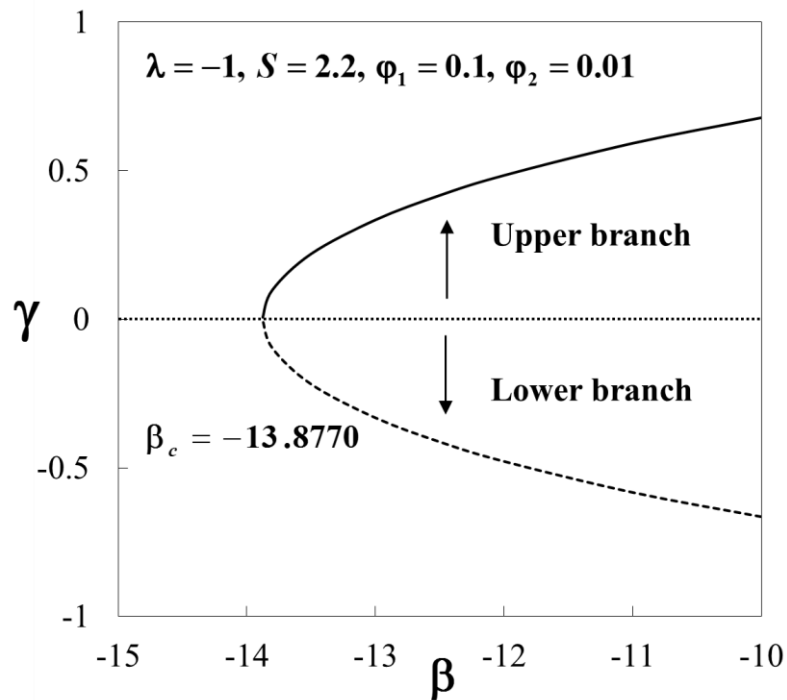


Fig. 12. Cele mai mici valori proprii γ pentru diversi β dacă $\lambda = -1$, $S = 2.2$, $\varphi_1 = 0.1$ și $\varphi_2 = 0.01$

Bibliografie

- S.U.S. Choi, S. Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles, Development and Applications of Non-Newtonian Flows, D.A. Siginer and H.P. Wang, eds., ASME, New York, MD-Vol. 231 and FED-Vol. 66, pp. 99–105, 1995.
- A. Shenoy, M. Sheremet, I. Pop, Convective Flow and Heat Transfer from Wavy Surfaces: Viscous Fluids, Porous Media and Nanofluids, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 2016.
- M.A. Sheremet, I. Pop, Natural convection in a wavy porous cavity with sinusoidal temperature distributions on both side walls filled with a nanofluid: Buongiorno's mathematical model, ASME J. Heat Transfer 137 (2015) 072601-072601-8.
- M.A. Sheremet, T. Grosan, I. Pop, Free convection in shallow and slender porous cavities filled by a nanofluid using Buongiorno's model, ASME J. Heat Transfer 136 (2014) Art. No. 082501.
- M.A. Sheremet, T. Grosan, I. Pop, Free convection in a square cavity filled with a porous medium saturated by nanofluid using Tiwari and Das' nanofluid model, Transport Porous Media 106 (2015) 595–610.
- C.J. Ho, W.K. Li, Y.S. Chang, C.C. Lin, Natural convection heat transfer of alumina-water nanofluid in vertical square enclosures: An experimental study, Int. J. Thermal Sci. 49 (2010) 1345–1353.
- M.Z. Saghir, A. Ahadi, A. Mohamad, S. Srinivasan, Water aluminum oxide nanofluid benchmark model, Int. J. Thermal Sciences 109 (2016) 148–158.
- Buongiorno, J. (2006). Convective transport in nanofluids, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 128 No. 3, pp. 240–250.
- Das, S.K., Choi, S.U.S., Yu, W. ad Pradeep, Y. (2008), Nanofluids: Science and Technology, Wiley, New Jersey, USA.

- Devi, S. P. A. and Devi, S. S. U. (2016a). Numerical investigation of hydromagnetic hybrid $\text{Cu-Al}_2\text{O}_3/\text{water}$ nanofluid flow over a permeable stretching sheet with suction, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 17 No. 5, pp. 249–257.
- Devi, S. S. U. and Devi, S. P. A. (2016b). Numerical investigation of three-dimensional hybrid $\text{Cu-Al}_2\text{O}_3/\text{water}$ nanofluid flow over a stretching sheet with effecting Lorentz force subject to Newtonian heating, *Canadian Journal of Physics*, Vol. 94 No. 5, pp. 490–496.
- Devi, S. U. and Devi, S. A. (2017). Heat transfer enhancement of $\text{Cu-Al}_2\text{O}_3/\text{water}$ hybrid nanofluid flow over a stretching sheet, *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, Vol. 36, No. 2, pp. 419–433.
- Fang, T.G., Zhang J. and S.S. Yao (2009), Viscous flow over an unsteady shrinking sheet with mass transfer, *Chin. Phys. Lett.*, Vol. 26, No. 1, Article No. 014703.
- Gorla, R.S.R and Sidawi, I. (1994), Free convection on a vertical stretching surface with suction and blowing, *Appl. Sci. Res.*, Vol. 52, pp. 247–257.
- Harris, S. D., Ingham, D. B. and Pop, I. (2009), Mixed convection boundary-layer flow near the stagnation point on a vertical surface in a porous medium: Brinkman model with slip, *Transport in Porous Media*, Vol. 77 No. 2, pp. 267–285.
- Khan, W. A. and Pop, I. (2010), Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53 No. 11, pp. 2477–2483.
- Khanafer, K., Vafai, K. and Lightstone, M. (2003), Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 3639–3663.
- Kuznetsov, A. V. and Nield, D. A. (2013), The Cheng-Minkowycz problem for natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated by a nanofluid: A revised model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 65, pp. 682–685.
- Merkin, J.H. (1980), Mixed convection boundary layer flow on a vertical surface in a saturated porous medium, *J. Engineering Math.*, Vol. 14, pp. 301–313.
- Minkowycz, W.J., Sparrow, E.M. and Abraham, J.P. (Eds) (2013), Nanoparticle Heat Transfer and Fluid Flow, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, NY.
- Oztop, H.H. and Abu-Nada, E. (2008), Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 29, pp. 1326–1336.
- Rohini, A. M., Ahmad, S. and Pop, I. (2011), Boundary layer flow over a moving surface in a nanofluid beneath a uniform free stream, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 828–846.
- Roşca, N.C. and Pop, I. (2013a), Mixed convection stagnation point flow past a vertical flat plate with a second order slip: Heat flux case, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 65, pp. 102–109.
- Roşca, A.V. and Pop, I. (2013b), Flow and heat transfer over a vertical permeable stretching/shrinking sheet with a second order slip, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 60, pp. 355–364.
- Routbort, J.L., Sing, D., Timofeeva, E.V. and Yu, W. (2008). Pumping power of nanofluids in a flowing system, *J. Nanoscale Res.*, Vol. 13, pp. 931–937.
- Shampine, L.F, Gladwell, I. and Thompson, S. (2003), *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Suresh, S., Venkataraj, K. P., Selvakumar, P. and Chandrasekar, M. (2012), Effect of $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Cu}$ /water hybrid nanofluid in heat transfer, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 38, pp. 54–60.
- Tiwari, R.K., Das, M.K. (2007), Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 2002–2018.
- Wang, C.Y. (1989), Free convection on a vertical stretching surface, *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM)*, Vol. 69, pp. 418–420.

- Weidman, P. D., Kubitschek, D. G. and Davis, A. M. J. (2006), The effect of transpiration on self-similar boundary layer flow over moving surfaces, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 44, pp. 730–737.
- Yousefi, M., Dinarvand, S., Eftekhari Yazdi, M. and Pop, I. (2018), Stagnation point flow of an aqueous titania-copper hybrid nanofluid toward a wavy cylinder, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 28 No. 7, pp. 1716– 1735.