

Lineáris varietások egyenletei

1. \mathbb{R}^4 térben adottak az alábbi lineáris varietások:

$$L_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

a). Határozzuk meg az L_1 és L_2 dimenzióját, majd írjuk fel az L_1 és L_2 paraméteres és vektoriális egyenleteit!

b). Mutassuk ki, hogy $L_1 \parallel L_2$!

c). Igazoljuk, hogy $af(L_1, L_2)$ egy hipersík és írjuk fel az egyenletét!

2. Az \mathbb{R}^4 térben adottak az alábbi lineáris varietások:

$$L_1 = (0, 1, 1, 3) + \langle (1, -1, 2, 0), (1, -2, 1, 1), (1, 0, 3, 1) \rangle;$$

$$L_2 = \{M(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 3x_2 + 5x_4 - 9 = 0, x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 - 8 = 0, 4x_1 - 6x_2 + 21x_3 + 2x_4 - 33 = 0\};$$

$$L_3 = \{M(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 15x_1 - x_3 + 7x_4 - 9 = 0\}.$$

a). Határozzuk meg az L_i ($i=1,2,3$) dimenzióját!

b). Vizsgáljuk, hogy az $L_1 \parallel L_2$ és $L_2 \parallel L_3$ állítások igazak-e!

c). Határozzuk meg $af(L_1, L_2)$ halmazt!

3. Az \mathbb{R}^4 térben írjuk fel annak a hipersíknak az egyenletét, amely tartalmazza a $P(1, 1, 1, 1)$ és $O(0, 0, 0, 0)$ pontokat valamint az alábbi lineáris varietást:

$$L : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$$

4. Az \mathbb{R}^4 térben írjuk fel annak a legkisebb dimenziós lineáris varietásnak az egyenletét, amely tartalmazza az alábbi egyeneseket:

$$L_1 : \frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3};$$

$$L_2 : \frac{x_1 - 1}{3} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4 - 2}{-1}$$

5. Az \mathbb{R}^4 térben adottak az alábbi lineáris varietások:

$$L_1 : \frac{x_1 - 1}{3} = \frac{x_2 - 2}{-1} = \frac{x_3 + 1}{2} = \frac{x_4}{1};$$

$$L_2 = \{M(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -2x_2 + x_3 = 3, 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -12\};$$

a). Határozzuk meg az L_1 és L_2 dimenzióját, majd írjuk fel az L_1 és L_2 paraméteres és vektoriális egyenleteit!

b) Milyen kapcsolat van az L_1 és L_2 közt?

c) Írjuk fel az $af(L_1, L_2)$ egyenletét!