Affin geometria **1. FELADATLAP**

Vektorterek lineáris varietásai

1. $\mathbb{R}^4$-ben adottak az alábbi lineáris varietások.

$$\begin{aligned}&a=(2,1,2,1)\\&D=(1,3,0,0)+<(1,1,1,1)>\\&\alpha=(1,0,1,0)+<(2,1,3,-1),(1,0,2,-2)>\\&H=<(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)>\end{aligned}$$

a) Melyik áll fenn az alábbi állítások közül:
1. $a \in D$; 2. $a \in \alpha$; 3. $a \in H$; 4. $D||\alpha$; 5. $D||H$; 6. $\alpha||H$; 7. $D||H$; 8. $\alpha \subseteq H$.

b) Határozzuk meg az $af(\alpha \cup D)$ lineáris varietást!

c) Határozzuk meg a $D \cap H$ és $D \ \cap \alpha$ lineáris varietásokat!

2. $\mathbb{R}^4$-ben adottak az $a=(-1,1,2,0)$ és $b=(1,2,1,1)$ pontok, a $D=(2,1,0,0)+<(1,1,1,1)>$ egyenes, az $\alpha=(1,1,2,0)+<(1,0,1,0),(2,1,0,1)>$ sík és a $H=(1,0,0,0)+<(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)>$ hipersík.

a) Tanulmányozzuk a következő relációkat:
1. $a \in D$; 2. $a \in H$; 3. $D \subseteq \alpha$; 4. $\alpha \subseteq H$; 5 $D \subseteq H$.

b) Határozzuk meg a következő halmazokat: $af\{a,b\}$; $af\{a,D\}$; $af\{a,\alpha\}$; $af\{b,D\}$; $af\{D,\alpha\}$.

3. $\mathbb{R}^4$-ben adott a $D=(2,3,-1,1)+<(1,1,-1,1)>$ egyenes és az $\alpha=(2,4,1,2)+<(1,1,1,1),(0,1,0,1)>$ sík. Határozzuk meg a következő lineáris varietásokat:

a) $D \cap \alpha$; b) $af\{D,\alpha\}$.

4. $\mathbb{R}^4$-ben adott a $H=(4,5,-1,2)+<(-1,1,-2,0),(1,1,1,1),(2,2,-1,1)>$ hipersík és a $D=(1,2,\alpha,0)+<(1,\beta,-1,1)>$ egyenes. Határozzuk meg az α,β paramétereket úgy, hogy $D \subseteq H$!

5. $\mathbb{R}^4$-ben adottak az $a=(1,1,0,0)$, $b=(0,1,1,0)$, $c=(0,0,1,1)$ és $d=(1,0,0,1)$ vektorok valamint az $A=a+<b,c>$, $B=b+<c,d>$ lineáris varietások. Határozzuk meg az $A \cap B$ és $af\{A,B\}$ halmazokat!

6. $\mathbb{R}^4$-ben adottak az alábbi lineáris varietások:

$$\begin{aligned}&A=(1,-1,0,2)+<(1,1-1,0)>\\&B=(0,0,4,-1)+<(1,0,0,0),(0,1,0,0)>\\&C=(0,-2,1,2)+<(2,0,0,-1),(1,3,4,-1),(2,-12,-16,3)>\end{aligned}$$

Határozzuk meg :

1). a dimenzójukat;

2). az $A \cap B$, $A \cap C$ metszeteket;

3). $af\{A,B\}$, $af\{A,C\}$ affin burkolókat!

7. Legyenek M és N részhalmazai a V vektortérnek. Igazoljuk, hogy:

$$af\{M,N\}=af\{af(M),af(N)\}.$$

8. Egy vektortérben adottak az $A=a+<d_1>$, $B=b+<d_1,d_2>$ lineáris varietások. Határozzuk meg azt a minimális dimenziós C lineáris varietást, amelyre $A \subseteq C$ és $C||B$. Milyen esetben lesz $C=af(A,B)$?

9. Egy V vektortérben adott egy D egyenes és egy α sík úgy, hogy α nem párhuzamos D-vel. Igazoljuk, hogy létezik egyetlen A lineáris varietás úgy, hogy $dimA=3$, $D \subseteq A$ és $A||\alpha$.

10. Hány pontot tartalmaznak a $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,+,\cdot,\mathbb{Z}_3)$ vektortér lineáris varietásai?

11. Hogyan értelmezhető az $A,B \in (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,+,\cdot,\mathbb{Z}_3)$ szakasz felezőpontja? Ha $A,B,C \in (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,+,\cdot,\mathbb{Z}_3)$, akkor az ABC háromszög A csúcsához tartozó oldalfelezőn az A pont és a BC oldal felezőpontja által meghatározott egyenest értjük (hasonlóan értelmezhető a másik két oldalfelező is). Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,+,\cdot,\mathbb{Z}_3)$ térben a háromszög oldalfelezői párhuzamosak (nincs közös pontjuk)!

12. Egy 4 dimenziós vektortérben határozzuk meg
a) két egyenes
b) két sík
c) egy egyenes és egy sík
d) egy egyenes és egy hipersík
e) egy sík és egy hipersík
metszetének lehetséges dimenzióit és affin burkolójukat.

13. Legyen A és B két lineáris varietás úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Mutassuk ki, hogy A és B-n keresztül húzható egy-egy hipersík, amelyek párhuzamosak egymással.

14. Adottak az A és B lineáris varietások úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$, $dimA = dimB = p$. Mutassuk ki, hogy $A||B$ akkor és csakis akkor, ha A és B benne vannak egy $p+1$ dimenziós lineáris varietásban!

15. Egy n dimenziós vektortérben legyen L_1 egy p dimenziós és L_2 egy q dimenziós lineáris varietás ($p > q, p+q \leq n-1$) úgy, hogy $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ és L_1 nem párhuzamos L_2-vel. Határozzuk meg az $af(L_1 \cup L_2)$ dimenziójának lehetséges értékeit!

16. Az n dimenziós vektortérben legyen H_1, H_2 hipersík. Melyek a lehetséges értékei a $dim(H_1 \cap H_2)$-nek és $dim(af(H_1 \cup H_2))$-nek?

17. Egy n dimenziós vektortér affin struktúrájában legyen H egy hipersík és A_p egy p dimenziós lineáris varietás ($p < n-1$). Igazoljuk, hogy az alábbi relációk közül az egyik mindig fennáll:
1. $dim(H \cap A_p) = p-1$;
2. $H||A_p$.

18. Legyen A és B két lineáris varietás úgy, hogy $dimA = dimB = p$. Mutassuk ki, hogy A és B pontjai között létezik egy bijekció! Adjunk meg még legalább $p!-1$ bijekciót!

19. Minimálisan hány dimenziós vektortérben metszheti egymást *egyetlen* pontban egy m és egy n dimenziós lineáris varietás?

20. Igazoljuk, hogy ha egy négy dimenziós vektortér affin struktúrájában két hipersíknak van közös pontja, akkor van közös síkja is!

21. Legyen V egy vektortér és $A \in \mathcal{A}(V)$ egy lineáris varietás ($dimA \geq 1$) és legyen $c \notin A$.
a) Lineáris varietás-e az $\bigcup\limits_{x \in A} \text{af}(c,x)$ halmaz?
b) Igazoljuk, hogy: 1. $\text{af}(c,A) = \left[\bigcup\limits_{x \in A} \text{af}(c,x)\right] \cup [c + D(A)]$!
2. $\text{af}(c,A) = \bigcup\limits_{x,y \in A} \text{af}(c,x,y)$!

22. Mutassuk ki, hogy egy hermetikusan zárt páncélszekrényből egy 4 dimenziós térben élő tolvaj el tudja lopni a pénzt, anélkül, hogy kinyitná vagy feltörné a páncélszekrényt.

23. Egy n dimenziós V_n vektortérben legyen $L_1 = a + < u_1, u_2, ..., u_p >$ és $L_2 = b + < v_1, v_2, ..., v_p >$ két p illetve q dimenziós lineáris varietás, ahol $p+q = n$. Igazoljuk, hogy a $B = \{u_1, u_2, ..., u_p, v_1, v_2, ..., v_p\}$ rendszer akkor és csakis akkor bázisa a V_n vektortérnak, ha $dimL_1 \cap L_2 = 0$.

24. Ha $A, B, C \in \mathcal{A}(V)$ lineáris varietások úgy, hogy $A \cap B \neq \emptyset$, akkor fennáll az alábbi "moduláris" törvény:

$$A \subset C \Longrightarrow A \vee (B \cap C) = (A \vee B) \cap C,$$

ahol $A \vee B \stackrel{jel.}{=} \text{af}(A \cup B)$.