Affin geometria **4. FELADATLAP**

Affin koordináta-rendszerek. Affin leképezések

1. Legyen A, B két különböző pont az $\mathcal{A}$ valós affin térben, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \pm 1$ és C, D a következő két pont az $\mathcal{A}$-ban:

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A + \frac{\lambda}{\lambda - 1}B, \quad D = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{\lambda+1}B.$$

Ha E a (C,D) szakasz felezőpontja, akkor igazoljuk, hogy: $\overrightarrow{EA} = \lambda^2\overrightarrow{EB}$.

2. Legyenek A, B, C különböző pontok az $\mathcal{A}$ valós affin térben.

a) Legyen M (illetve N, P) a (B, C) (ill. $(C, A), (A, B)$)irányított szakaszt $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ arányban osztó pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

b) Ugyanazon feltételek mellett, mint az a) pontban legyen I egy rögzített pont az $\mathcal{A}$ affin térben és legyenek a $J, K \in \mathcal{A}$ pontok úgy, hogy $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CP}$ és $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{NB}$. Igazoljuk, hogy a (J, K) szakasz E felezőpontja teljesíti az alábbi összefüggést:

$$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CA} + \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CB}\right).$$

c) Ha az A, B, C pontok affin függetlenek és az M (ill. N, P) pont kollineáris B és C (ill. C és A, A és B)pontokkal, de különbözik a C (ill. A, B) ponttól és akkor igazoljuk, hogy az M, N illetve P pontok ugyanabban az arányban osztják a (B, C), (C, A) illetve (A, B) irányított szakaszokat.

3. Legyen A_1, A_2, A_3, A_4 négy pont az $\mathcal{A}$ valós affin térben; B_1, B_2, B_3 illetve B_4 az (A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_4) illetve az (A_4, A_1) szakaszok felezőpontjai; C és $D \in \mathcal{A}$ a következőképpen értelmezett pontok: $\overrightarrow{A_1C} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ és $\overrightarrow{A_3D} = \lambda\overrightarrow{A_3A_4}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Igazoljuk, hogy:

a) $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_4B_3}$;

b) $\overrightarrow{CD} = (1-\lambda)\overrightarrow{A_1A_3} + \lambda\overrightarrow{A_2A_4}$.

4. Legyenek az $A_1, A_2, ..., A_n$, $B_1, B_2, ..., B_n$ pontok az $\mathcal{A}$ valós affin térből. Tekintve a $G = \frac{1}{n}A_1 + \frac{1}{n}A_2 + ... + \frac{1}{n}A_n$ és $G' = \frac{1}{n}B_1 + \frac{1}{n}B_2 + ... + \frac{1}{n}B_n$ pontokat igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = n\overrightarrow{GG'}.$$

Sajátosan $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ és $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ véges pontrendszereknek akkor és csakis akkor ugyanaz a súlypontjuk, ha $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$.

5. Legyen $\mathcal{A}$ egy általános affin tér és $(V, +, ., K)$ a hozzárendelt vektortér, P_1, P_2, P_3, P_4 illetve P_1', P_2', P_3', P_4' pontok $\mathcal{A}$-ból úgy, hogy $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$ illetve $\overrightarrow{P_1'P_2'} = \overrightarrow{P_4'P_3'}$, bármely i=1,2,3,4 esetén. Legyen P_i'' az a pont amely osztja a (P_i, P_i') irányított szakaszt $\lambda \in K$ arányban, bármely i=1,2,3,4 esetén. Igazoljuk, hogy:

a) $\overrightarrow{P_1''P_2''} = \overrightarrow{P_4''P_3''}$;

b) ha $O = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3$ és $O' = \frac{1}{2}P_1' + \frac{1}{2}P_3'$, akkor az $O'' = \frac{1}{2}P_1'' + \frac{1}{2}P_3''$ pont az (O, O') irányított szakaszt szintén λ arányban osztja.

6. Legyenek az A, B, C affin független pontok az $\mathcal{A}$ általános affin térben (V a hozzárendelt K felett értelmezett vektortér), dim $A \geq 2$. Igazoljuk, hogy:

a) Ha a P és Q pontok az (A, B) illetve (A, C) irányított szakaszokat ugyanabban arányban metszik, akkor a $\overrightarrow{PQ}$ és BC vektorok kollineárisak.

b) Ha a P pont kollineáris az A és B pontokkal, $P \neq B$, és Q kollineáris az A és C pontokkal, $Q \neq C$ úgy, hogy a $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok kollineárisak, akkor a P és Q pontok az (A, B) illetve (A, C) irányított szakaszokat ugyanabban az arányban osztják (Thales tétele).

7. Legyenek az $A_1, A_2, ..., A_n$ affin független pontok az $\mathcal{A}_{n-1}$ affin térben ($n \geq 2$) és $B_1(B_2, ...,$ illetve B_n) osztja az (A_1, A_2) (illetve (A_2, A_3), ..., (A_n, A_1)) irányított szakaszt λ_1 (illetve $\lambda_2, ..., \lambda_n$) arányban, de különbözik az A_1, A_2 pontoktól (A_2 és A_3;...; illetve A_n és A_1). Igazoljuk, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $B_1, B_2, ..., B_n$ pontok affin függőek legyenek az, hogy $\lambda_1\lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = (-1)^n$. (Meneláosz tétele)

8. Legyenek az $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ affin független pontok az $\mathcal{A}_n$ affin térben ($n \geq 2$), B_i pedig λ_i arányban osztja az A_iA_{i+1} irányított szakaszt ($0 \leq i \leq n$), $A_{n+1} := A_0$. Minden $i \in \{0, 1, ..., n\}$ esetén jelöljük H_i-vel a $\{B_i\} \cup \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n\} \setminus A_i, A_{i+1}$ pontok által meghatározott hipersíkot. A $H_0, H_1, H_2, ..., H_n$ nem párhuzmos hipersíkoknak pontosan akkor van közös pontjuk, ha $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n = 1$. (Ceva tétele)

9. Egy affin térben adottak az $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, ..., e_n)$ és $\mathcal{R}' = (O', e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ Descartes-féle koordináta-rendszerek. Írjuk fel az áttérési képleteket az $\mathcal{R}$ és $\mathcal{R}'$ koordináta-rendszerek közt, ha:
1 . $n = 3$ és $e'_1(2, 3, 5), e'_2(0, 1, 4), e'_3(5, 7, -1),\ O'(0, 3, -1)$;
2 . $n = 4$ és $e'_1(9, -8, 5, 10), e'_2(3, 2, 2, 5), e'_3(5, -8, 5, 8), e'_4(11, -13, 9, 15),\ O'(0, 3, -1)$.

10. Egy X affin térben adott a $B(1, 1, 0, 0)$ pont az $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ affin koordináta-rendszerhez viszonyítva.
a) Igazoljuk, hogy $\mathcal{S} = (A_3, A_1, A_4, B, A_2)$ affin koordináta-rendszer!
b) Írjuk fel az áttérési képleteket az $\mathcal{R}$ és $\mathcal{S}$ között!
c) Az M pont koordinátái az $\mathcal{S}$ koordináta-rendszerben $(5, -1, 0, 2)$. Melyek a régi koordinátái?
d) Egy affin résztér az $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - 2 = 0 \end{cases}$ egyenletekkel adott. Melyek az egyenletei az $\mathcal{S}$ koordináta rendszerben?
e) Egy affin résztér egyenletei az $\mathcal{S}$ koordináta rendszerben :$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$. Határozzuk meg egyenleteit a régi koordináta rendszerben!

11. A C^4 affin térben adott az $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ affin koordináta rendszer.
a) Igazoljuk, hogy erre a koordináta rendszerre vonatkoztatva az $A_5(1, 1, 1, 0), A_6(1, 1, 0, 1),\ A_7(1, 0, 1, 1),$ $A_8(0, 1, 1, 1)$ pontok affin függetlenek!
b) Írjuk fel az áttérési képleteket az $\mathcal{R}$ koordináta rendszerről az $\mathcal{S} = (A_0, A_5, A_6, A_7, A_8)$ koordináta rendszerre!
c) A_9-cel jelölve az $\mathcal{R}$ koordináta-rendszerre vonatkoztatott $(1, 1, 1, 1)$ pontot írjuk fel az áttérési képleteket az $\mathcal{R}$ koordináta-rendszerről az $T(A_9, A_5, A_6, A_7, A_8)$ koordináta-rendszerre!

12. A C^3 affin térben tekintsük az $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ affin koordináta-rendszert és az $[A_4]_\mathcal{R} = (1, 1, 1)$, $[B]_\mathcal{R} = (1/3, 1/3, 1/3)$ pontokat.
a) Írjuk fel az A_0 és B pontoknak az $\mathcal{S} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ koordináta-rendszerre vonatkoztatott koordinátáit!
b) Írjuk fel az A_0 és A_4 pontoknak a $\mathcal{T} = (B, A_1, A_2, A_3)$ koordináta-rendszerre vonatkoztatott koordinátáit!

13. A C_2 affin térben adott az $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2)$ affin koordináta-rendszer és ebben az $A(a, 0), B(0, b)$ pontok.
a). Írjuk fel az AB egyenes egyenletét az $\mathcal{R}$ koordináta-rendszerhez viszonyítva!
b). Írjuk fel az AB egyenes egyenletét az $\mathcal{S}(A_1, A_2, A_3)$ affin koordináta-rendszerhez viszonyítva!
c). Határozzuk meg az $\{M\} = AB \cap A_1A_2$ pont koordinátáit az $\mathcal{R}$ majd az $\mathcal{S}$ koordináta-rendszerben. Ellenőrizzük az eredményt kiszámolva az M koordinátáit kétféleképpen az S koordináta-rendszerben! (felhasználva az áttérési képleteket és direkt: felhasználva a két egyenes egyenletét az S-ben).

14. Az X illetve Y affin tereket az (O, e_1, e_2, e_3) illetve (O', e'_1, e'_2) koordináta rendszerhez viszonyítjuk. Adottak az $A_0(0, 1, 0), A_1(0, 1, 1),\ A_2(1, 1, 1),\ A_3(0, 0, 1),\ A'_0(1, 2),\ A'_1(2, 0),\ A'_2(4, -1),\ A'_3(5, -1)$ pontok úgy, hogy $f(A_i) = A'_i$, $i = \overline{0, 3}$, ahol $f : X \to Y$ affin transzformáció.
a). Határozzuk meg az f nyomának mátrixát az (e_1, e_2, e_3) illetve (e'_1, e'_2) bázispárra nézve!

b). Határozzuk meg az f egyenleteit!
c). Határozzuk meg az $M'(2,3)$ pont ősképét!
d). Határozzuk meg az Y-ban levő azon egyeneseket, amelyek ősképe egy az $x_1 = x_2 = x_3$ egyenessel párhuzamos sík!

15. Egy (O, e_1, e_2, e_3) Descartes-féle koordináta-rendszerhez viszonyított X affin síkban legyen $A(-1,2)$, $A'(2,3)$ két pont és f' az X vektortér endomorfizmusa úgy, hogy $f'(e_1) = (-2,3)$, $f'(e_2) = (1,4)$.
a) Határozzuk meg annak az $f : X \to Y$ affin transzformációnak az egyenleteit, amelynek nyoma f' és amelyre $f(A) = A'$!
b) Határozzuk meg a $B' = f(B)$ pontot, ahol $B(0,4)$!
c) Írjuk fel a $d : x_1 - 2x_2 + 3 = 0$ egyenes $f(d) = d'$ képének az egyenletét!

16. Az X affin síkot az (O, e_1, e_2) Descartes-féle koordináta-rendszerhez viszonyítjuk. Adott az $f : X \to X$ affin transzformáció úgy, hogy :

$$\begin{cases} x' = -15x + 25y + 41 \\ y' = -9x + 15y + 22 \end{cases}$$

a) Igazoljuk, hogy f affin transzformáció és írjuk fel a nyomának mátrixát!
b) Igazoljuk, hogy létezik egyetlenegy A pont úgy, hogy $f(A) = A$!
c) Igazoljuk, hogy az X sík általi f képe egy d egyenes és írjuk fel ennek az egyenesnek az egyenletét !

17. Egy (O, e_1, e_2, e_3) koordináta rendszerhez viszonyított X affin térben adottak az $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(1,1,-1)$, $A_1'(1,-10,5)$, $A_2'(-4,-2,6)$, $A_3'(2,-2,0)$ pontok. Legyen $f : X \to X$ egy affin transzformáció, amelyre $f(A_i) = A_i'$, $i = 1,2,3$ és $f(O) = O'(-3,-6,7)$.
a) Határozzuk meg az f egyenleteit!
b) Írjuk fel az f -béli képét a $d : x = z, y = 0$ egyenesnek!
c) Igazoljuk, hogy $f(X)$ egy α sík, amelynek adjuk meg az egyenletét!
d) Legyen M egy változó pont az α síkban és $M' = f(M)$. Igazoljuk, hogy létezik $O_1 \in \alpha$ és k skalár úgy, hogy $\overrightarrow{O_1M'} = k\overrightarrow{O_1M}$. Határozzuk meg az O_1 koordinátáit és a k skalárt!

18. Határozzuk meg a következő affinitások fix pontjait és fix irányait! (Tételezzük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)
a) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$;
b) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$;
c) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -6 & 7 & -15 \\ 1 & -4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

19. Mutassuk ki, hogy egy affin transzformáció bijektív akkor és csakis akkor, ha nyoma bijektív!

20. Legyen X affin tér, amelyet az (O, e_1, e_2, e_3) koordináta-rendszerhez viszonyítunk és $f : X \to X$ affin transzformáció úgy, hogy : $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases}$
a) Mutassuk ki, hogy f affinitás!
b) Határozzuk meg az f fix egyeneseit!
c) Határozzuk meg az f fix síkjait! (Tételezzük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

21. Egy (O, e_1, e_2, e_3) koordináta rendszerhez viszonyított X affin térben adottak az $A_1(2,0,0)$, $A_2(0,0,1)$, $A_3(1,1,-1)$, $A_1'(0,-2,-2)$, $A_2'(4,4,5)$, $A - 3'(-3,-3,-5)$ pontok. Legyen $f : X \to X$ egy affin transzformáció, amelyre $f(A_i) = A_i', i = 1,2,3$ és $f(O) = O'(2,2,2)$.
a) Határozzuk meg az f egyenleteit!
b) Írjuk fel az f -béli képét a $d : x = z, y = 0$ egyenesnek!
c) Határozzuk meg az f fixpontjainak halmazát!

22. a) Legyen O egy rögzített pont az X affin térben. Ekkor bármely $f \in Af(X)$ afinitás egyértelműen felírható $f = t \circ g$ lakban, ahol $t \in T(X)$ egy transzláció és $g \in Af(X,Q)$ egy centrális affinitás. ($Af(X,Q) = \{g : X \to X | g$ affinitás és $g(Q) = Q\})$

b) Az $f : \begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$ affinitást írjuk fel az $f = t \circ g$ alakba, ahol $t \in T(X)$ egy transzláció és $g \in Af(X,Q)$ egy centrális affinitás és $Q(1,2,3)$.

23. Adottak az A, B, C általános affin terek és a hozzájuk rendelt U, V, W vektorterek ugyanazon $\mathbb{K}$ test felett. Legyenek az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ leképezések úgy, hogy a $g \circ f : A \to C$ leképezés affin transzformáció.

Mutassuk ki, hogy:

a) Ha a g leképezés affin transzformáció és injektív, akkor az f is affin transzformáció.

b) Ha az f leképezés affin transzformáció és szürjektív, akkor az g is affin transzformáció.

Felhasználva ezeket az eredményeket mutassuk ki, hogy egy bijektív affin transzformáció inverze szintén affin transzformáció.

24. Adott $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ egy affin tér, ahol $\mathcal{A} \neq \emptyset$, V a K test felett értelmezett vektortér és $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ az affin tér strukturáját megadó függvény. Legyen $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$. Ha $\varphi_A : A \to V$ és $\varphi_B : \mathcal{A} \to V$ a következő bijektív leképezések: $\varphi_A(C) = \varphi(A,C)$ és $\varphi_B(C) = \varphi(B,C), \forall C \in \mathcal{A}$.

Igazoljuk, hogy $f = \varphi_B^{-1} \circ \varphi_A$ egy $\overrightarrow{AB}$ vektorral való párhuzamos eltolás az $\mathcal{A}$ affin térben!

25. Legyen $\mathcal{A}$ egy nem üres affin tér és $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ egy függvény. Határozzuk meg az f természetét tudva, hogy kommutál az $\mathcal{A}$ bármely transzlációjával.

26. Adott az $\mathcal{A}$ általános affin tér, a hozzárendelt V vektortér a K test felett, $h_k : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ egy $O \in \mathcal{A}$ középpontú és $k \neq 0$ arányú homotétia, $h_{1/k} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ az h_k homotétia inverze és $t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ egy transzláció egy $\vec{v} \in V$ vektorral. Mutassuk ki, hogy $h_k \circ t \circ h_{1/k} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ egy transzláció $k\vec{v}$ vektorral.

27. Adott az $\mathcal{A}$ valós affin tér, $O \in \mathcal{A}$ és $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ egy O fixponntal rendelkező affin endomorfizmus, úgy, hogy $f^3 = 1_{\mathcal{A}}$ $(f \neq 1_{\mathcal{A}})$. Tekintsük a $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $p(M) = \frac{1}{3}M + \frac{1}{3}f(M) + \frac{1}{3}f^2(M)$ függvényt.

a) Igazoljuk, hogy p egy O fixponntal rendelkező affin endomorfizmus és $p^2 = p$ (az ilyen tulajdonsággal rendelkező p affin leképezéseket *projekció*knak nevezzük).

b) Mutassuk ki, hogy bármely $P \in \mathcal{A}$ esetén $p(P)$ az f fixpontja.

c) Igazoljuk, hogy ha $A \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $f(A) \neq A$, akkor a $\{A, f(A), f^2(A)\}$ pontrendszer affin független.

d) Ha $dim\mathcal{A} = 3$ és $B \in \mathcal{A}$ egy olyan pont, hogy az $\{A, f(A), f^2(A), B\}$ rendszer affin független, akkor igazoljuk, hogy az $R = \{A, f(A), f^2(A), p(B)\}$ affin független pontrendszer.

e) Határozzuk meg az f egyenleteit az R koordináta-rendszerben.

28. Az $\mathcal{A}_3$ valós affin térben adott az $O'(2,-1,2)$ pont az $R = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ Descartes-féle koordinátarendszerben.

a) Határozzuk meg az O' pontra vonatkozó $s : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ szimmetria egyenleteit az R koordinátarendszerben. $(\overrightarrow{O's(M)} = -\overrightarrow{O'M}, \forall M \in \mathcal{A}.)$

b) Határozzuk meg az O' középpontú $5/2$ arányú $h : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ homotétia egyenleteit az R koordinátarendszerhez viszonyítva.

c) Határozzuk meg az $A = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C$ pont transzformáltjait az a), b) pontokban meghatározott transzformációk által, ahol $B(2,-4,5)$ és $C(6,-8,1)$. Adjunk meg két különböző módszert az A koordinátáinak meghatározására.

d) Határozzuk meg az $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ egyenes képét az s és h transzformációk által.

e) Határozzuk meg az $\alpha : x + y + z - 1 = 0$ sík képét az s és h transzformációk által.