Affin geometria **5. FELADATLAP**

Euklideszi affin terek

1. Legyen $ABCD$ egy paralelogramma az E_n euklideszi térben. Igazoljuk, hogy:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2.$$

2. Tetszőleges $A, B, C, D \in E_n$ pontok esetén:

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

3. Egy ortonormált koordináta rendszerhez viszonyítva az E_n euklideszi affin térben számítsuk ki:

a) az $M(-2,5,2,3)$ pontok távolságát a H: $8x_1-4x_3-x_4-8=0$ hipersíktól;

b) a H_1 és H_2 hipersíkok közti távolságot, ahol H_1: $2x_1-3x_2+6x_4-21=0$ és H_2: $4x_1-6x_2+12x_4+14=0$

M:b) 4.

4. Az E_n euklideszi teret az $(O, \overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OE_2},\ldots,\overrightarrow{OE_n})$ egy ortonormált koordináta rendszerhez viszonyítjuk. Határozzuk meg az $(O, E_1, \ldots, E_n)$ szimplex azon magasságának a hosszát, amely átmegy az O ponton és merőleges a szemközti hiper-oldallapra.

M: $1/\sqrt{n}$

5. Az E_3 euklideszi térben egy ortonormált koordináta rendszert tekintünk és legyen az $O(0,0,0)$ pontban egy fényforrás. Egy O pontból kiinduló fénysugár ráesik az $x+2y+3z-11=0$ egyenletű tükör felületére. A fénysugár párhuzamos a $(2,3,1)$ vektorral. Határozzuk meg:

a) azt az I pontot, ahol a fénysugár megütközik a tükrön;

b) a beesési szöget;

c) a visszavert sugarat tartalmazó egyenes egyenletét.

M: $I(2,3,1)$; $\sin\alpha=11/14$; $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{26}$.

6. Határozzuk meg az $A(4,2,-5,1)$ pont távolságát a P síktól, ahol $P:\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3+2x_4=9\\ 2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=12.\end{cases}$

M: 5.

7. Adottak $\boldsymbol{R}_4$-ben a $P_1= (4,5,3,2)+<(1,2,2,2),(2,-2,1,2)>$ és $P_2 = (1,-2,1,3)+<(2,0,2,1),(1,-2,0,-1)>$ síkok. Határozzuk meg a köztük levő távolságot!

8. Tekintsünk $\boldsymbol{R}^n$-ben egy hiperkockát, ahol a 2^n darab csúcsai koordinátái $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, ahol $\varepsilon_i\in\{0,1\}$. Mutassuk ki, hogy a csúcsok vetületei egyik testátlóra egyenlő szakaszokra osztják ezt az átlót. Határozzuk meg azon csúcsok számát, amelyek ugyanabba a pontba vetítődnek.

9. Legyen $A_0A_1\ldots A_n$ egy szabályos szimplex E_n-ben ($\left\|\overrightarrow{A_iA_j}\right\|=1, \forall i\neq j$ esetén). Határozzuk meg az $F_k=af\{A_0,\ldots, A_k\}$ és $F_k' = af\{A_{k+1},\ldots, A_n\}$ a szemközti „lapok” közti d_k távolságot és igazoljuk, hogy ez a távolság egyenlő e két lap súlypontjai közti távolsággal.

10. Legyenek $a_1,\ldots, a_r\in\boldsymbol{R}_n$ és $G(a_1,\ldots, a_r)$ ezen vektorok Gram-determinánsa. Igazoljuk, hogy :

$$0\le G(a_1,\ldots, a_r)\le \|a_1\|^2\cdot\ldots\cdot\|a_r\|^2.$$

11. Legyenek az L_1, L_2, L_3 lineáris varietások az E_n-ben, $\dim L_1+\dim L_2 \ge n$. Igazoljuk, hogy ha $L_1\perp L_2$, $L_2\perp L_3$, akkor $L_1\perp(L_2\cap L_3)$.

12. Az E_4 euklideszi térben (egy ortonormált koordináta rendszerhez viszonyítva) adottak az L_1, L_2 affin részterek. Igazoljuk, hogy L_1 merőleges L_2-re, ahol L_1: $x_1-x_2+3x_3+x_4=3$ és L_2: $\begin{cases}x_1+x_2-3=0\\ 4x_1+x_2-x_3=3\\ 2x_1+x_2-x_4=5.\end{cases}$

13. Az E_4 euklideszi térben (egy ortonormált koordináta rendszerhez viszonyítva) adott az $M(2,2,5,3)$ pont és az L $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 9 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$ affin résztér.

a) Írjuk fel annak a legnagyobb dimenziós lineáris varietásnak az egyenletét, amely átmegy az M ponton és merőleges az L-re!
b) Határozzuk meg az M pont M' ortogonális vetületét az L affin résztérre!
c) Határozzuk meg az M pont távolságát az L-től!

14. Az E_4 térben adott az L: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4 = 0 \end{cases}$ résztér és az $A(1,-1,0,0)$ pont. Határozzuk meg azt a maximális dimenziós lineáris varietást, amely merőleges L-re és átmegy az A ponton.

15. Az $\boldsymbol{R}_4$ euklideszi térben adott az $A(3,-3,0,1)$ pont, a H_0: $2x_1-3x_2+x_3-x_4=0$ hipersík és a d: $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3}{-1} = \frac{x_4}{3}$ egyenes. Határozzuk meg a H hipersík egyenletét, amely tartalmazza a d egyenest, átmegy az A ponton és merőleges a H_0 hipersíkra.

M: $H = (3,-3, 0,1)+<(1,2,-1,3),(2,-3,1,-1),(3,-4,0,1)>$.

16. Az $\boldsymbol{R}_4$euklideszi térben adott a H_0: $x_1-x_2-x_4=0$ hipersík és az L: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ affin résztér. Írjuk fel annak a hipersíknak az egyenletét, amely tartalmazza az L-t és merőleges a H_0-ra!

17. Az E_n affin euklideszi térben az (O, e_1, e_2, e_3, e_4) ortonormált koordináta rendszerhez viszonyítva adottak az $A\,(1,1,1,1)$, $B(0,1,-1,0)$ pontok, $d_1(1,-1,0,1)$, $d_2(2,1,3,1)$ vektorok. Igazoljuk, hogy az a legkisebb résztér, amelyik átmegy az A és B pontokon, párhuzamos a d_1, d_2 vektorokkal egy hipersík lesz. Írjuk fel az egyenletét!

M: $H = (1,1,1,1)+<(1,0,2,1),(1,-1,0,1),(2,1,3,1)>$.

18. Egy ortonormált koordináta rendszerhez viszonyított affin euklideszi térben adott az $A(3,-3,0,0)$ pont, a H: $2x_1-3x_2+x_3-x_4=0$ hipersík. Határozzuk meg az A pont A' szimmetrikusát a H síkra nézve.

M: $A'(-1, 3,-2,2)$.

19. Az E_n-ben adottak az L_1, L_2 azonos dimenziós, párhuzamos lineáris varietások. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek egyenlő távolságra vannak az L_1 és L_2 lineáris varietásoktól!

M: Egy hipersík, amely merőleges az $af(L_1, L_2)$-re.

20. Legyenek az L_1, L_2 affin résztérek az E_n-ben, $\dim L_1 = \dim L_2 = \dim (L_1 \cap L_2) +1$. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek egyenlő távolságra vannak L_1-től és L_2-től !

M: Két hipersík.

21. Adottak $\boldsymbol{R}_4$-ben a P_1: $x_1=x_2=0$ és P_2: $x_3=x_4=0$ síkok. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek egyenlő távolságra vannak a P_1 és P_2 síkoktól. Igazoljuk, hogy ez a mértani hely 2 síkcsalád!

M: $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$. $x_1-x_3= \alpha(x_4-x_2)$ és $\alpha(x_1+x_3)= x_4+x_2$ illetve $x_1-x_3= \beta(x_4+x_2)$ és $\beta(x_1+x_3)= x_4-x_2$.

22. Legyenek az A, B, C, D pontok az E_n térből. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyre $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$!

M: Egy hipersík.

23. Legyenek A, B, C pontok az E_n térben. Határozzuk meg azon M pontok mértani helyét, amelyekre: $\left\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{CM}\right\|$!

M: Egy hipergömb.