Affin geometria **3. FELADATLAP**

Általános affin tér

1. Igazoljuk, hogy a $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ leképezés, amely az $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ általános affin teret értelmezi szürjektív! Injektív is?

2. Az $\mathbb{R}^3$-ban adott egy P sík. Mutassuk ki, hogy létezik egy $\varphi : P \times P \to \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $(P, \mathbb{R}^2, \varphi)$ egy általános affin tér legyen!

3. Egy K_n vektortérben, ahol K egy tetszőleges test adott egy p dimenziós A lineáris varietás. Szerkesszünk egy $\varphi : A \times A \to: K^p$ leképezést úgy, hogy (A, K^p, φ) egy általános affin tér legyen!

4. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2^2$ vektorteret, ahol $\mathbb{Z}_2$ a 2-vel való osztás maradékosztályainak a teste. Legyen $P = \{A_{ij} | i, j = 0, 1\}$ egy 4 elemű halmaz és $\varphi : P \times P \to \mathbb{Z}_2^2$ úgy, hogy $\varphi(A_{ij}, A_{kl}) = (\widehat{l - j}, \widehat{k - i})$. Mutassuk ki, hogy $(P, \mathbb{Z}_2^2, \varphi)$ egy általános affin tér! Határozzuk meg a P összes affin alterét!

5. Legyen $\mathbb{Z}_3^2$ a 3-mal való osztás maradékosztályainak a teste. Legyen $P = \{A_{ij} | i, j = 0, 1, 2\}$ egy 9 elemű halmaz és $\varphi : P \times P \to \mathbb{Z}_3^2$ úgy, hogy $\varphi(A_{ij}, A_{kl}) = (\widehat{l - j}, \widehat{k - i})$. Mutassuk ki, hogy $(P, \mathbb{Z}_3^2, \varphi)$ egy általános affin tér! Határozzuk meg a P affin altereit!

6. Legyen $\mathcal{A}$ egy általános affin tér és V a hozzárendelt, K feletti vektortér, $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Mutassuk ki, hogy a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \in V$ vektor nem függ az M pont megválasztásától!

7. Legyen $\mathcal{A}$ egy általános affin tér és V a hozzárendelt, K feletti vektortér, $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda \neq 0$. Mutassuk ki, hogy a $P \in \mathcal{A}$ pont akkor és csakis akkor az $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ pontrendszer baricentruma a $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ skalárokkal, ahol $\mu_i = \lambda_i \lambda^{-1}$, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \vec{0}$.

8. Legyen $\mathcal{A}$ egy nem üres, általános affin tér és $(V, +, \cdot, K)$ a hozzárendelt vektortér, $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{A}''$ két nem üres résztere az $\mathcal{A}$ affin térnek, V' és V'' a hozzájuk rendelt vektorterek.

a) Igazoljuk, hogy az $L = \{\overrightarrow{PQ} \in V | P \in \mathcal{A}', Q \in \mathcal{A}''\}$ halmaz a V vektortérben lineáris varietás és határozzuk meg az irányterét. Ha $dim\mathcal{A} = n < n' + n''$, ahol $n' = dim\mathcal{A}'$ és $n'' = dimA''$, és az $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ affin tereknek van egy közös pontjuk, ellenőrizzük, hogy $A' \cap A''$ egy affin résztér, amelynek a dimenziója nagyobb vagy egyenlő, mint $n' + n'' - n$.

b) Igazoljuk, hogy $A' \cap A'' \neq \emptyset$ akkor és csakis akkor, ha L résztere V-nek. Határozzuk meg ezt a részteret!

c) Ha A' illetve A'' tartalmazza a P_0' illetve a P_0'' pontokat, akkor igazoljuk, hogy $A' \cap A'' \neq \emptyset$ akkor és csakis akkor ha $\overrightarrow{P_0' P_0''} \in V' + V''$.

d) Ha $dimA = n$ és $A' \cap A'' = \emptyset$, igazoljuk, hogy létezik két hipersík $H_1, H_2 \subset \mathcal{A}$ úgy, hogy $A' \subset H_1$, $A'' \subset H_2$ és H_1 szigorúan párhuzamos H_2-vel.