

1. Szeminárium

1. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) A számtani, mértani, harmonikus közép közötti kapcsolat:

$$\max\{x_1, \dots, x_n\} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \min\{x_1, \dots, x_n\}.$$

(b) Cauchy-Bunjakovski-Schwarz: $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2$

2. Határozzuk meg: $\sup H, \inf H, \max H, \min H$ (ha léteznek).

(a) $H = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$

(b) $H = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in N\}$

3. Adjunk példát korlátos sorozatra, amely divergens.

4. Adjunk példát konvergens sorozatra, amely nem monoton.

5. Adjunk példát konvergens sorozatra, amely nem korlátos. (nem létezik)

6. Adott az $a_n = \frac{4^n}{1 - 3 \cdot 4^n}$ sorozat.

(a) monoton-e?

(b) korlátos-e?

2. Szeminárium

1. Határozzuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték adott ε sugarú környezetébe?

(a) $a_n = \frac{n+2}{3n-8}, \varepsilon = 10^{-3}$

(b) $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+2}, \varepsilon = 10^{-2}$

(c) $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{1+2+3+\dots+2n}, \varepsilon = 0,001$

2. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából. Határozzuk meg a sorozatok határértékeit is.

(a) $a_n = \frac{n+1}{n}$

- (b) $a_n = \frac{n-1}{n+2}$
- (c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n^2}$
- (d) $a_n = \frac{5n-2}{5-10n}$
- (e) $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n}$
- (f) $a_n = \frac{5^n}{4^{n-2}}$
- (g) $a_n = \left(\frac{n^2-5}{2n^2}\right)^n$

3. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából. Határozzuk meg a sorozatok határértékeit is.

- (a) $a_n = \frac{n^2+2n-3}{5-2n^2}$
- (b) $a_n = \frac{1+\dots+n}{2n-3}$
- (c) $a_n = \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n$
- (d) $a_n = \sqrt{9n^2+2n-1} - 3n$

3. Szeminárium

1. Adott az alábbi sorozat: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.
Határozzuk meg:

- (a) $a_1 = ?, a_2 = ?, a_3 = ?$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$ (fogó alkalmazása)

2. A monoton és korlátos sorozatok konvergencia tételét alkalmazva, igazoljuk, hogy $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$ konvergens.

3. Legyen $\alpha > 0$, $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}} \right)$; $a_0 > 0$. Igazoljuk, hogy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{\alpha}$.

4. Igazoljuk a határértékek létezését (Cauchy kritériuma):

- (a) $a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{3^n}$.

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

5. Cauchy kritérium segítségével mutassuk ki, hogy az $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ sorozat divergens.
6. Sorozatok határértékének kiszámítása, példák határozatlan esetekre ($0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, a^∞):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{2}{n} \right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot 3n^2 \right)$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot 5n \right)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 3} \right)$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n+1}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n - 1}{3n^2 - n + 1} \right)^{n^3}$

4. Szeminárium

1. Határozzuk meg az $a_n = \sqrt[p]{1^p + 2^p + \cdots + n^p}$; $p \geq 1$ sorozat határértékét (fogó).

2. Adott az $a_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Számítsuk ki:

(a) $a_1, a_2, a_3 = ?$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$ (fogó)

3. Határozzuk meg a lenti sorozatok határértékeit:

(a) $a_n = \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$

$$(b) \ a_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - 2\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}$$

$$(c) \ a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$(d) \ a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+3} \right)^n$$

4. Számítsuk ki a Cezaro-Stolz tétel segítségével (illetve annak következményeivel) az alábbi határértékeket:

$$(a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$$

$$(b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$(c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \cdots + \frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d} \right]$$

$$(d) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$(e) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n} \right)$$

$$(f) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n}, \ a > 0$$

5. Szeminárium

1. Igazoljuk definíció szerint az alábbiakat:

$$(a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

$$(b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$$

2. Cauchy kritérium segítségével mutassuk ki, hogy az alábbi sorozatok konvergensek:

$$(a) \ a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$(b) \ a_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n}$$

3. Cauchy kritérium segítségével mutassuk ki, hogy az $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ sorozat divergens.

4. Alkalmazzuk Cezaro-Stolz tételét az alábbi sorozatok határértékeinek kiszámításához:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad a_n &= \frac{n}{2^n} \\
\text{(b)} \quad a_n &= \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \\
\text{(c)} \quad a_n &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

6. Szeminárium

1. Vizsgáljuk meg a következő sorok természetét:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad &\text{összehasonlítási krit.: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\text{(b)} \quad &\text{hányados krit.: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \\
\text{(c)} \quad &\text{gyökkrit.: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n+1} \right)^n \\
\text{(d)} \quad &\text{Leibnitz krit.: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}
\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) \\
\text{(b)} \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2^n} \right)
\end{aligned}$$

7. Szeminárium

1. Vizsgáljuk meg az alábbi váltakozó előjelű sorok természetét:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \\
\text{(b)} \quad &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \\
\text{(c)} \quad &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}
\end{aligned}$$

2. Melyek konvergenssek a lenti sorokból?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4 8^n}$$

- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 7^n}{8^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1)5^n}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!2^n}{3^{2n}}$

3. Abszolút vagy feltételesen konvergense-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n^2+3}$ sor?

4. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ sor összegét.

8. Szeminárium

1. Definíció szerint igazoljuk:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 3) = 1$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$
- (c) $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x) \exp x$
- (d) $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{e^x - 1}$

2. Számítsuk ki a következő határértékeket:

- | | | |
|--|--|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{10-2x}{5x^2-7x+10}$ | h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ | o. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x^{1+x}}$ |
| b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5x}{x}$ | i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp 5x - \exp 3x}{x}$ | p. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{x^2}$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ | j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp 4x^3 - 1}{2x^2}$ | q. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)^x$ |
| d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$ | k. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{ x }$ | r. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{3+x} \right)^x$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{37x^{20} - 3x + 1}{21x^{20} - x^{14} + 5}$ | l. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$ | s. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ |
| f. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})$ | m. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^3+x+2}$ | t. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{(x^2-x-2)^{20}}$ |
| g. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ | n. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x+1}{x^3+x+2}$ | u. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3-12x+16)^{10}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ |

9. Szeminárium

1. Számítsuk ki a következő határértékeket:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n ax}{bx^n}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x^2 + 2x}{2}}{x^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x^8 - x + 8}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+3x}}{x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2}$

2. Vizsgáljuk meg az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvények folytonosságát:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1, \\ -1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

3. Az a paraméter függvényében tanulmányozzuk az alábbi függvények folytonosságát:

(a) $f: [0, 2] \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 3ax + 3, & \text{ha } x \in (1, 2]; \end{cases}$

$$(b) \ f : [2, 4] \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}, & \text{ha } x \in [2, 3) \\ \frac{ax}{9} + \frac{1}{3}, & \text{ha } x \in [3, 4]; \end{cases}$$

4. Határozzuk meg az paraméter értékét úgy, hogy létezzen a függvény határértéke 1-ben:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 6(x-1)}{\sin 2(x-1)}, & \text{ha } x < 1 \\ \sqrt{a^2 + \frac{4a}{\exp(x-1)}} + 4, & \text{ha } x > 1; \end{cases}$$

10. Szeminárium

1. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletek rendelkeznek gyökökkel a megadott intervallumon:

$$(a) \ 2^x = x^3, \quad (1, 2); (9, 10)$$

$$(b) \ (x^2 - 1)2^x = 1, \quad (1, 2)$$

2. Igazoljuk, hogy alábbi függvények Darboux tulajdonságúak:

$$(a) \ f : [0, 3] \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 1; & \text{ha } x \in [0, 1] \\ \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}; & \text{ha } x \in (1, 3]; \end{cases}$$

$$(b) \ f : [-1, 1] \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in [-1, 0) \\ 1 - x^2, & \text{ha } x \in [0, 1]; \end{cases}$$

3. Írjuk fel az érintő egyenletét az $x_0 = 1$ pontban az $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ függvényhez.

4. Igazoljuk, hogy az $f : (-\frac{1}{2}, +\infty) \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x), & \text{ha } x \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ 2x, & \text{ha } x \in (0, +\infty); \end{cases}$ deriválható.

5. Határozzuk meg a paramétereket úgy, hogy az $f : R \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} a+b, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x^2+1}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$ deriválható legyen.

6. Vizsgáljuk meg, hogy deriválható-e az

$$(a) \ f : (0, \infty) \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2}, & \text{ha } x \in (0, 2] \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4}, & \text{ha } x \in (2, \infty); \end{cases} \quad \text{függvény?}$$

$$(b) \ f : (0, \infty) \longrightarrow R, \quad f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & \text{ha } x \in (0, e] \\ ax+b, & \text{ha } x \in (e, \infty); \end{cases} \quad \text{függvény?}$$

7. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 4}} \frac{x^2 + 2x}{y - x}$$

$$(b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$$

$$(c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(e) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 4}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

8. Vizsgáljuk meg az $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ folytonosságát az origóban.

11. Szeminárium

1. Érvényesül-e Rolle-tétele az alábbi függvényekre:

$$(a) f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \in [-1, 0] \\ x, & \text{ha } x \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$(b) f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} ?$$

2. Alkalmazható-e Lagrange tétele az $f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [1, 2] \\ \frac{x^2}{4} + 1, & \text{ha } x \in (2, 3]; \end{cases}$ függvényre?

3. Számítsuk ki a l'Hospital szabály alkalmazásával a lenti határértékeket:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - \exp(-x) - 2x}{x - \sin x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$$

4. Fejtsük Taylor sorba a következő függvényeket:

(a) $f(x) = \cos x$

(b) $f(x) = \exp(ax)$

5. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$ függvényt monotonitás szempontjából az értelmezési tartományán.

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ függvényt konvexitás szempontjából az értelmezési tartományán.

12. Szeminárium

1. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ függvény teljesíti az $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ egyenletet.

2. Egy cég kétféle terméket gyárt, naponta x és y mennyiségben. A profitfüggvény $f(x, y) = 160x + 120y - 3x^2 - 2xy - 2y^2 - 18$. Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy a profit maximális legyen.

3. Osztályozzuk az alábbi függvények stacionárius pontjait:

(a) $f : R^2 \rightarrow R, \quad f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

(b) $f : R^2 \rightarrow R, \quad f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

(c) $f : R^2 \rightarrow R, \quad f(x, y) = (1 + \exp y) \cos x - y \exp y$

(d) $f : R^2 \rightarrow R, \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

13. Szeminárium

1. Definíció szerint számítsuk ki:

(a) $f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ és $f'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, ha $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$

(b) $f'_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ és $f'_y(1, 0)$, ha $f(x, y) = \exp \sin xy$

2. Igazoljuk, hogy az $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ függvény

folytonos és az origóban rendelkezik parciális deriváltakkal, de nem differenciálható ebben a pontban.

3. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait:

- (a) $f(x, y) = \exp(x - y^2)$
 - (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \arctan \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$
 - (c) $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2) \sin^2 z$
 - (d) $f(x, y, z) = \ln x^y y^z z^x, \quad x > 0, y > 0, z > 0$
4. Határozzuk meg az első és másodrendű differenciáljait a következő függvények esetén:
- (a) $f(x, y) = \exp x \cos y$
 - (b) $f(x, y, z) = xyz$
5. Alkalmazva Taylor képletét (másod rendű), számítsuk ki a $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98}$ szám megközelítő értékét.

14. Szeminárium

1. Legyen $z = \ln(u^2 + v)$; $u = e^{x+y^2}$; $v = x^2 + y$.
Számítsuk ki $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$
2. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy(a - x - y)$; $a > 0$ függvény szélsőértékeit.
3. Tanulmányozzuk az $f(x) = 2 \cos x + e^x + e^{-x}$ függvény szélsőértékeit, majd igazoljuk, hogy $2 \cos x + e^x + e^{-x} \geq 4$.
4. Vizsgáljuk meg az $x = 0$ pont természetét az:
 - (a) $f(x) = x^3 - \ln^3(1 + x)$,
 - (b) $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$,
 - (c) $f(x) = e^x - \ln(1 + x) - 1 - x^2 + \frac{x^3}{3}$
 függvények esetén.
5. Ábrázold az $f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^2}$ függvényt.