

1. Szeminárium

1. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(d) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(e) $A - (A \cap B) = A - B$

2. Írjuk fel a következő halmazok Descartes-szorzatát:

(a) $A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{4, 5\}$

(b) $A = [-1, 2] \quad B = \{1, 5\}$

(c) $A = [1, 3] \quad B = [-1, 2]$

3. Legyen E egy adott pillanatban Európában életben levő emberek halmaza. Mit mondhatunk el a következő relációkról?

(a) $\otimes := \{(a, b) \in E \times E \mid a \text{ gyereke } b\text{-nek}\}$

(b) $\odot := \{(a, b) \in E \times E \mid a\text{-nak legalább annyi pénze van, mint } b\text{-nek}\}$

(c) $\Omega := \{(a, b) \in E \times E \mid a \text{ és } b \text{ egy városban laknak}\}$

(d) $∴ := \{(a, b) \in E \times E \mid a \text{ és } b \text{ házastársak}\}$

(e) $\Sigma := \{(a, b) \in E \times E \mid a \text{ egy napon született } b\text{-vel}\}$

4. Vizsgáljuk meg a lenti relációkat:

(a) $\{(a, b) \in Z \times Z : |a - b| \text{ páros}\}$

(b) $\{(a, b) \in Z \times Z : |a - b| \text{ páratlan}\}$

(c) $\{(a, b) \in N \times N : a|b\}$

(d) $\{(a, b) \in Z \times Z : a|b\}$

(e) $\{(a, b) \in R \times R : a^2 + b^2 = 1\}$

(f) $\{a + ib \in C : |a| = |b|\}$

5. Az alábbi függvények közül melyek injektívek, illetve melyek szürjektívek?

(a) $f : R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^3$

(b) $f : R \longrightarrow R^+ \cup \{0\}, \quad f(x) = x^4$

(c) $f : R^+ \cup \{0\} \longrightarrow R, \quad f(x) = x^3$

6. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók. Azokban az esetekben, mikor invertálható, határozzuk meg az inverz függvényét.

- (a) $f : R \longrightarrow R, \quad f(x) = 2x + 1$
- (b) $f : R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^2$
- (c) $f : R \setminus \{0\} \longrightarrow R, \quad f(x) = \frac{1}{x}$
- (d) $f : R \setminus \{-1\} \longrightarrow R, \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

7. Legyen $P \xrightarrow[g]{f} M \xrightarrow{f} N$, f injektív, $f \circ g = f \circ h$. Igazoljuk, hogy $g = h$.
(injektív függvénnyel lehet balról egyszerűsíteni)
8. Legyen $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow[h]{g} P$, f szürjektív, $g \circ f = h \circ f$. Igazoljuk, hogy $g = h$.
(szürjektív függvénnyel lehet jobbról egyszerűsíteni)
- 9.

2. Szeminárium

1. Legyen H a síkbeli háromszögek halmaza. Tekintsük a következő relációkat:

- (a) $\equiv := \{(a, b) \in H \times H \mid a \text{ kongruens } b\text{-vel}\}$
- (b) $\sim := \{(a, b) \in H \times H \mid a \text{ hasonló } b\text{-vel}\}$
- (c) $k := \{(a, b) \in H \times H \mid a \text{ és } b \text{ kerülete egyenlő}\}$
- (d) $t := \{(a, b) \in H \times H \mid a \text{ és } b \text{ területe egyenlő}\}$
- (e) $\angle := \{(a, b) \in H \times H \mid a \text{ és } b \text{ legalább egyik szöge egyenlő}\}$

Homogének? Ekvivalencia relációk?

1. Legyenek M és N véges halmazok, $|M| = |N| = n$, és $f : M \longrightarrow N$ egy függvény. Igazoljuk, hogy az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

- (a) i. f injektív
- ii. f szürjektív
- iii. f bijektív

2. Adjunk ellenpéldákat az előbbi feladathoz:

- (a) injektív, de nem szürjektív függvényre, amely értelmezési és értéktartománya megegyezik;
- (b) szürjektív, de nem injektív függvényre, amely értelmezési és értéktartománya megegyezik.

3. Adott a következő belső művelet R -en, $* : R \longrightarrow R, \quad x * y = x + y - xy, \quad \forall x, y \in R$.

- (a) Igazoljuk, hogy asszociatív, kommutatív, létezik semleges elem.
 - (b) Határozzuk meg az invertálható (szimmetrizálható) elemeket.
4. A $[0, +\infty)$ halmazon tekintjük a következő műveletet, $\circ : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\forall x, y \in [0, +\infty)$.
- (a) Igazoljuk, hogy asszociatív, kommutatív, létezik semleges elem.
 - (b) Mutassuk ki, hogy a valós számok szorzása disztributív a fenti műveletre nézve: $\forall x, y, z \in [0, +\infty)$, $x(y \circ z) = (xy) \circ (xz)$.
 - (c) Határozzuk meg x -et úgy, hogy $2 \circ x = 3$.

3. Szeminárium

1. Adott az $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz. Igazoljuk, hogy
- (a) M a mátrixok szorzásával kommutatív csoport
 - (b) $(M, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, +)$.
2. Igazoljuk, hogy a $(\mathbb{Z}, +)$ és a $(\mathbb{Q}, +)$ additív csoportok nem izomorfak.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ részcsoportjainak jellemzése. Legyen n egy tetszőleges természetes szám, és jelöljük $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Igazoljuk, hogy:
- (a) $n\mathbb{Z}$ egy részcsoportja a $(\mathbb{Z}, +)$ aditív csoportnak;
 - (b) $(\mathbb{Z}, +)$ bármely részcsoportja $n\mathbb{Z}$ alakú.

4. Szeminárium

1. Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport. Igazoljuk, hogy a $Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$ normális részcsoportja G -nek. Ezt a csoportot a G centrumának nevezzük.
2. Legyen $(G, \cdot)$ és $(H, *)$ két csoport, $f : G \longrightarrow H$ egy csoportmorfizmus. Igazoljuk:
- (a) $\text{Ker } f \trianglelefteq G$
 - (b) $\text{Im } f \leq H$
3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Igazoljuk, hogy $(\langle A \rangle, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, +)$.
4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Igazoljuk, hogy :

- (a) $o(A) = 4$
- (b) $o(B) = 3$
- (c) $o(A \cdot B) = \infty$

5. Szeminárium

1. Legyen $(G, \cdot)$ egy végtelen ciklikus csoport. Igazoljuk, hogy:
 - (a) ha $n \neq k$ akkor $x^n \neq x^k$
 - (b) $G = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, \dots\}$
 - (c) $(G, \cdot) \simeq (Z, +)$
2. Legyen $(G, \cdot)$ egy véges ciklikus csoport ($o(G) = n$). Igazoljuk, hogy:
 - (a) ha $k \neq l$ és $0 \leq k, l < n$, akkor $x^k \neq x^l$
 - (b) $G = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$
 - (c) $(G, \cdot) \simeq (Z_n, +)$
3. Adottak az $(R, +)$ és $(C^*, \cdot)$ csoportok, valamint egy $f : R \longrightarrow C^*$, $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$.
 - (a) Igazoljuk, hogy f csoportmorfizmus.
 - (b) Határozzuk meg: $\text{Ker}(f)$ -et és $\text{Im}(f)$ -et
 - (c) Mutassuk ki: $R/Z \simeq (\{z \in C, |z| = 1\}, \cdot)$

6. Szeminárium

1. Legyen $a, b \in R$; $f_{a,b} : R \longrightarrow R$; $f_{a,b}(x) = ax + b$, valamint

$$\begin{aligned} G &= \{f_{a,b} \mid a \neq 0\} \\ H &= \{f_{a,0} \mid a \neq 0\} \\ N &= \{f_{1,b} \mid b \in R\} \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy:

- (a) $(G, \cdot)$ csoport;
 - (b) $H \leq G$, $H \stackrel{?}{\trianglelefteq} G$
 - (c) $N \leq G$; $G/N \simeq (R^*, \cdot)$
2. Igazoljuk, hogy ha n és m relatív prímek, akkor az $Z/nZ \times Z/mZ$ direkt szorzat izomorf a Z/mnZ aditív csoporttal.

7. Szeminárium

- Legyen $(G, \cdot)$ csoport, $x \in G$. Értelmezzük a következő függvényt: $t_x : Z \longrightarrow G$, $t_x(m) = \begin{cases} e; & m = 0 \\ x^m; & m > 0 \\ (x^{-1})^{-m}; & m < 0 \end{cases}$. Igazoljuk:
 - t_x csoportmorfizmus
 - x véges rendű ($n \neq 0$) akkor és csakis akkor, ha $\text{Ker } t_x = nZ$
 - Ha $x, y \in G$ akkor xy és yx azonos rendű.
- Legyen S_3 az $\{1, 2, 3\}$ halmaz permutációinak csoportja. Jelölje H azon permutációk halmazát, amely a 3 elemet változatlanul hagyja.
 - Igazoljuk, hogy $H \leq S_3$; $H \simeq S_2$
 - Határozzuk meg S_3 faktorhalmazait H -ra nézve.
 - Igaz-e, hogy $H \trianglelefteq S_3$?
- Legyen G egy Abel-féle csoport. Igazoljuk, hogy $\text{Hom}(Z, G) \simeq G$.
- Igazoljuk, hogy $\text{End}(Q) \simeq Z$.

8. Szeminárium

- Igazoljuk, hogy $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ kommutatív test.
- Igazoljuk, hogy $(Z_n, \cdot)$ kommutatív test akkor és csakis akkor, ha n prím.
- Legyen d egy négyzetmentes egész szám. Igazoljuk, hogy a $Z[\sqrt{d}]$ gyűrű izomorf az $\begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$; $m, n \in Z$ alakú mátrixok alkotta gyűrűvel.
- Tekintjük a következő alakú mátrixokat: $\begin{pmatrix} x + 2y & 3y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix}$; $x, y \in Q$.
 - Igazoljuk, hogy ezek halmaza (jelöljük K -val) testet alkot a mátrixok összeadására és szorzására nézve.
 - Mutassuk ki, hogy $K \simeq Q[\sqrt{10}]$ testtel.

9. Szeminárium

1. Legyen d egy négyzetmentes egész szám. Igazoljuk, hogy:

(a) $(Q[\sqrt{d}], +, \cdot) \leq C$ (részttest)

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} ; a, b \in Q \right\} \simeq Q[\sqrt{d}]$.

2. Legyen $(A, +, \cdot)$ gyűrű,

$$R = M_2(A)$$

$$I = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in A \right\}$$

$$J = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in A \right\}$$

Igazoljuk, hogy:

- (a) I jobboldali ideálja R -nek;
(b) J baloldali ideálja R -nek.

10. Szeminárium

1. Legyen $(K, +, \cdot)$ test, ahol $K = \{0, 1, a, b\}$. Igazoljuk, hogy

- (a) $ab = 1 = ba$
(b) $a^2 = b$
(c) $1 + 1 = 0$

2. Spircu: 194/IV.23

3. Spircu: 194/IV.24

11. Szeminárium

1. Spircu: 194/IV.38

2. Lineáris függetlenséget, illetve függőséget vizsgálunk, ha fennállhat, akkor leellenőizzük, nem alkotnak-e bázist:

- (a) $v_1 = (1, 2, -4); v_2 = (0, 1, 1); v_3 = (1, 4, -2)$
(b) $v_1 = (1, 0, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1); v_4 = (1, 2, 3)$
(c) $v_1 = (1, 2, -1); v_2 = (3, 2, 1)$
(d) $v_1 = (1, 1, 0); v_2 = (1, 0, 1); v_3 = (0, 1, 1)$

3. Legyen V egy 4-dimenziós valós vektortér, $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ pedig egy bázisa, és $y = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4$. A bázisban kicseréljük az x_1 -et y -ra. Határozzuk meg a $v = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4$ vektor koordinátavektorát az új $B' = \{y, x_2, x_3, x_4\}$ bázisban.

12. Szeminárium

1. Legyen V egy 4-dimenziós valós vektortér, $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ pedig egy bázisa. Tekintsük a $W = \{y_1, y_2, y_3\}$ vektorrendszert. A vektorok koordinátái az adott bázisra vonatkozólag:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ Ellenőrizzük le, hogy } W \text{ lineárisan összefüggő}$$

vagy lineárisan független rendszer?

2. Állapítsuk meg, hogy az $R_3[t]$ vektortér (a legfeljebb 3-ad fokú valós együtthatós polinomok tere) $p(t) = -t + 3t^2 + 2t^3$ vektora kompatibilis-e a $q_1(t) = 1 - t$, $q_2(t) = 1 - t^2$, $q_3(t) = 1 + t^3$ vektorok rendszerére vonatkozóan?
3. A kislányom, Anna négy éves korában nagy pénzgyűjtő volt. Természetesen a papírpénzek mellett számos fém pénzérmét is összegyűjtött. A teljes kollekciója 48 darab érmét tartalmazott, és értéke 160 Ft volt. Gyűjteményében legtöbb az 1 Ft-osok száma volt. 2 Ft-os viszont 10-zel kevesebb volt, mint 1 Ft-os. A 10 Ft-osok, 5 Ft-osok és 2 Ft-osok száma összesen is 5-tel kevesebb volt, mint a gyűjteményében levő 1 Ft-osok összértéke. Azt tudjuk még, hogy 1-gyel több 10 Ft-osa volt, mint 20 Ft-osa. Állapítsd meg, hogy Anna négy éves kori pénzérme kollekciója milyen összetételű!

13. Szeminárium

1. $\mathbb{R}^4$ -ben adottak a

$$v_1 = (1, 0, 0, 1),$$

$$v_2 = (2, 1, 3, 1),$$

$$v_3 = (1, 1, 0, 0),$$

$$v_4 = (0, 1, -1, 1)$$

vektorok. Igazoljuk, hogy bázist alkotnak. Adjuk meg a $v = (0, 0, 0, 1)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

2. Igazoljuk, hogy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2, 2x_1)$ lineáris leképezés.

3. Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3)$$

lineáris leképezés.

(a) Igazoljuk, hogy f izomorfizmus.

(b) Határozzuk meg $f^{-1}(0, 0, 0)$ -t és $f^{-1}(1, 5, 2)$ -t.

4. Legyen a V valós vektortér egy bázisa a $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ vektorrendszer és az A lineáris transzformáció mátrixa ebben a bázisban legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az f mátrixát a $V = \{y_1, y_2, y_3\}$ bázisban, ahol

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3,$$

$$y_2 = x_2 + x_3,$$

$$y_3 = x_1 + x_2.$$

14. Szeminárium

1. A múlt heti 3. feladat megoldása elemi bázistranszformációval. (mátrix inverzének meghatározása elemi bázistranszformációval)

2. Legyen a $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció úgy, hogy

$$T(e_1) = (1, 1, 1),$$

$$T(e_2) = (0, 1, 0),$$

$$T(e_3) = (0, 1, 0).$$

ahol $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a kanonikus bázis.

(a) Számítsuk ki $T(u)$ -t, ha $u = (1, 2, 3)$.

(b) Határozzuk meg a T lineáris transzformáció mátrixát a

$$B' = \{e'_1 = (1, 0, 0); e'_2 = (1, 1, 0); e'_3 = (1, 1, 1)\}$$

bázisban.

(c) Számítsuk ki $\text{Ker}T$ -t és $\text{Im}f$ -et.

3. Határozzuk meg a $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt úgy, hogy $T(v_i) = w_i$; $i = \overline{1, 3}$, ahol

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 3, 5), & w_1 &= (1, 1, 1) \\ v_2 &= (0, 1, 2), & w_2 &= (1, 1, -1) \\ v_3 &= (1, 0, 0), & w_3 &= (2, 1, 2). \end{aligned}$$