DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 41 (2023) , pp. 77–78

ASUPRA PROBLEMEI 4 DE LA ONM 2022, CLASA A XII-A

Eduard MIHAI

Abstract. În cele ce urmează voi prezenta rezolvarea mea proprie din timpul probei, diferită de cea din barem, pentru **Problema 4 (ONM 2022, Etapa Naţională, clasa a XII-a).**

1. REZOLVAREA ALTERNATIVĂ SOLUŢIEI DIN BAREM

La Olimpiada Naţională de Matematică din anul 2022, problema 4 de la clasa XII-a a avut următorul enunţ.

Problema 4 (ONM 2022, Etapa Naţională, clasa a XII-a). Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, cu centrul $Z = \{a \in R \mid a \cdot r = r \cdot a, \forall r \in R\}$, cu proprietatea că grupul $U = U(R)$ al elementelor sale inversabile este finit. Dacă G este grupul automorfismelor grupului aditiv $(R, +)$, arătaţi că

$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$

($|M|$ reprezintă cardinalul mulţimii M.)

Ideea soluţiei se bazează pe încercarea de a găsi o submulţime a mulţimii G care să aibă cardinalul mai mare sau egal cu $\frac{|U|^2}{|Z \cap U|}$. Vom vedea că există o submulţime cu exact acest cardinal.

Fie $a, b \in U$ elemente arbitrare şi considerăm funcţia $f_{a,b} : R \to R$ definită astfel

$$f_{a,b}(x) = b \cdot a \cdot x \cdot a^{-1}, \ \forall x \in R. \tag{1}$$

Se observă imediat că funcţia $f_{a,b}$ verifică proprietatea de morfism a grupului $(R, +)$ pentru că

$$f_{a,b}(x+y) = b \cdot a \cdot (x+y) \cdot a^{-1} = b \cdot a \cdot x \cdot a^{-1} + b \cdot a \cdot y \cdot a^{-1} = f_{a,b}(x) + f_{a,b}(y), \ \forall x, y \in R.$$

Mai mult decît atât, din moment ce a şi b sunt elemente inversabile ale inelului, se verifică uşor bijectivitatea funcţiei. Prin urmare, $f_{a,b}$ este un automorfism al grupului aditiv, $\forall a, b \in U$.

Din acest motiv următoarea mulţime este o submulţime a lui G

$$A = \{f_{a,b} \mid a, b \in U\} \subseteq G.$$

Vom demonstra că

$$|A| = \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$

Fie $b_1, b_2 \in U$ astfel încât $b_1 \neq b_2$ şi $a \in U$ arbitrar. Alegând $x = 1$ în relaţia (1) obţinem $f_{a,b_1}(1) = b_1$ şi

$$f_{a,b_2}(1) = b_2 \implies f_{a,b_1}(1) \neq f_{a,b_2}(1)$$

şi prin urmare
$$f_{a,b_1} \neq f_{a,b_2}, :: \forall a, b_1, b_2 \in U, b_1 \neq b_2.$$
Cu alte cuvinte, pentru alegeri diferite ale lui $b \in U$ funcţiile vor fi diferite. În continuare, vom fixa un $b_1 \in U$ şi vom vedea câte funcţii diferite avem pentru $a \in U$ variabil. Definim următoarea mulţime
$$A_{b1} = \{f_{a,b_1} \mid : a \in U\}.$$
Cum avem funcţii diferite pentru $b \in U$ ales diferit, rezultă imediat că
$$A_{b1} \cap A_{b2} = \varnothing, \ \forall b_1, b_2 \in U, b_1 \neq b_2.$$
Fie $a_1, a_2 \in U$ şi atunci
$$f_{a_1,b_1} = f_{a_2,b_1} \iff f_{a_1,b_1}(x) = f_{a_2,b_1}(x), \ \forall x \in R \iff$$
$$\iff b_1 \cdot a_1 \cdot x \cdot a_1^{-1} = b_1 \cdot a_2 \cdot x \cdot a_2^{-1}, \ \forall x \in R \iff$$
$$\iff a_1 \cdot x \cdot a_1^{-1} = a_2 \cdot x \cdot a_2^{-1}, \ \forall x \in R \iff$$
$$\iff x \cdot (a_1^{-1} \cdot a_2) = (a_1^{-1} \cdot a_2) \cdot x, \ \forall x \in R \iff a_1^{-1} \cdot a_2 \in Z.$$
Mai mult decât atât, cum
$$a_1, a_2 \in U \implies a_1^{-1} \cdot a_2 \in U \implies a_1^{-1} \cdot a_2 \in Z \cap U.$$
Am ajuns la următoarea echivalenţă
$$f_{a_1,b_1} = f_{a_2,b_1} \iff a_1^{-1} \cdot a_2 \in Z \cap U.$$
Cum Z este un subgrup al grupului $(U, \cdot)$, reiese imediat că şi $Z \cap U$ este un subgrup al acestui grup. Acest aspect împreună ne sugerează existenţa unei bijecţii $g : A_{b_1} \to U/(Z \cap U)$ definită prin
$$g(f_{a,b_1}) = \hat{a}, \ \forall a \in U.$$
Într-adevăr,
$$g(f_{a_1,b_1}) = g(f_{a_2,b_1}) \iff \hat{a_1} = \hat{a_2} \iff a_1^{-1} \cdot a_2 \in Z \cap U \overset{3}{\iff} f_{a_1,b_1} = f_{a_2,b_1}.$$
Deci funcţia g este injectivă şi cum mulţimea U este finită, rezultă că şi A_{b_1} este finită, iar o funcţie injectivă definită pe o mulţime finite este evident bijectivă.
Prin urmare,
$$|A_{b_1}| = |U/(Z \cap U)| = \frac{|U|}{|Z \cap U|}, \ \forall b_1 \in U.$$
Astfel ajungem la rezultatul următor
$$|A| = \Sigma_{b \in U} |A_b| = \Sigma_{b \in U} \frac{|U|}{|Z \cap U|} = \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$
Prin urmare, ţinând cont că $A \subseteq G$ rezultă concluzia
$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$

Student TU Delft, Olanda
e-mail: `eduardmihai958@gmail.com`