DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 41 (2023) , pp. 67–68

# DETERMINAREA LIMITEI UNEI SUME

Horea Adrian JURGE

**Abstract.** Pornind de la următorul rezultat: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}$, am dedus rezultatul limitei urmatoarei sume:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=?$$

## 1. O METODĂ DE SOLUŢIONARE A PROBLEMEI

Considerăm următoarea funcție:$f:[0,\ \infty)\to\mathbb{R}$, $f(k)=\frac{n}{n^2+k^2},\forall k\in[0,\infty)$. Se poate ușor demonstra că funcția $f$ este descrescătoare, deci avem relația:

$$f(k+1)\le f(x)\le f(k),\forall x\in[k,k+1],\forall k\in[0,\infty)$$

Funcția fiind monotonă pe orice interval de forma $[k,k+1]$, este integrabilă. Integrăm și obținem:

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k),\forall k\in[0,\infty)$$

Dăm valori succesiv lui k, și obținem:

$$\begin{array}{c}
f(1)\ge\int_1^2 f(x)dx\\
f(2)\ge\int_2^3 f(x)dx\\
\ldots\\
f(n^2)\ge\int_{n^2}^{n^2+1} f(x)dx\\
\hline
\sum_{k=1}^{n^2}f(k)\ge\int_1^{n^2+1} f(x)dx
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
f(1)\le\int_0^1 f(x)dx\\
f(2)\le\int_1^2 f(x)dx\\
\ldots\\
f(n^2)\le\int_{n^2-1}^{n^2} f(x)dx\\
\hline
\sum_{k=1}^{n^2}f(k)\le\int_0^{n^2} f(x)dx
\end{array}$$

Din cele două inegalități obținem:

$$(*)\qquad \int_1^{n^2+1}f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n^2}f(k)\le\int_0^{n^2}f(x)dx,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Calculăm apoi,

$$\int_0^{n^2} f(x)dx = \int_0^{n^2} \frac{n}{n^2+x^2}dx \overset{t=\frac{x}{n},dt=\frac{dx}{n}}{\overbrace{=}} \int_0^{n} \frac{n}{n^2+n^2t^2}ndt = \int_0^{n} \frac{1}{1+t^2}dt = arctg\ n$$

Analog,

$$\int_1^{n^2+1} f(x)dx = \int_1^{n^2+1} \frac{n}{n^2+x^2}dx \overset{t=\frac{x}{n},dt=\frac{dx}{n}}{\overbrace{=}} \int_{\frac{1}{n}}^{n+\frac{1}{n}} \frac{n}{n^2+n^2t^2}ndt =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{n+\frac{1}{n}} \frac{1}{1+t^2}dt = arctg\ (n+\frac{1}{n}) - arctg\ (\frac{1}{n})$$

Înlocuim în relația $(*)$ și obținem:

$$(**) \qquad arctg\ (n+\frac{1}{n}) - arctg\ (\frac{1}{n}) \le \sum_{k=1}^{n^2} f(k) \le arctg\ n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty} arctg\ n = \lim_{n\to\infty} (arctg\ (n = \frac{1}{n}) - arctg(\frac{1}{n})) = \frac{\pi}{2}.$$

Trecem la limită în relația $(**)$, folosind apoi criteriul cleștelui, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} f(k) = \frac{\pi}{2}.$$

*Colegiul Național "Mihai Eminescu" Satu Mare*
e-mail: `jurgehorea@gmail.com`