DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 41 (2023) , pp. 45–56

GAMIFICARE ÎN LECŢIA DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Anca GRAD

Abstract. Articolul de faţă furnizează un exemplu concret de aplicare a gamificării în predarea analizei matematice, fiind potrivit atât pentru utilizarea la elevii claselor a 11-a, cât şi la studenţi ai anului întâi, în cadrul cursurile introductive. Provocările profesiei didactice sunt astăzi potenţate de intruziunea masivă a dispozitivelor portabile în tot ceea ce înseamnă viaţa elevilor sau a studenţilor. Unele dintre principalele probleme generate de această realitate este sporirea accentuată a deficitului de atenţiei şi scăderea accelerată a disponibilităţii depunerii unui efort în procesul de învăţare. Prezentarea animată a rezultatelor teoretice a fost realizată pe platforma www.canva.com, iar fişele adresate activităţilor individuale şi în echipă pentru curs şi respectiv seminar pot fi imprimate direct din cadrul articolului şi utilizate de profesorii interesaţi.

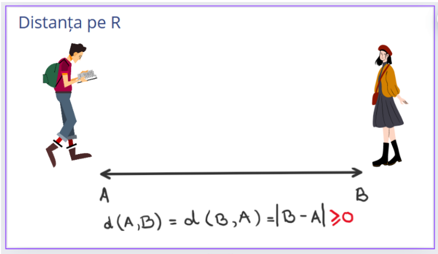
1. INTRODUCEDERE

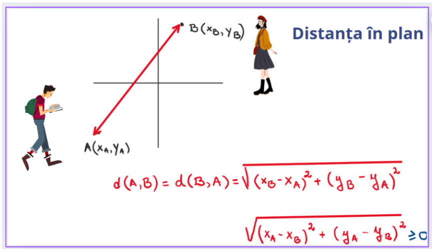
Pe parcursul semestrului I al anului universitar 2021-2022 cadrele didactice ale Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj Napoca au avut oportunitatea de a urma programul postuniversitar de educaţie permanentă, de prefecţionare profesională a adulţilor intitulat *Psihopedagogie: Metode de transmitere a cunoştinţelor adaptate generaţiei Z* oferit de Facultatea de Psihologie şi Ştiinţelel Educaţiei, din cadrul Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca. Combinând aspectele psihologice prezentate la nivelul programului mai sus menţionat, cu abilităţile practice de utilizare ale platformei www.canva.com şi cu experienţa de peste douăzeci de ani de predare a disciplinei Analiză Matematică am generat materialele prezentate la nivelul acestui articol. Din punct de vedere matematic, fundamentele teoretice sunt inspirate din [1], [2] şi [3].

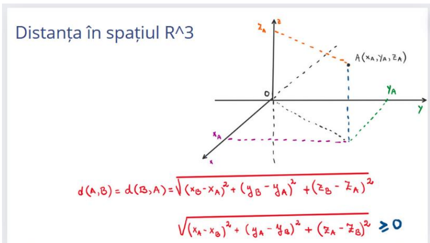
Învăţarea este o modificiare în cunoştinţele celui care învăţă, în umra procesării unor informaţii. Ea poate fi reproductivă sau de profunzime.

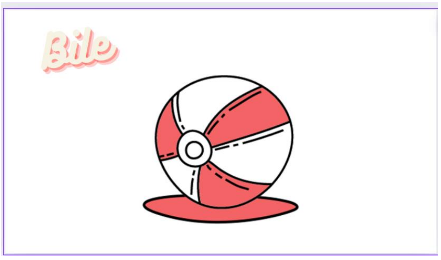
Instruirea este procesul care facilitează învăţarea. Conform teoriei cognitive a învăţării multimedia, [4], ea exploatează canalul dual: verbal şi imagistic. Prelucrarea activă a informaţiior se face prin selectare şi organizarea datelor relevante, precum şi integrare informaţiilor noi cu cele din memoria de lungă durată. Cu cât stimulăm mai mult prelucrea şi blendingul, transferul cunoştinţelor este mai eficient.

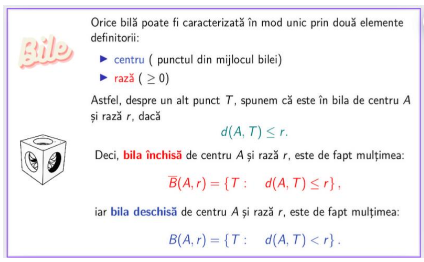
2. PREZENTAREA TEORETICĂ A CURSULUI IN CANVA

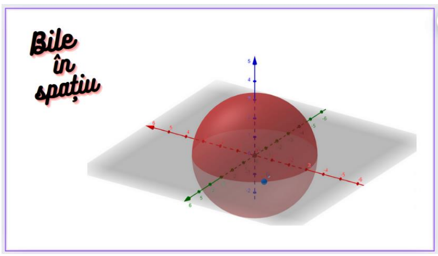


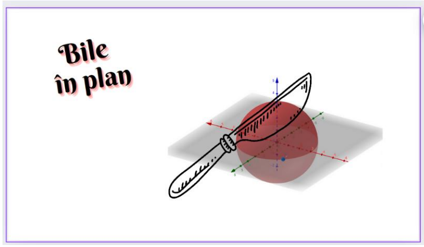


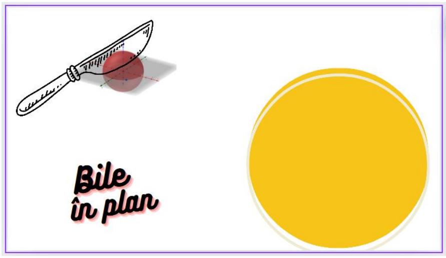


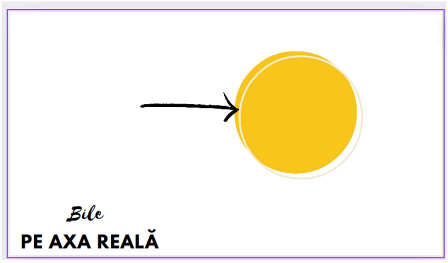


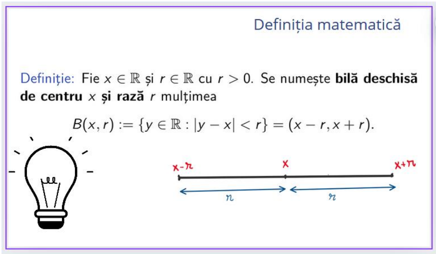


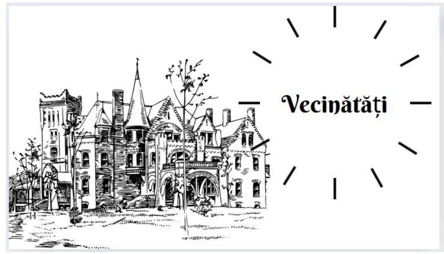


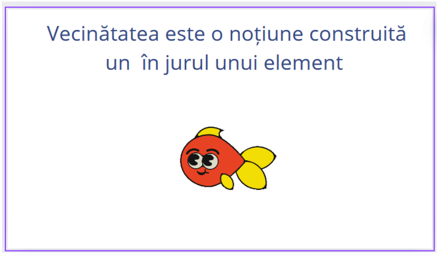



Bile
în plan


Bile
PE AXA REALĂ

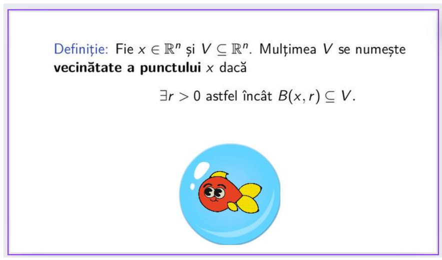

Definiția matematică
Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{R}$ cu $r > 0$. Se numește **bilă deschisă de centru** x **și rază** r mulțimea
$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\} = (x - r, x + r)$.
x-r
x
x+r
r
r

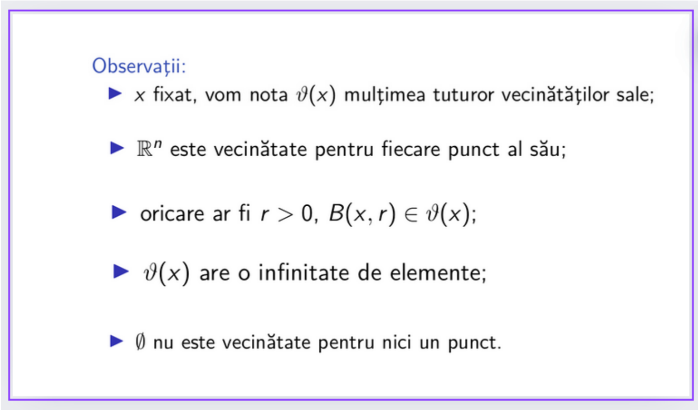

Vecinătăți

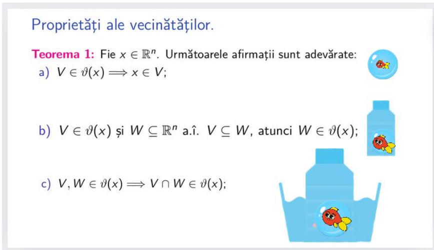

Vecinătatea este o noțiune construită
un în jurul unui element

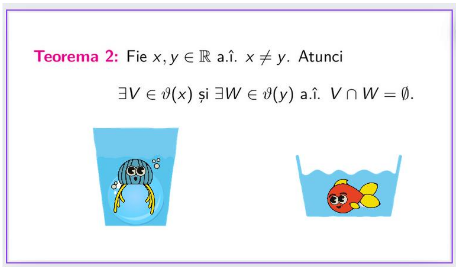

Bila de apă este o vecinătate a peștelui


Sticla cu apă este o vecinătate a peștelui

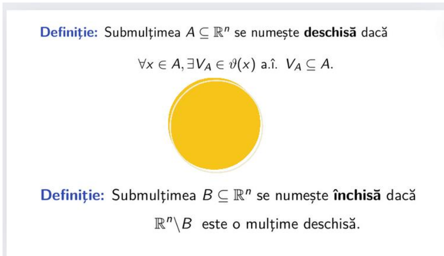

Definiție: Fie $x \in \mathbb{R}^n$ și $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulțimea V se numește **vecinătate a punctului** x dacă
$\exists r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subseteq V$.

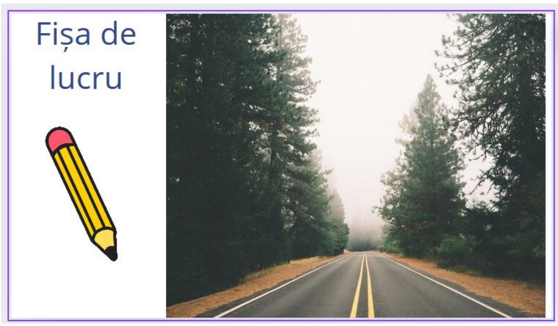

Observații:
x fixat, vom nota $\vartheta(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților sale;
$\mathbb{R}^n$ este vecinătate pentru fiecare punct al său;
oricare ar fi $r > 0$, $B(x, r) \in \vartheta(x)$;
$\vartheta(x)$ are o infinitate de elemente;
$\emptyset$ nu este vecinătate pentru nici un punct.


Proprietăți ale vecinătăților.
Teorema 1: Fie $x \in \mathbb{R}^n$. Următoarele afirmații sunt adevărate:
a) $V \in \vartheta(x) \Longrightarrow x \in V$;
b) $V \in \vartheta(x)$ și $W \subseteq \mathbb{R}^n$ a.î. $V \subseteq W$, atunci $W \in \vartheta(x)$;
c) $V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x)$;


Teorema 2: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci
$\exists V \in \vartheta(x)$ și $\exists W \in \vartheta(y)$ a.î. $V \cap W = \emptyset$.


Mulțimi deschise și mulțimi închise


Definiție: Submulțimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește deschisă dacă
$\forall x \in A, \exists V_A \in \vartheta(x)$ a.î. $V_A \subseteq A$.
Definiție: Submulțimea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește închisă dacă
$\mathbb{R}^n \setminus B$ este o mulțime deschisă.


Fișa de lucru

3. EXEMPLU AL UNEI FIŞE INDIVIDUALE

Topologie intuitivă
Fişă individuală

Exerciţiul 1 Un om se află într-o barcă în mijlocul unui lac. Daţi câte un exemplu pentru următoarele mulţimi:

a) O mulţime care este o vecinătate a omului.

b) O mulţime care nu este o vecinătate a omului.

c) O mulţime care este o vecinătate a bărcii.

d) O mulţime care nu este vecinătate a bărcii.

Exerciţiul 2 Un om se află într-un submarin, care este scufundat la 100 de metri adâncime în Oceanul Pacific. Daţi câte un exemplu pentru următoarele mulţimi:

a) O mulţime care este o vecinătate a omului.

b) O mulţime care nu este o vecinătate a omului.

c) O mulţime care este o vecinătate a submarinului.

d) O mulţime care nu este vecinătate a submarinului.

Excerciţiul 3: Marcaţi prin ✓ acele mulţimi care sunt vecinuătăţi ale punctului $1 \in \mathbb{R}$.

$(-1,2]$	$(-1,1)$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\mathbb{R}\backslash(0,1)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$

4. EXEMPLU AL UNEI FIŞE CU EXERCIŢII PENTRU ECHIPE

Topologie intuitivă - Execiţii pentru echipe

Exerciţiul 1 Precizaţi

a) O submulţime a lui $\mathbb{R}$ care este deschisă

b) O submulţime a lui $\mathbb{R}$ care este închisă.

c) O submulţime a lui $\mathbb{R}$ care este nu este nici închisă nici deschisă.

Exerciţiul 2: Folosiţi ✓ pentru a marca în tabel dacă următoarele mulţimi sunt deschise sau închise:

Mulţimea	$(-1,2]$	$(-1,1)$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\mathbb{R}\backslash(0,1)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
deschisă										
închisă										

Exerciţiul 3: Precizaţi

a) O submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ care este deschisă

b) O submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ care este închisă.

c) O submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ care este nu este nici închisă nici deschisă.

Excercițiul 4: Fie A şi B două submulţimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$. Este mulţimea $A \cup B$ deschisă sau închisă? Demonstraţi.

Excercițiul 5: Fie A şi B două submulţimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$. Este mulţimea $A \cap B$ deschisă sau închisă? Demonstraţi.

Excercițiul 6: Fie A şi B două submulţimi închise ale lui $\mathbb{R}^n$. Este mulţimea $A \cup B$ deschisă sau închisă? Demonstraţi.

Excercițiul 7: Fie A şi B două submulţimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$. Este mulţimea $A \cap B$ deschisă sau închisă? Demonstraţi.

Excercițiul 8: Există două mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, nici închise nici deschise astfel încât, $A \cup B$ să fie mulţime deschishă? Dar închisă?

Excercițiul 9: Există două mulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, nici închise nici deschise astfel încât, $A \cap B$ să fie mulţime deschishă? Dar închisă?

5. EXEMPLU DE FIŞA DE LUCRUR PENTRU SEMINAR

Topologie intuitivă pe $\mathbb{R}$
Fişă pentru seminar

Exerciţiul 1: Demonstraţi afirmaţia:

$$V \in \vartheta(x) \text{ şi } W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ a.î. } V \subseteq W, \text{ atunci } W \in \vartheta(x).$$

Exerciţiul 2: Demonstraţi afirmaţia:

$$V, W \in \vartheta(x) \Longrightarrow V \cap W \in \vartheta(x).$$

Exerciţiul 3: Demonstraţi afirmaţia:Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq y$. Atunci

$$\exists V \in \vartheta(x) \text{ şi } \exists W \in \vartheta(y) \text{ a.î. } V \cap W = \emptyset.$$

Exerciţiul 4: Verificaţi cu demonstraţie completă afirmaţia:
$V \in \vartheta(x) \Longrightarrow \exists W \in \vartheta(x)$ a.î. $V \in \vartheta(y), \forall y \in W$.

Exerciţiul 5: Specificaţi caracterul umătoarelor mulţimi (deschise sau închise) cu demonstaţii.

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right).$$

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$$

$$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$$

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right)$$

Excerciţiul 6: Completaţi umătorul tabel folosind rezultatele teoretice de la curs. Pentru primele doua coloane, folositi χ daca este adevărat:

Nr.	A	A deschisă?	A închisă?	$x \in \mathbb{R}$, a.î. $A \in \mathcal{V}(x)$	$x \in \mathbb{R}$, a.î. $A \notin \mathcal{V}(x)$
1	$(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$				
2	$(-1, 9] \cup [10, 20)$				
3	$\Big((-1, 9] \cup [10, 20)\Big) \cap \mathbb{N}$				
4	$\{1, 2, 3\}$				
5	$\mathbb{N}$				
6	$\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$				
7	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$				
8	$\mathbb{Z}$				
9	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$				
10	$\mathbb{Q}$				
11	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$				
12	$\mathbb{R}$				

REFERENCES

[1] D. I. Duca: *Analiză matematică* (vol I), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013

[2] A. Grad: *Abordare metodică a separării topologice a mulţimilor $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, Didactica Mathematica, vol. 35, pp. 33-44, 2017

[3] A. Grad: *Mulţimea punctelor de acumulare: exemple utile şi greşeli tipice*, Didactica Mathematica, vol. 36, pp. 47-59, 2018

[4] Mayer, R.E.: *Multimedia learning*, Psychology of Learning and Motivation, vol. 41, pp. 85–139, 2002

Departamentul de Mateamtică
Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca [1]
e-mail: `anca.grad@ubbcluj.ro`

[1]articol a fost finanţat prin proiectul *Anteprenoriat UBB! POCU/379/6/21/124662*