DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 41 (2023) , pp. 41–44

O CHESTIUNE DE GEOMETRIE ÎN SPAŢIU

Mircea FARCAŞ

Abstract. The purpose of this note is to highlight some links between the characteristics and the properties of simple geometric solids: areas and volumes of a cone, sphere, cylinder, with the help of mathematical analysis.

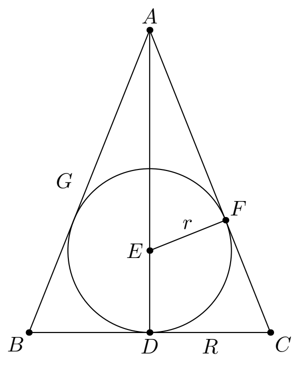
MSC 2000. 51-08, 26A06, 26A09.
Key words. Cone, sphere, cylinder, variation of function.

1. INTRODUCERE

Stabilim în continuare două legături interesante între aria totală şi respectiv aria laterală a unui con şi aria sferei înscrise în acesta, pornind de la câteva probleme din [1] şi [2].

PROPOZIŢIA 1. *Fie A_c aria unui con cu raza R şi generatoarea G şi A_s aria sferei înscrise în con. Atunci avem $A_c \geq 2A_s$, cu egalitate dacă şi numai dacă $\frac{G}{R} = 3$.*

Demonstraţie. Notăm $\frac{G}{R} = x \in (1, \infty)$ şi vom avea $f(x) = \frac{A_c}{A_s} = \frac{\pi R(R+G)}{4\pi r^2} = \frac{R^2+RG}{4r^2} = \frac{1+\frac{G}{R}}{4\left(\frac{r}{R}\right)^2}$, unde r este raza sferei înscrise în con.



Din asemănarea triunghiurilor AEF şi ACD, rezultă că $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{G^2-R^2}-r}{G} = \frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{r}{R}}{x}$, de unde $\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Rezultă expresia funcţiei $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)}$.

Studiind variaţia funcţiei f, obţinem $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, dreapta $y = \frac{x+3}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$, $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{4(x-1)^2}$ şi tabelul de variaţie

x	1				3					$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Din studiul variaţiei funcţiei f rezultă concluzia. □

Observaţia 1. *Fiind dat un raport $\frac{A_c}{A_s} > 2$, există două configuraţii care verifică problema.*

Propoziţia 2. *Fie A_{lc} aria laterală a unui con cu raza R şi generatoarea G şi A_s aria sferei înscrise în con. Avem $\frac{A_{lc}}{A_s} \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $\frac{G}{R} = 1 + \sqrt{2}$.*

Demonstraţie. Utilizăm aceleaşi notaţii ca în Propoziţia 1. Considerăm funcţia $g\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \frac{A_{lc}}{A_s} = \frac{RG}{4r^2} = \frac{x^2+x}{4(x-1)}.$$

Studiind variaţia funcţiei g, obţinem $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, dreapta $y = \frac{x+2}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$,

$$g'(x) = \frac{x^2-2x-1}{4(x-1)^2}$$

şi tabelul de variaţie

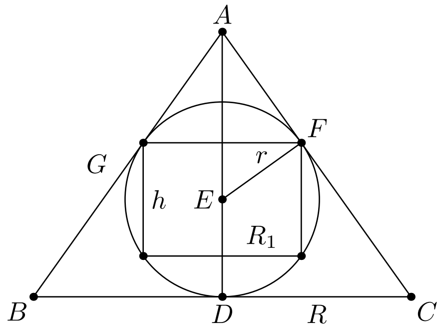
x	1				$1+\sqrt{2}$					$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	∞	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Din studiul variaţiei funcţiei g rezultă concluzia. □

2. APLICAŢII

Exerciţiul 1. *Într-un con circular drept se înscrie o sferă astfel încât cercul lor de tangenţă este baza unui cilindru înscris în sferă. Ştiind că raportul dintre aria totală a conului şi aria sferei este α, determinaţi în funcţie de α raportul dintre volumul cilindrului şi volumul conului.*

Soluţie. Notăm cu R, G şi H respectiv raza, generatoarea şi înălţimea conului, iar cu R_1 şi h raza şi înălţimea cilindrului.



Avem $\frac{R(R+G)}{4r^2} = \alpha$, deci $R^2 + RG = 4\alpha r^2$. Notând $\frac{r}{R} = y$ şi ţinând cont că

$$\frac{r}{R} = \frac{H-r}{G} = \frac{\sqrt{G^2 - R^2} - r}{G},$$

rezultă ecuaţia $2\alpha y^4 - 2\alpha y^2 + 1 = 0$, cu soluţiile convenabile

$$y = \sqrt{\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha}}{2\alpha}}.$$

Observăm că aceste soluţii sunt reale dacă şi numai dacă $\alpha \geq 2$, ceea ce este în concordanţă cu Propoziţia 1.

Pentru determinarea volumului cilindrului, din asemănări de triunghiuri se observă că $\frac{2r}{G} = \frac{2R_1}{H} = \frac{h}{R}$. În urma calculelor, obţinem în funcţie de y şi R, $H = \frac{2y}{1-y^2}R$, $h = \frac{2y(1-y^2)}{1+y^2}R$ şi $R_1 = \frac{2y}{1+y^2}R$; în final, soluţiile problemei sunt

$$\frac{\mathcal{V}_{cil}}{\mathcal{V}_{con}} = \frac{12y^4(1-y^2)^2}{(1+y^2)^3} = \frac{24\alpha}{\left(3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha}\right)^3}.$$

Exerciţiul 2. *Într-un con circular drept se înscrie o sferă astfel încât cercul lor de tangenţă este baza unui cilindru înscris în sferă. Ştiind că raportul dintre aria laterală a conului şi aria sferei este α, determinaţi în funcţie de α raportul dintre volumul cilindrului şi volumul conului.*

Soluţie. Analog cu exerciţiul 1, rezultă ecuaţia $4\alpha y^4-(4\alpha-1)y^2+1=0$, cu soluţiile convenabile

$$y=\sqrt{\frac{4\alpha-1\pm\sqrt{16\alpha^2-24\alpha+1}}{8\alpha}}.$$

Observăm că aceste soluţii sunt reale dacă şi numai dacă $\alpha\geq\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$, ceea ce este în concordanţă cu Propoziţia 2.

În final se obţin soluţiile problemei

$$\frac{\mathcal{V}_{cil}}{\mathcal{V}_{con}}=\frac{6}{\alpha\left(12\alpha-1\pm\sqrt{16\alpha^2-24\alpha+1}\right)}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Drăghicescu, I.C., Masgras, V., *Probleme de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1987

[2] Ganga, M., *Teste de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1992

Colegiul Naţional "Mihai Eminescu" Satu Mare Str. Mihai Eminescu nr. 5
440014 Satu Mare, Romania
e-mail: `mirceafarcas2005@yahoo.com`