DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 41 (2023) , pp. 25–34

EXEMPLE ŞI CONTRAEXEMPLE ÎN ANALIZA MATEMATICĂ DE LICEU

Iulia-Daniela CSOLPAN

Abstract. In this paper, we present some nontrivial theorems, remarks, examples and counterexamples about functions, limits of functions, local minimum and maximum points from 11^{th} grade mathematical analysis. These can be used by high school students, students and teachers, to facilitate the understanding of the lessons and to prepare the mathematics competitions.

1. INTRODUCERE

În acest articol prezentăm câteva teoreme, observații, exemple și contraexemple netriviale referitoare la funcții (accentuând conceptele de periodicitate, mărginire, continuitate, derivabilitate, proprietatea lui Darboux), limite de funcții, puncte de extrem ale unei funcții, noțiuni care fac parte din programa școlară de analiză matematică liceală. Acestea pot răspunde dilemelor unor elevi cu un puternic spirit de observație si pot contribui la un dialog matematic constructiv între profesor si elev. Totodată, aspectele prezentate în acest articol pot fi utile profesorilor în activitatea de predare la clasă, precum și în centrele de excelență, dar și pentru pregătirea examenelor de titularizare și de grade didactice.

Exemplele ilustrează noţiunile teoretice, precum şi aplicabilitatea teoremelor.

Contraexemplele arată că:

- în majoritatea cazurilor, reciprocele teoremelor nu au loc;
- dacă omitem o condiţie din ipoteza unei teoreme, concluzia poate să nu mai fie atinsă.
- o afirmaţie, care iniţial pare a fi plauzibilă este, de fapt, falsă.

2. FUNCŢIE CARE NU ADMITE LIMITĂ LA $+\infty$.

Exemplul 1. Fie $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$.

Alegând şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, de termen general $x_n = 2n\pi$ respectiv $y_n = (2n+1)\pi$, obţinem $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, dar $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ şi $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.

Deducem că funcţia cos nu admite limită la $+\infty$, analog demonstrându-se că nu admite limită nici la $-\infty$.

Funcţia de mai sus este un rezultat particular pentru următoarea *teoremă*:

TEOREMA 1. *Orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neconstantă şi periodică nu admite limită la $+\infty$*

Demonstraţie. Într-adevăr, f nu este constantă, deci $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) \neq f(b)$. Fie $T > 0$ perioada principală a lui f.

Atunci, alegând $u_n = a+nT$, $v_n = b+nT \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \infty$.

Dar,

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a) \neq f(b) = \lim_{n\to\infty} f(v_n).$$

□

OBSERVAŢIA 1. *Utilizând teorema de mai sus, obţinem că* sin, cos *sunt funcţii periodice şi neconstante care nu admit limită la $+\infty$.*

CONSECINŢA 1. *Orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică ce admite limită la $+\infty$ este constantă.*

Dăm mai jos o generalizare care are loc dacă limita este *finită* :

TEOREMA 2. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile periodice $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că funcţia $f = f_1 + f_2 + ... + f_n$ admite limită finită la $+\infty$. Atunci f este o funcţie constantă.*[1]

Demonstraţie: Demonstraţie prin inducţie după n.

I. Etapa de verificare: Pentru $n = 1$ atunci $f = f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică şi admite limită finită la $+\infty$. Cum am arătat mai sus că orice funcţie periodică ce admite limită la $+\infty$ este constantă, atunci f este constantă.

II. Etapa de demonstraţie: Presupunem că, dacă suma a n funcţii periodice, definite pe $\mathbb{R}$, admite limita finită la $+\infty$, atunci suma celor n funcţii este constantă şi arătăm că, dacă suma a n+1 funcţii periodice, definite pe $\mathbb{R}$, admite limita finită la $+\infty$, atunci suma celor n+1 funcţii este constantă .

Fie $f = f_1 + f_2 + ... + f_n + f_{n+1}$ astfel încât $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt periodice şi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Notând $T_1 > 0$ perioada lui f_1, obţinem că

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x + T_1) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = (f_1 + f_2 + ... + f_n + f_{n+1})(x + T_1) - (f_1 + f_2 + ... + f_n + f_{n+1})(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = f_1(x+T_1)+f_2(x+T_1)+....+f_{n+1}(x+T_1)-f_1(x)-f_2(x)-...-f_{n+1}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = [f_2(x + T_1) - f_2(x)] + ... + [f_{n+1}(x + T_1) - f_{n+1}(x)]$$

care este o sumă de n funcţii periodice. Mai mult, din ipoteza de inducţie, rezultă

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \big[f(x + T_1) - f(x)\big] = L - L = 0,$$

care este finită.

Conform ipotezei de inducţie, deducem că g este constantă, iar cum

[1] Mihai Piticari, Sorin Rădulescu, Olimpiada Naţională de Matematică, 1996.

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x+T_1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ periodică, iar cum f admite limita L, rezultă că $f = f_1+f_2+....+f_n$ constantă.

Observaţia 2. *Rezultatele prezentate mai sus sunt valabile şi pentru calculul limitei la $-\infty$.*

Exemplul 2. Considerăm constantele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ a\cos(ax) + b\cos(bx) \geq 0$.
Atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$ este constantă.

Demonstraţie. Alegând $f_1(x) = \sin(ax)$ cu perioada $T_1 = \frac{2\pi}{a}$ şi $f_2(x) = \sin(bx)$ cu perioada $T_2 = \frac{2\pi}{b}$, atunci $f = f_1 + f_2$ (1)
Dar, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 2$ şi $f'(x) = a\cos(ax) + b\cos(bx) \geq 0 \Rightarrow f$ admite limită finită la $+\infty$ (2)
Din (1) şi (2), aplicând Teorema 2, obţinem că f este constantă.

□

3. FUNCŢIE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, CU PROPRIETATEA CĂ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ ARE LOC $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, DAR f NU ESTE FUNCŢIA IDENTICĂ.

Exemplul 3. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar ales. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{dacă x} \neq 0 \\ a, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$ este un număr real fixat, are această proprietate. (prelucrare a unui exemplu din [3], pag. 42.)

Demonstraţie. Într-adevăr, f este diferită de funcţia identică, dar pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$, avem $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

□

4. FUNCŢIE CARE ADMITE PROPRIETATEA LUI DARBOUX, DAR CARE NU ESTE CONTINUĂ

Teorema 3. ***Teorema (Cauchy-Bolzano[2])*** *Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci f are proprietatea lui Darboux.*

Observaţia 3. *Nu orice funcţie cu proprietatea lui Darboux este continuă.*

Exemplul 4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{dacă x} \neq 0 \\ a, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux, dacă şi numai dacă $a \in [-1, 1]$, dar nu este continuă în $x = 0$.

[2]Demonstraţia poate fi consultată în [1], pag. 168, ediţia 1985.

Demonstraţie. (vezi [2], pag. 168) Într-adevăr, f nu este continuă în $x = 0$, deoarece

$$\nexists \lim_{x\searrow 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \sin y$$

şi

$$\nexists \lim_{x\nearrow 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sin y.$$

" $\Longrightarrow$ "

Ştim că f admite proprietatea lui Darboux. Vom presupune că $a \notin [-1,1]$. Fie $a > 1$. Pentru $x_1 = 0$ şi $x_2 = \frac{2}{\pi}$ obţin

$f(x_1) = f(0) = a$ şi $f(x_2) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Pentru $\lambda = \frac{a+1}{2} \Rightarrow 1 < \frac{a+1}{2} < a$, dar $\forall\ x \in (x_1, x_2) = (0, \frac{2}{\pi})$, avem

$\sin\frac{1}{x} \leq 1 < \lambda \Rightarrow \nexists c_\lambda \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda \Rightarrow$ presupunerea este falsă. Analog se demonstrează pentru $a < -1$. Deci, $a \in [-1,1]$.

" $\Longleftarrow$ " Ştim că $a \in [-1,1]$. Considerăm $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi λ aflat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Vom analiza cazurile:

I. $x_1 < x_2 < 0$ Cum $f\big|[x_1, x_2] = \sin\frac{1}{x}$ care este continuă, deducem conform teoremei Cauchy-Bolzano că $f\big|[x_1, x_2]$ are proprietatea lui Darboux.

II. $0 < x_1 < x_2$, analog cu I.

III. $x_1 < x_2 = 0$. Fie λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Cum $f(x_1) = \sin\frac{1}{x_1} \in [-1,1]$ şi $f(x_2) = f(0) = a \in [-1,1]$, atunci $\lambda \in [-1,1] \Rightarrow \exists u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, astfel încât $\sin u = \lambda$

Fie

$$c_{\lambda_n} = \frac{1}{u - 2n\pi}.$$

Atunci $\forall\ n \geq 1$, $c_{\lambda_n} < 0$ şi $\lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n} = 0$. Aşadar, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_1 < c_{\lambda_{n_0}} < x_2$ şi

$$f(c_{\lambda_{n_0}}) = \sin\frac{1}{\frac{1}{u-2n_0\pi}} = \sin u = \lambda$$

deci f admite proprietatea lui Darboux.

IV. $0 = x_1 < x_2$ analog cu III, alegându-se

$$c_{\lambda_n} = \frac{1}{u + 2n\pi}$$

V. $x_1 < 0 < x_2$ analog cu III şi IV.

$\square$

Observaţia 4. *Funcţiile de tipul* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{g(x)} = \begin{cases} \sin\frac{m}{nx}, \text{dacă x} \neq 0 \\ a, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{h(x)} = \begin{cases} \cos\frac{m}{nx}, \text{dacă x} \neq 0 \\ a, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

unde $m, n \in \mathbb{R}^*$, *nu sunt continue în 0 şi admit proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă* $a \in [-1, 1]$. *(vezi* [2], *pag. 169.)*

În schimb, are loc următoarea *teoremă*:

TEOREMA 4. *a)Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$ *este monotonă şi admite proprietatea lui Darboux, atunci* f *este continuă.*
b) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ *este injectivă şi admite proprietatea lui Darboux, atunci* f *este continuă.*

5. EXEMPLU DE DOUĂ FUNCŢII CARE ADMIT PROPRIETATEA LUI DARBOUX A CĂROR SUMĂ NU ADMITE PROPRIETATEA LUI DARBOUX.

OBSERVAŢIA 5. *În general, suma a două funcţii cu proprietatea lui Darboux nu este o funcţie cu proprietatea lui Darboux.*

EXEMPLUL 5. Într-adevăr, considerând, în continuare, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_1\ (\mathrm{x}) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \text{dacă x} \neq 0 \\ -1, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(\mathrm{x}) = \begin{cases} -\sin \frac{1}{x}, \text{dacă x} \neq 0 \\ -1, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

atunci

$$f_1 + f_2 = \begin{cases} 0, \text{dacă x} \neq 0 \\ -2, \text{dacă x=0} \end{cases}$$

care nu are proprietatea lui Darboux, deoarece imaginea funcţiei $f_1 + f_2$ este mulţimea $\{-2, 0\}$, care nu este interval.

OBSERVAŢIA 6. *Analog, diferenţa şi produsul a două funcţii cu proprietatea lui Darboux nu sunt, în general, funcţii cu proprietatea lui Darboux.*

6. DOUĂ FUNCŢII $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CARE NU AU PROPRIETATEA LUI DARBOUX, DAR PENTRU CARE $f_1 \circ f_2$ ŞI $f_2 \circ f_1$ AU PROPRIETATEA LUI DARBOUX.

OBSERVAŢIA 7. *Dacă funcţiile* $f : I \to \mathbb{R}$ *şi* $g : f(I) \to \mathbb{R}$, *unde* $I \subseteq \mathbb{R}$ *este un interval, admit proprietatea lui Darboux, atunci şi funcţia* $g \circ f$ *admite proprietatea lui Darboux.*

EXEMPLUL 6. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f_1(x) = [x]$ şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \{x\}$ nu au proprietatea lui Darboux, dar $f_1 \circ f_2$ şi $f_2 \circ f_1$ au această proprietate(vezi [2] pag. 175).

Demonstraţie. Într-adevăr, alegând $\alpha = 0$, $\beta = 1$ şi

$$\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1] = \left[f_1(\alpha), f_1(\beta)\right],$$

atunci nu există $c_\lambda \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $[c_\lambda] = \frac{1}{2}$, adică nu există $c_\lambda \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda \Rightarrow f_1$ nu admite proprietatea lui Darboux.

Analog, pentru $\alpha = \frac{1}{5}$; $\beta = 1$, obţinem $f_2\big(\alpha\big) = \frac{1}{5}$ şi $f_2\big(\beta\big) = 0$.

Dar, $f_2\big([\alpha, \beta]\big) = \big[\frac{1}{5}, 1\big) \cup \{0\}$ (1)

Alegând $\lambda = \frac{1}{6} \in \big[0, \frac{1}{5}\big] = \big[f_2(\beta), f_2(\alpha)\big]$, din (1) deducem că nu există $c_\lambda \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $f_2(c_\lambda) = \lambda \Rightarrow f_2$ nu admite proprietatea lui Darboux.

Însă, $\big(f_1 \circ f_2\big)(x) = [\{x\}] = 0$ care este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, deci are proprietatea lui Darboux.

Analog, $\big(f_2 \circ f_1\big)(x) = \{[x]\} = 0$ care este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, deci are proprietatea lui Darboux.

□

7. FUNCŢIE CONTINUĂ ÎNTR-UN PUNCT, DAR CARE NU ESTE DERIVABILĂ ÎN PUNCTUL RESPECTIV.

Observaţia 8. *Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în punctul respectiv. În schimb, nu orice funcţie continuă într-un punct este derivabilă în punctul respectiv.*

Exemplul 7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ *respectă proprietatea de mai sus.*

Demonstraţie.

$$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

relaţie pe care o notăm cu (1)

Analog,

$$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

relaţie pe care o notăm cu (2).

Din (1) şi (2) deducem că f nu este derivabilă în $x = 0$. Dar, f este continuă în $x = 0$, f fiind continuă pe $\mathbb{R}$. (vezi [7] .)

□

8. DOUĂ FUNCŢII NEDERIVABILE ÎNTR-UN PUNCT, A CĂROR SUMĂ ESTE O FUNCŢIE DERIVABILĂ ÎN PUNCTUL RESPECTIV

Teorema 5. *Considerăm mulţimea $I \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in I \cap I'$. Atunci funcţiile $f + g$, $f \cdot g$ şi $\frac{f}{g}$ (dacă $\forall\ x \in I$, $g(x) \neq 0$) sunt derivabile în $x = x_0$.*

Observaţia 9. *Există funcţii nederivabile într-un punct a căror sumă este o funcţie derivabilă.*

Exemplul 8. Considerăm funcţia f nederivabilă în punctul $x = x_0$ şi funcţia $g = h - f$, unde h este o funcţie derivabilă în $x = x_0$. Atunci funcţiile f şi g nu sunt derivabile în $x = x_0$, dar $f + g = h$ este derivabilă în punctul respectiv.

Alegând $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ nederivabilă în $x = 0$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = a$ derivabilă în $x = 0$, unde a este o constantă reală, avem $g(x) = a - |x|$ care este nederivabilă în acest punct. În schimb, $(f + g)(x) = a$ este o funcţie constantă, derivabilă în orice punct din $\mathbb{R}$, în particular şi în $x = 0$.(vezi [4], pag. 65.)

Observaţia 10. *Analog, se poate arăta că există funcţii nederivabile într-un punct pentru care diferenţa/produsul/raportul este o funcţie derivabilă în punctul respectiv.*

9. DOUĂ FUNCŢII NEDERIVABILE ÎNTR-UN PUNCT A CĂROR COMPUNERE ESTE DERIVABILĂ ÎN PUNCTUL RESPECTIV.

Teorema 6. *Considerăm mulțimile $I, J \subseteq \mathbb{R}$, funcţia $f : I \to J$ derivabilă în $x = x_0 \in I \cap I'$ şi funcţia $g : J \to \mathbb{R}$ derivabilă în $f(x_0) \in J \cap J'$. Atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă în x_0.*

Observaţia 11. *Există funcţii nederivabile într-un punct a căror compunere este o funcţie derivabilă în punctul respectiv.*

Exemplul 9. Considerăm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + |x|$ şi $g(x) = x - |x|$. Atunci f, g nu sunt derivabile în $x = 0$, dar $f \circ g$ este derivabilă în $x = 0$.

Demonstraţie. Cum $(f \circ g)(x) = x - |x| + \big|x - |x|\big| = \begin{cases} x - x + |x - x|, \text{ dacă } x \geq 0 \\ x + x + |2x|, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ atunci, $(f \circ g)'(0) = 0$ de unde rezultă că $f \circ g$ este derivabilă în $x = 0$. □

10. FUNCŢIE MĂRGINITĂ

Definiţia 1. *Spunem că o funcţie $f : D_f \to \mathbb{R}$ este mărginită pe D_f, dacă $\exists\, M > 0$ astfel încât $\forall\, x \in D_f$ are loc $|f(x)| \leq M$.*

Exemplul 10. Funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Atunci $\exists\, M = 1 > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, deci f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

Observaţia 12. *Dacă în afirmaţia de mai sus inversăm ordinea operatorilor $\exists$ şi $\forall$ astfel încât să obţinem: "$\forall\, x \in D_f$, $\exists\, M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$" nu rezultă că f este mărginită pe D_f.*

Exemplul 11. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Fie $\varepsilon > 0$, ales arbitrar.

Atunci $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, M = |x| + \varepsilon > 0$ astfel încât $|g(x)| \leq M$, dar g este nemărginită.

11. EXEMPLU PENTRU CARACTERIZAREA CU ŞIRURI A LIMITEI UNEI FUNCŢII

Observaţia 13. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $\lim_{n\to\infty} f(n) = L \in \bar{\mathbb{R}}$ atunci nu rezultă că $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. (vezi [8], pag. 41.)*

Exemplul 12. Funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin\big(\pi \cdot x\big)$, avem f continuă şi

$$\lim_{n\to\infty} \sin\big(\pi \cdot n\big) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

dar $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Demonstraţie. Intr-adevăr, alegând $x_n = \frac{1}{2} + 2n$ şi $y_n = -\frac{1}{2} + 2n$ avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

dar,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\big(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\big) = 1$$

în timp ce

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\big(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\big) = -1$$

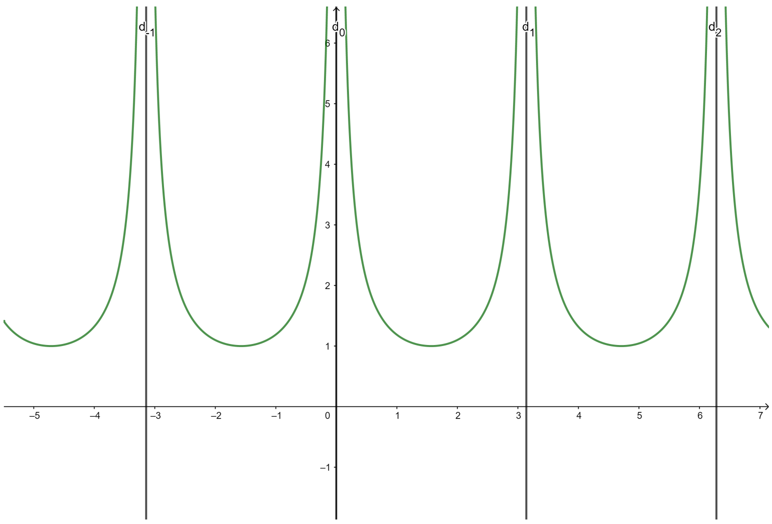
deci, $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$. □

Observaţia 14. *Pentru demonstraţia de mai sus am folosit caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii sau teorema lui Heine* [3]. *Pe baza acesteia se poate afirma, în schimb, că pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \bar{\mathbb{R}}$, are loc $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.*

12. PUNCTE DE MINIM ŞI DE MAXIM LOCAL

Observaţia 15. *O funcţie nu admite întotdeauna un punct de maxim local între două puncte de minim local.*

Exemplul 13. Funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{k \cdot \pi\} \to [1, \infty)$, unde $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = |\csc(x)|$ admite asimptotele verticale $d_k : x = k \cdot \pi$.

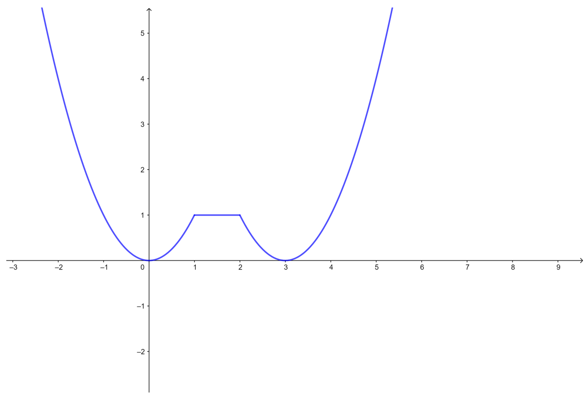


[3] Enunţul teoremei şi o consecinţă importantă a acesteia pot fi consultate în [2], ediţia 2016, pag 118.

Întrebarea care se pune imediat este dacă în cazul funcţiilor continue există întotdeauna un punct de maxim între două puncte de minim.

Exemplul 14. Funcţia

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \textit{dacă } x<1 \\ 1, \textit{dacă } x\in \textit{[1,2]} \\ (x-3)^2, \textit{dacă } x>2 \end{cases}$$



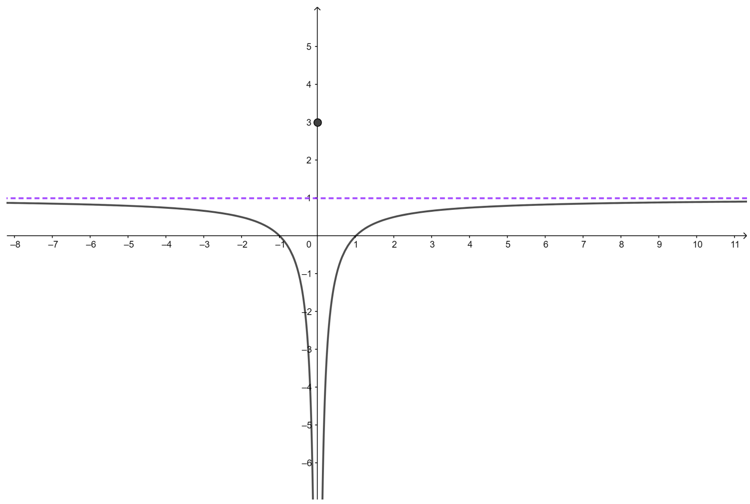
Observaţia 16. *Inegalitatea strictă în definiţia punctului de maxim local nu afectează Observaţia 15 de mai sus. Altfel, orice punct din intervalul* $[1,2]$ *poate fi considerat atât punct de maxim local, cât şi punct de minim local. (Prelucrare a unui exemplu din* [8]*, pag. 47.)*

Observaţia 17. *Dacă o funcţie* f *admite un punct de maxim local* x_0*, nu rezultă că există o vecinătate* V *a punctului* x_0 *astfel încât* f *să fie crescătoare pe* $V\cap(-\infty,x_0)$ *şi descrescătoare pe* $V\cap(x_0,\infty)$.

Exemplul 15. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 1+\frac{1}{x}, \quad \textit{dacă } x<0 \\ 3, \quad \textit{dacă } x=0 \\ 1-\frac{1}{x}, \quad \textit{dacă } x>0 \end{cases}$$

este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi strict crescătoare pe $(0,\infty)$.



BIBLIOGRAFIE

[1] Sireţchi Gh.: *Calcul diferenţial şi integral*, volumul 1, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

[2] Boroica Gh., Pop V., Muşuroia N., Bojor F., Heuberger C., *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă*,
volumul II ANALIZĂ MATEMATICĂ, Editura Paralela 45, Piteşti, 2016.

[3] Gologan R., Cicu I., Negrescu A., Bojor F., Boroica Gh., Heuberger D., Muşuroia N. : *Teme Supliment Gazeta Matematică*, Editura Cartea Românească Educaţional, Piteşti, 2018.

[4] Klymchuk S. : *Counter-examples in calculus*, Editura Math Press, Londra, 2004.

[5] `https://www.viitoriolimpici.ro/uploads/attach_data/100/17/12//7e07c11.pdf`

[6] `http://refkol.ro/matek/mathbooks/ro.math.wikia.com%20wiki%20Fisiere_pdf_incarcate/Reciproca-teoremei-lui-Stolz-Cesaro.pdf`

[7] `http://math.etc.tuiasi.ro/alazu/AM1-curs/c7-AM1.pdf`

[8] Mason J., Klymchuk S. : *Using counter-examples in calculus*, Editura Imperial College Press, Londra, 2009.

Şcoala Gimnazială "Constantin Brâncuşi"
Str. Horticultorilor, no. 1
400458 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `iulia_csolpan@yahoo.ro`