DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 41 (2023) , pp. 1–6

ÎN LEGĂTURĂ CU O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE DE LA EXAMENUL DE TITULARIZARE 2021

Adrian BUD

Abstract. Următoarea problemă, a fost dată la examenul naţional de titularizare în învăţământ, anul 2021. Soluţia oficială este însoţită de alte 8 soluţii alternative.

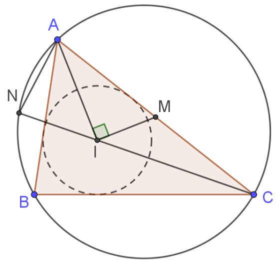
Problemă

Punctul I este centrul cercului înscris în ΔABC şi punctul N este al doilea punct de intersecţie a dreptei CI cu cercul circumscris triungiului ABC.

a) Arătaţi că $\angle AIN = \dfrac{\angle A + \angle C}{2}$.

b) Demonstraţi că ΔANI este isoscel.

c) Ştiind că $AI \perp IM$ unde M este mijlocul lui AC, arătaţi că $CI = 2 \cdot IN$.



Deoarece punctele a) şi b) sunt relativ simple, ne vom abate atenţia asupra punctului c), pe care îl vom soluţiona prin câteva metode enumerate mai jos.

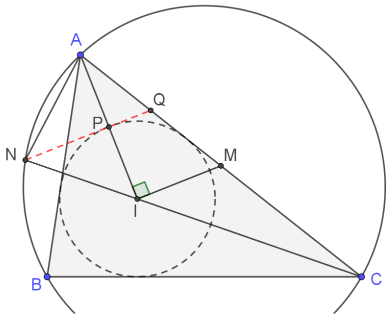
Se vor considera cunoscute:

ΔANI este isoscel cu $NA = NI$ şi $\angle NAI = \angle AIN = \dfrac{A + C}{2}$.

Soluţia 1 Soluţia oficială

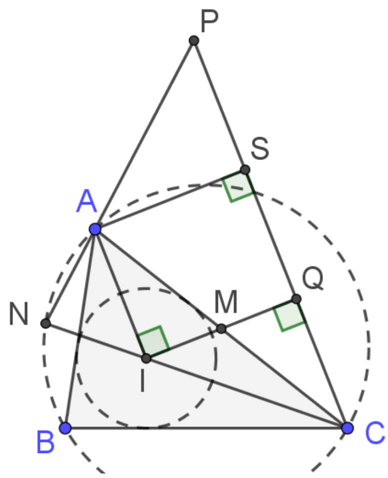
Notăm cu P şi Q mijloacele lui AI şi AM. În triunghiul NAI isoscel, NP este mediană de unde rezultă $NP \perp AI$. Dar $MI \perp AI$, astfel că $NQ \parallel MI$.

În triunghiul AIM, PQ este linie mijlocie, de unde se obţine $PQ \parallel IM$, adică punctele N, P, Q sunt coliniare iar $MQ = AQ$, mai mult $CM = 2 \cdot MQ$.



În triunghiul ANC aplicăm teorema lui $Thales$ pentru $IM \parallel NQ$ şi obţinem $\frac{CM}{MQ} = \frac{CI}{NI}$. De aici rezultă $\frac{CI}{NI} = 2$, adică $CI = 2 \cdot IN$.

Soluţia 2



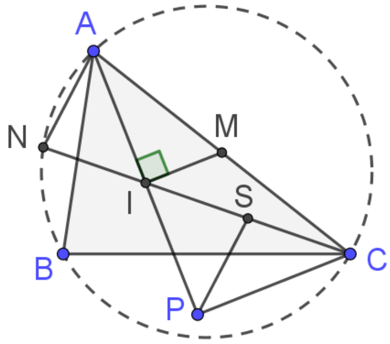
Construim prin C o paralelă la AI care intersectează dreapta NA în P. Considerăm punctul S astfel încât $AS \perp PC$ şi notăm cu Q intersecţia dreptelor PC şi IM. Deoarece ΔNAI este isoscel cu $NA = NI$ rezultă că şi ΔNPC este isoscel cu $NP = NC$, astfel că $AP = IC$.

În triunghiul NPC avem $\angle NCP = \angle NPC = \frac{\pi - \angle PNC}{2} = \frac{\pi - B}{2}$.

Deoarece $MI \perp AI$ rezultă $IQ \perp PC$. Din congruenţa triunghiurilor MIA şi MQC $(I.U.)$ rezultă $QC = AI$.

Din congruenţa triunghiurilor ASP şi IQC $(I.U.)$ rezultă $PS = QC = SQ(= AI)$. Astfel $AI = \frac{PC}{3}$. Triunghiurile NAI şi NPC sunt asemenea cu raportul de asemănare $k = \frac{1}{3}$, astfel că $\frac{NI}{NC} = \frac{1}{3}$. De aici rezultă $NC = 3 \cdot NI$, adică $CI = 2 \cdot IN$.

Soluţia 3

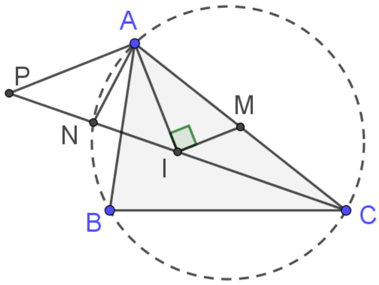


Considerăm punctul P simetricul lui A faţă de I şi notăm cu S mijlocul segmentului IC. Atunci IM este linie mijlocie în triunghiul APC, deci $IM \parallel PC$, de unde rezultă $AP \perp CP$.

PS este mediana din unghiul drept în triunghiul IPC, astfel că $PS = IS = CS$.

$\angle PCS = \angle PCA - \angle ACI = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) - \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} = \frac{B}{2}$. Atunci $\angle PIC = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} = \angle PIS = \angle AIN$. În triunghiul SPC isoscel avem $\angle SPC = \angle SCP = \frac{B}{2}$, astfel $\angle ISP = 2 \cdot \angle SCP = \angle B = \angle ANI$. Din congruenţa triunghiurilor AIN şi PIS (L.U.U.) rezultă $NI = SI = SC$, astfel că $CI = 2 \cdot NI$.

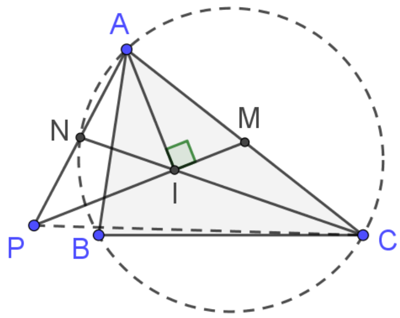
Soluţia 4



Considerăm punctul P simetricul lui I faţă de N.

Deoarece $AN = NI = NP$ rezultă că triunghiul AIP este dreptunghic în A şi astfel $AP \parallel IM$. În triunghiul CAP avem IM linie mijlocie, de unde rezultă $CI = IP = 2 \cdot NI$.

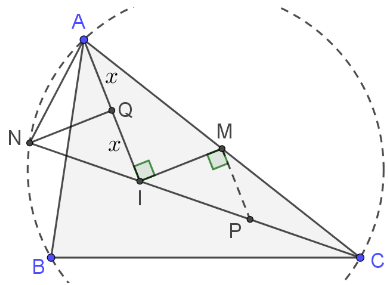
Soluţia 5



Considerăm punctul P simetricul lui A faţă de N.

Deoarece $AN = NI = NP$ rezultă că triunghiul AIP este dreptunghic în I şi astfel punctele P, I şi M sunt coliniare. În triunghiul CAP segmentele CN şi PM sunt mediane astfel că I este centru de greutate al triunghiului, de rezultă $CI = 2 \cdot NI$.

Soluţia 6



Fie P şi Q mijloacele laturilor IC respectiv AI şi notăm $AI = 2x$. deoarece $ANBC$ este inscriptibil avem $\angle ANC = \angle ABC$.

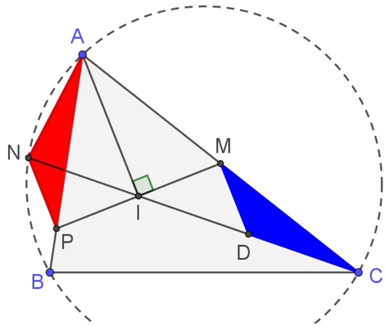
În triunghiul NAI isoscel ($NA = NI$) avem $\angle AIN = \dfrac{\pi - \angle ANC}{2} = \dfrac{\pi - \angle ABC}{2}$, iar $\angle MIP = \pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi - B}{2} = \dfrac{B}{2}$.

Deoarece MP este linie mijlocie în triunghiul CAI rezultă $MP \parallel AI$, astfel că $MP \perp IM$ iar $MP = x$. Atunci $\angle MPI = \angle AIN = \dfrac{\pi - B}{2}$.

În triunghiul MIP avem $\sin(\angle MIP) = \dfrac{MP}{IP}$, de unde $IP = \dfrac{x}{\sin \dfrac{B}{2}}$. În triunghiul NQI avem $\cos(\angle AIN) = \dfrac{QI}{NI}$, de unde rezultă $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{x}{NI}$

şi astfel $NI = \dfrac{x}{\sin \dfrac{B}{2}}$. Atunci $IP = IN$, adică $CI = 2 \cdot NI$.

Soluţia 7



Considerăm punctele $P \in AB$ şi $D \in IC$ astfel încât $AP = AM$ şi $NI = ID$. Deoarece triunghiul APM este isoscel rezultă bisectoarea AI este şi înălţime şi mediană, astfel punctele P, I şi M sunt coliniare iar I este mijlocul lui PM. Mai mult avem $PA = AM = MC$.

Din congruenţa triunghiurilor NIP şi DIM (L.U.L.) rezultă $NP = MD$ şi $\angle NPI = \angle DMI$, adică $NP \parallel MD$. Patrulaterul $ANBC$ este inscriptibil rezultă $\angle NAB = \angle NCB$, adică $\angle NAP = \angle MCD$.

$\begin{matrix} \Delta NAP \\ \Delta DCM \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} [NP] \equiv [DM] \\ [AP] \equiv [CM] \\ \angle NAP \equiv \angle DCM \end{matrix} \right\} \overset{L.L.U.!!!}{\Longrightarrow} \Delta NAP \equiv \Delta MDC$ şi de aici rezultă $NA = DC$, adică $NI = DC$. Astfel se obţine $CI = 2 \cdot NI$.

Soluţia 8

În triunghiul AIC aplicăm teorema medianei, astfel $IM^2 = \dfrac{2 \cdot \left(IA^2 + IC^2\right) - AC^2}{4} = \dfrac{2 \cdot \left(IA^2 + IC^2\right) - 4AM^2}{4} = \dfrac{IA^2 + IC^2 - 2AM^2}{2}$.

Deoarece $IM^2 + IA^2 = AM^2$, conform teoremei lui Pitagora în triunghiul AIM, după efectuarea calculelor se obţine $AC^2 = 3 \cdot AI^2 + IC^2$.

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ANI şi obţinem $\cos(\angle ANI) = \dfrac{2NI^2 - AI^2}{2NI^2}$, iar în triunghiul ANC avem $\cos(\angle ANC) = \dfrac{AN^2 + NI^2 - AC^2}{2AN \cdot NC} = \dfrac{NI^2 + NC^2 - 3AI^2 - IC^2}{2NI \cdot NC}$. Prin egalarea relaţiilor se obţine $\dfrac{2NI^2 - AI^2}{2NI^2} = \dfrac{NI^2 + NC^2 - 3AI^2 - IC^2}{2NI \cdot NC}$, sau $\dfrac{2NI^2 - AI^2}{NI} = \dfrac{NI^2 + NC^2 - 3AI^2 - IC^2}{NC}$.

Prin aducere la acelaşi numitor şi reducerea termenilor asemenea se obţine $AI^2 \left(3NI - NC\right) = 0$ de unde obţinem $NC = 3 \cdot NI$, adică $CI = 2 \cdot NI$.

Soluţia 9

$\angle NAI = \dfrac{A+C}{2}$, de unde rezultă $\sin(\angle NAI) = \sin\dfrac{A+C}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi - B}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}\right) = \cos\dfrac{B}{2}$.

$\angle ANI = \angle B$, astfel că $\sin(\angle ANI) = \sin B = 2\cdot\sin\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}$.

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul NAI avem $\dfrac{NI}{\sin(\angle NAI)} = \dfrac{AI}{\sin(\angle ANI)}$. Prin înlocuire relaţia devine $NI = \dfrac{AI}{2\cdot\sin\dfrac{B}{2}}$ (1).

$\sin\left(\dfrac{\angle MIC}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \angle AIN\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A+C}{2}\right) = \cos\dfrac{A+C}{2} = \sin\dfrac{B}{2}$.

Deoarece M este mijlocul lui AC rezultă că ariile triunghiurilor AIM şi MIC sunt egale, adică $\dfrac{AI\cdot IM}{2} = \dfrac{MI\cdot CI\cdot\sin\left(\dfrac{\angle MIC}{2}\right)}{2}$. După simplificare obţinem $AI = CI\cdot\sin\left(\dfrac{\angle MIC}{2}\right) = CI\cdot\sin\dfrac{B}{2}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $NI = \dfrac{AI}{2\cdot\sin\dfrac{B}{2}} = \dfrac{CI}{2}$ şi astfel $CI = 2\cdot NI$.

Liceul Teoretic Negreşti Oaş
e-mail: `adibud1@yahoo.com`