DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 31(2013), N° 1, pp. 63–69

TEOREMA, PRIVIRE DINSPRE INFORMATICĂ. EXEMPLIFICĂRI CU GRAFE HAMILTONIENE

Teodor Toadere

Abstract. We present some generalities on propositions and on the special case of theorems. Then we consider several theorems related to Hamiltonian graphs, emphasizing the relation between them and the importance of clearly understanding the hypothesis and the conclusion in order to give their proofs.

1. TEOREMA

Cum este deja cunoscut, teorema este un obiect (identificat printr-un substantiv, valoarea sa putând fi o constantă sau având valoarea unui identificator) şi în acelaşi timp o unealtă, instrument de lucru (identificat printr-un verb, acţiune sau algoritm de tip funcţie sau procedură). Sub acest nume este întâlnită frecvent în matematică, dar apare şi în alte domenii ale ştiinţelor cu denumiri diferite ca: lege, principiu, regulă, formulă, etc. Mulţimea teoremelor este o submulţime a mulţimii propoziţiilor adevărate. Această submulţime (teoremele) este cunoscută de către oameni parţial şi în mod diferit, în funcţie de nivelul de instruire şi gradul de specializare al fiecărei persoane. Aşadar, mulţimea teoremelor are şi un grad de subiectivism şi diferă de la persoană la persoană. Pentru a deveni teoremă, o propoziţie trebuie mai întâi formulată şi cel puţin o dată demonstrată (conform domeniului ştiinţific în care se enunţă teoretic sau experimental) ca fiind adevărată, apoi ea se va utiliza ca instrument de lucru pentru dezvoltarea respectivului domeniu al ştiinţei.

Privind dinspre informatică, domeniul teoriei limbajelor formale, propoziţia este o expresie cu propoziţii sau o secvenţă (cuvânt) de caractere terminale (mai lungă sau mai scurtă) care se obţine din axioma gramaticii respectând regulile de derivare. Dacă în limbile vorbite există termeni diferiţi pentru diferite tipuri de secvenţe ca: propoziţie simplă, frază, paragraf, capitol, volum, roman, etc., în teoria limbajelor formale toate acestea se includ în mulţimea propoziţiilor. Cunoscând că în mulţimea propoziţiilor cu ajutorul operatorilor (operaţiilor): şi, sau, not (negaţia), implicaţia ($\Rightarrow$), echivalenţa ($\Leftrightarrow$), din una sau două propoziţii date se construieşte o altă (nouă) propoziţie şi că într-o expresie cu propoziţii pot apărea mai mulţi operatori, există ordine de prioritate în efectuarea operaţiilor, sau ordinea de efectuare a operaţiilor se precizează cu ajutorul parantezelor, vom da o definiţie recursivă pentru noţiunea de propoziţie.

Prin propoziţie înţelegem fie o propoziţie simplă, fie o expresie cu propoziţii. Dintre propoziţii unele pot fi adevărate, altele false, altele nedecidabile, sau alte tipuri în funcţie şi de tipul logicii în care se lucrează. Fără a intra prea adânc sau în detalii ale logicii considerăm ca bună (acceptabilă) următoarea definiţie. Dintre propoziţiile pentru care există cel puţin o demonstraţie că sunt adevarate, cele care au ca ultima operaţie implicaţia ($\Rightarrow$) sau echivalenţa ($\Leftrightarrow$), alese în mod subiectiv, unele formează mulţimea teoremelor. Aşadar, mulţimea teoremelor este mai mare sau mai mică şi în funcţie de persoana care face referire la aceasta. Încadrarea sau recunoaşterea unor propoziţii adevărate ca fiind teoreme este deci subiectivă. De asemenea, subiectivă este şi catalogarea unor propoziţii adevărate ca fiind: teoreme, leme, proprietăţi, observaţii, corolare sau consecinţe. De obicei, teoremele au un grad mai ridicat de generalitate şi aplicabilitate, lemele se utilizează la demonstrarea unor teoreme şi de regulă se dau în vecinătatea demonstraţiilor acelor teoreme, iar corolarele se obţin ca şi cazuri particulare din teoreme, în timp ce observaţiile şi consecinţele sunt propoziţii al căror caracter de adevăr se demonstrează mai uşor.

Având o teoremă "P1 $\Rightarrow$ P2" despre P1 se spune că este ipoteza teoremei, în timp ce P2 este concluzia teoremei; în alţi termeni se spune că P1 este cerinţa teoremei iar P2 este afirmaţia teoremei. Teoremele sunt, aşa cum s-a spus, propoziţii demonstrate (cel puţin de către autorul lor) ca fiind adevărate. Dar, ele fiind şi instrument de lucru (privite din informatică sunt verbe, algoritmi, proceduri sau funcţii) ele funcţionează (se pot cita, se pot folosi) doar uneori. Pentru a putea folosi (cita) o teoremă trebuie demonstrat, mai întâi, că cerinţa (ipoteza) acelei teoreme are loc (este adevărată) în contextul în care vrem să o utilizăm. Adică, în sens informatic, precondiţiile acelei funcţii sunt îndeplinite (variabilele de intrare au valori corespunzătoare). Deci, înainte de a folosi o teoremă trebuie să demonstrăm că ea funcţionează. Să observăm că teoremele sunt întotdeauna adevărate, dar funcţionează uneori (doar dacă este îndeplinită cerinţa, adică ipoteza lor).

Referitor la o teoremă de forma "P1 $\Rightarrow$ P2" se mai spune şi că P1 este suficientă pentru P2 şi că P2 este necesară pentru P1. Adică, vorbind din punct de vedere cantitativ (al informaţiei, resursei sau energiei din propoziţii) se spune că în P1 este mai mult decât în P2 şi că P1 nu poate avea loc fără ca înainte (sau în acelaşi timp) să aibă loc P2.

Despre două teoreme de tipul "P1 $\Rightarrow$ P2" şi "P3 $\Rightarrow$ P2", uneori se spune că prima este mai tare decât a doua (sau că a doua este mai slabă decât prima) dacă cerinţa P1 este "mai tare", adică este îndeplinită de mai puţine obiecte decât cerinţa P3, care este "mai slaba" şi deci îndeplinită de mai multe obiecte. Altfel spus, cantitatea de informaţie (resursă, energie) din P1 este mai multă decât cea din P3, şi în ambele este cel puţin cât în P2. Aplicând monotonia se poate exprima şi altfel: "ce se poate obţine din puţin (teorema P3 $\Rightarrow$ P2) se poate obţine şi din mult (teorema P1 $\Rightarrow$ P2)". Însă, propoziţia "P1 $\Rightarrow$ P3" poate fi falsă.

Dacă teorema este de forma "P1 $\Leftrightarrow$ P2", adică au loc simultan teoremele "P1 $\Rightarrow$ P2" şi "P2 $\Leftarrow$ P2", atunci fiecare dintre propoziţiile P1 şi P2 este necesară şi suficientă pentru cealaltă, sau cele două sunt echivalente - adică presupun (conţin) aceeaşi cantitate de informaţie (resursă, energie). Deci, dacă una din ele devine adevărată, în acelaşi timp devine adevărată şi cealaltă.

2. EXEMPLIFICĂRI CU GRAFE HAMILTONIENE

Aşa cum se ştie, graful este un obiect abstract cu ajutorul căruia se pot modela sisteme şi se pot rezolva anumite probleme în (pe, sau legate de) aceste sisteme. Prin graf înţelegem o pereche (X, U) notată G de două mulţimi, X o mulţime oarecare de obiecte eterogene sau omogene, iar U o mulţime de perechi de elemente din X. În funcţie de cum sunt elementele în perechile din U, adică ordonate (de tip aranjament) sau neordonate (de tip combinare sau submulţime cu 2 elemente), grafele se numesc orientate, respectiv neorientate. Elementele lui X se vor numi vârfuri ale grafului G, dar pentru că nu ne interesează natura lor, dacă $n := |X|$, mulţimea X a vârfurilor se consideră a fi primele n numere naturale sau $X = 1, ..., n$, iar n este ordinul grafului G. Elementele lui U se numesc arce (pentru grafele orientate), respectiv muchii (pentru grafele neorientate); arcul $u \in U$ se mai notează $u = (i, j)$ sau $u = ij$ când dorim să precizăm extremitatea iniţială (i) şi extremitatea finală (j) a arcului u, respectiv extremităţile muchiei u. Deducem că arcul (i, j) este diferit de arcul (j, i), în timp ce muchia (i, j) este aceeaşi cu muchia (j, i). Cardinalul mulţimii U, notat de regulă cu m se numeşte dimensiunea lui G. Vârfurile i şi j sunt extremităţi ale muchiei (i, j), iar pentru arcul (i, j) vârful i este extremitatea iniţială iar vârful j este extremitatea terminală a sa. Muchia $u = (i, j)$ este incidentă vârfurilor i şi j, respectiv arcul $u = (i, j)$ este incident spre interior lui j şi incident spre exterior lui i. Gradul vârfului i, notat $g(i)$, este numărul de arce, respectiv muchii (după cum graful este orientat sau neorientat) pentru care acel vârf este extremitate. Unele noţiuni, deşi diferit definite pentru cele două tipuri de grafe, se pot considera similare, cum ar fi drumul cu lanţul, sau circuitul cu ciclul. Drum (lanţ) este orice succesiune de vârfuri ale grafului dat cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive ale succesiunii în ordinea din succesiune este sau formeaza un arc (respectiv o muchie) a grafului. Precizăm că într-un drum (lanţ) un vârf sau un arc (muchie) poate să apară, adică să fie utilizat, de mai multe ori. Circuit (ciclu) sunt acele drumuri (lanţuri) ale grafului care au proprietatea că ultimul vârf şi primul vârf al lor coincid, sau între aceste vârfuri în această ordine există un arc (respectiv muchie). Precizăm că, deoarece ordinea vârfurilor în definirea arcelor contează, un drum poate fi precizat ca o singură succesiune de vârfuri, de la extremitatea iniţială a drumului la cea finală. Muchia (i, j) fiind aceeaşi cu muchia (j, i), un lanţ poate fi precizat în două moduri de la una dintre extremităţile sale spre cealaltă. Deci, un acelaşi circuit poate fi precizat începând cu oricare dintre vârfurile sale şi respectând apoi sensul arcelor, iar fiecare ciclu în număr dublu de moduri decât circuitul similar, deoarece se poate urma oricare dintre sensuri (cel trigonometric sau cel al acelor de ceasornic). Drumurile (lanţurile), deci şi circuitele (ciclurile), pot avea unele proprietăţi numite elementare, simple, euleriene sau hamiltoniene. A fi hamiltonian înseamnă că obiectul respectiv (drum, lanţ, circuit sau ciclu) foloseşte (trece prin) toate vârfurile grafului şi o singură dată. Grafele sunt hamiltoniene dacă au (conţin) cel puţin un ciclu hamiltonian. Un graf orientat G are sau nu proprietatea de a fi hamiltonian dacă graful neorientat G' (obţinut din G prin înlocuirea fiecărui arc (i, j) al său cu muchia (i, j)) este hamiltonian, respectiv nu este hamiltonian.

TEOREMA 1. *Dacă G este graful complet de ordin n , (graful neorientat cu n vârfuri şi numar maxim de muchii, adică*

$$m = \frac{n(n-1)}{2},$$

sau fiecare pereche, combinare sau submulţime cu 2 vârfuri ale grafului este muchie) atunci acest graf are cicluri hamiltoniene.

Această teoremă are ca ipoteză un număr natural $n \geq 2$ şi unicul graf complet cu n vârfuri (cel în care toate perechile de vârfuri sunt muchii), iar în concluzia ei se afirma că numărul ciclurilor hamiltoniene este $(n-1)!/2$ (prin urmare toate grafele complete cu $n \geq 2$ sunt hamiltoniene).

Demonstraţia teoremei se poate face prin a determina numărul ciclurilor hamiltoniene ale acestui graf. În graful complet orice permutare a celor n vârfuri este un ciclu hamiltonian. Se observă că un acelaşi ciclu (permutare circulară) se poate desfăşura în $2n$ permutări. Deoarece se începe prezentarea cu oricare dintre vârfurile ciclului şi apoi se poate parcurge pe unul dintre cele două sensuri (trigonometric sau al acelor de ceasornic) deducem că numărul ciclurilor hamiltoniene este

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}.$$

Să observăm că această teoremă putea fi formulată ca problemă în care să se ceară a determina numărul ciclurilor hamiltoniene pentru un graf complet de ordin n dat.

Deoarece fiecare ciclu hamiltonian are exact n muchii, cel puţin grafele care au numărul de muchii mai mic decât numărul de vârfuri ($m < n$), sau care au vârfuri izolate (de grad 0), sau care nu sunt conexe nu sunt hamiltoniene. Folosind şi teorema deducem că pentru fiecare $n \geq 2$ atât mulţimea grafelor hamiltoniene cât şi cea a grafelor nehamiltoniene este nevidă. Se pune, deci, problema dacă un graf G este sau nu hamiltonian doar pentru grafe conexe care nu au vârfuri izolate şi $m \geq n$.

Teorema 2. *Dacă* $G = (X, U)$ *este un graf de ordin* $n \geq 3$ *şi pentru orice pereche de vârfuri neadiacente* $p, q \in X$ *are loc*

$$g(p) + g(q) \geq n,$$

atunci G *este hamiltonian [Ore60].*

Cerinţa (ipoteza) teoremei este ca suma gradelor să fie destul de mare pentru fiecare pereche de vârfuri neadiacente ale grafului G. Deci, câte perechi de vârfuri nu sunt adiacente tot atatea condiţii trebuie îndeplinite pentru a funcţiona teorema 2. Afirmaţia (concluzia) acestei teoreme este că fiecare dintre grafele care îndeplinesc aceste condiţii este hamiltonian.

Demonstraţia acestei teoreme se poate face cu metoda reducerii la absurd. De aceea ea se face pentru grafele ce îndeplinesc cerinţa teoremei şi în plus sunt saturate. Prin graf saturat în mulţimea grafelor nehamiltoniene înţelegem acel graf care are grade maxime ale vârfurilor sale. Adică, dacă fiecare pereche de vârfuri care nu este muchie în graf ar deveni muchie, noul graf ar fi hamiltonian. Alegând o singură pereche de vârfuri i, j neadiacente (toate fiind relativ egale în sensul că graful $G+ij$ este hamiltonian) se demonstrează că $g(i)+g(j) < n$, ceea ce constituie o contradicţie.

Presupunerea că G este saturat nu restrânge generalitatea, deoarece dacă în submulţimea grafelor ce îndeplinesc condiţiile teoremei şi în plus sunt saturate (au vârfurile cu grade mari) s-a găsit o pereche de vârfuri cu suma gradelor $< n$ (destul de mică pentru a fi contradicţie), cu atât mai mult şi dacă G nu ar fi saturat, având vârfuri cu grade mai mici, s-ar găsi un contraexemplu. Bazându-ne pe demonstraţie şi pe această observaţie vom formula teorema 3 cu cerinţa mai slabă decât a teoremei 2. Deci, teorema 3 este mai tare decât teorema 2 (pentru că numărul grafelor care sunt hamiltoniene îndeplinind cerinţa teoremei 3 este mai mare decât cel al grafelor care îndeplinesc cerinţa teoremei 2).

Teorema 3. *Dacă* $G = (X, U)$ *este un graf de ordin* $n \geq 3$ *şi există o pereche de vârfuri neadiacente* $p, q \in X$ *pentru care*

$$g(p) + g(q) \geq n$$

şi $G + pq$ *este hamiltonian, atunci* G *este hamiltonian.*

De fapt forma cunoscută în literatură şi care conţine teorema 3 este:

Teorema 3′. *Dacă* $G = (X, U)$ *este un graf de ordin* $n \geq 3$ *şi există o pereche de vârfuri neadiacente* $p, q \in X$ *pentru care*

$$g(p) + g(q) \geq n,$$

atunci G *este hamiltonian dacă şi numai dacă* $G + pq$ *este hamiltonian [BLW76].*

Implicaţia introdusă în teorema 3' în plus faţă de teorema 3 este banală (un graf hamiltonian rămâne hamiltonian şi după ce i se adaugă o muchie).

TEOREMA 4. *Dacă $G = (X, U)$ este un graf de ordin $n \geq 3$ şi $g(i) \geq n/2$, pentru orice $i \in X$ atunci G este hamiltonian [Dir52].*

Pentru demonstraţia acestei teoreme se poate folosi teorema 2, deşi ea s-a formulat mai târziu, şi demonstraţia este imediată. Deci, teorema 2 poate fi considerată a fi lemă pentru teorema 4.

TEOREMA 5. *Se dă un graf $G = (X, U)$ de ordin $n \geq 3$, cu*

$$X = 1, ..., n \quad si \quad 0 < g(1) \leq \cdots \leq g(n).$$

Graful G conţine un ciclu hamiltonian dacă existenţa unui vârf k cu

$$g(k) \leq k \leq n/2$$

implică

$$g(n - k) \geq n - k$$

(teorema lui Chvátal).

Pentru această teoremă cerinţa este dată atât înaintea afirmaţiei ei, cât şi după. Se cere să demonstrăm că G este un graf hamiltonian în ipoteza că are loc implicaţia precizată. Implicaţia fiind în ipoteză, ea trebuie să aibă loc pentru toate valorile lui k pentru care

$$g(k) \leq k \leq n/2,$$

deci pentru orice valoare a lui k (vârf k). Precizăm de asemenea că dacă nu există nici un vârf k pentru care

$$g(k) \leq k \leq n/2,$$

atunci G este hamiltonian.

Demonstraţia teoremei se poate face tot cu metoda reducerii la absurd şi cu presupunerea că graful G este saturat, ca la teorema 2 (a lui Ore) şi chiar preluând o parte din acea demonstraţie. O idee interesantă a demonstraţiei este faptul că valoarea aleasă pentru vârful (variabila) k necesară construcţiei unei contradicţii pentru implicaţia din teoremă este gradul unui vârf al grafului.

Demonstraţiile teoremelor se află şi în lucrările [Toa02] sau [Tom81].

BIBLIOGRAFIE

[Dir52] G. A. Dirac, *Some theorems on abstract graphs,* Proc. London Math. Soc. Vol 2 (3) (1952), 69 – 81

[Ore60] O. Ore, *Note on Hamiltonian circuits,* Amer. Math. Monthly, 67 (1960), 55-55

[BLW76] N. L. Biggs, E. K. Loyd, R. J. Wilson, *Graph Theory 1736 – 1936,* Oxford University Press, 1976

[Toa02] T. Toadere, *GRAFE teorie, algoritmi şi aplicaţii*, Ed.Albastră, Cluj-Napoca 2002 (reeditată în 2002 şi în 2009)

[Tom81] I. Tomescu, *Probleme de Combinatorică şi Teoria Grafurilor,* Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1981

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: toadere@cs.ubbcluj.ro

Primit la redacţie: 1 Octombrie 2011