DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 31(2013), N° 1, pp. 51–55

NUMERE PITAGORICE

Ileana Stanciu, Emil Stanciu şi Ioan Stanciu

Abstract. In the present paper our intention is to define the Pythagorean numbers and to solve the corresponding equation.
Several problem suitable in the class are also given.

1. INTRODUCERE

Ecuaţia de gradul II

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

unde x, y, z sunt numere întregi este numită *ecuaţia lui Pitagora.* Căutăm toate soluţiile acestei ecuaţii, vom exclude soluţiile banale în care cel puţin o necunoscută este zero şi ne vom restrânge la soluţiile naturale.

Definiţia 1. *Dacă numerele x, y, z satisfac ecuaţia lui Pitagora spunem că ele sunt numere pitagorice sau că ele formează un triunghi pitagoreic.*

Definiţia 2. O soluţie a ecuaţiei lui Pitagora se numeşte *soluţie primitivă* dacă x, y, z sunt numere naturale şi relativ prime între ele.

Lema 1. *Soluţiile ecuaţiei lui Pitagora sunt de forma*

$$x = du,\ y = dv,\ z = dw \tag{2}$$

unde (u, v, w) este o soluţie primitivă a ecuaţiei lui Pitagora iar d este un număr natural arbitrar.

Demonstraţie: Dacă (u, v, w) este o soluţie primitivă a ecuaţiei (1) , atunci $u^2 + v^2 = w^2$, care, multiplicat cu d^2 conduce la faptul că (2) este soluţie pentru (1).

Reciproc dacă x, y, z este o soluţie în numere naturale pentru (2) atunci punând $(x, y, z) = d$, avem $x = du$, $y = dv$, $z = dw$, cu $u^2 + v^2 = w^2$, ceea ce arată că u, v, w este o soluţie primitivă pentru (1).

Deci pentru a găsi toate solutiile ecuaţiei (1) este suficient să găsim soluţiile primitive ale ei.

Lema 2. *Dacă x, y, z este o soluţie primitivă a ecuaţiei (1), atunci x şi y sunt de parităţi diferite şi z este număr impar.*

Demonstraţie. Dacă x şi y ar fi amândoua pare atunci şi z ar fi par, ceea ce implica $(x, y, z) > 1$ contrar cu presupunerea că x, y, z este o soluţie primitivă a ecuatiei (1).

Dacă x şi y ar fi amândouă impare atunci z trbuie să fie număr par. Pătratul unui număr impar este de forma $M_8 + 1$ deci $x^2 + y^2 = M_8 + 2$, iar $z^2 = M_8$, contradictie.

Teoremă. *Soluţiile primitive ale ecuaţiei lui Pitagora sunt date de formulele:*

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$

unde m, n sunt numere naturale relativ prime între ele, de parităţi diferite cu $m > n$.

Demonstraţie. Fie x, y, z soluţie primitivă pentru ecuaţia (1).

Putem scrie $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$.

Numărul y fiind par conchidem că $z - x$ şi $z + x$ sunt numere pare. Deci $z+x = 2a$ şi $z-x = 2b$, unde a şi b sunt numere naturale. De aici $z = a+b$ şi $x = a-b$. Numerele a şi b sunt prime între ele. Dacă presupunem că $(a, b) = d$ avem $a = du$, $b = dv$ cu $(u, v) = 1$. Deci $y^2 = d^2(u^2 - v^2)$, care ne arată că y se divide prin d, ceea ce e imposibil deoarece x, y, z e o soluţie primitivă.

Cum y este par luând $y = 2c$, c număr natural, obţinem $c^2 = ab$. Cum $(a, b) = 1$ rezultă că $a = m^2$, $b = n^2$, cu $(m, n) = 1$ şi $m > n$. Acum obţinem:

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2 \text{ cu } (m, n) = 1, m > n$$

Reciproc să arătăm că dacă x, y, z sunt generate de formulele din teorema să arătăm ca ele constituie o soluţie primitiva pentru ecuatia (1)

Egalitatea evidentă

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

ne arată că x, y, z sunt soluţii pentru (1).

Să mai arătăm că $(x, y, z) = 1$. Presupunem că $(x, y, z) = d$ cu $d > 1$. Din $z = m^2 + n^2$ impar rezultă că d este impar. Din $x + z = 2m^2$ şi $z - x = 2n^2$ urmează că m şi n se divid cu d, ceea ce e în contradicţie cu $(m, n) = 1$. Această contradicţie implică că $d = 1$. Deci x, y, z din teoremă generează toate soluţiile primitive pentru ecuaţia lui Pitagora.

Observaţie. *Toate soluţiile ecuaţiei lui Pitagora sunt date de*

$$x = (m^2 - n^2)t,\ y = 2mnt,\ z = (m^2 + n^2)t$$

2. APLICAŢII

Aplcaţia 1.

Rezolvaţi ecuaţia $x^2 + p^2 = z^2$ unde x şi z sunt numere naturale, iar p este un număr natural prim.

Soluţie. Avem $(z - x)(z + x) = p^2$, de unde $z - x = 1$ şi $z + x = p^2$. De aici $x = \frac{p^2-1}{2}$, $z = \frac{p^2+1}{2}$.

Aplcaţia 2.

Să se rezolve ecuaţia

$$x^2 + p^2 = q^2$$

unde x este număr natural iar p şi q sunt numere naturale prime.

Soluţie.

$$p^2 = q^2 - x^2 = (q - x)(q + x).$$

Deoarece p este prim rezultă

$$\begin{cases} q - x = 1 \\ q + x = p^2 \end{cases}$$

de unde $x = \frac{p^2-1}{2}$ şi $q = \frac{p^2+1}{2}$.

Aplcaţia 3.

Să se rezolve ecuaţia $p^2 + q^2 = s^2$ unde p, q, s sunt numere naturale prime.

Soluţie. Un număr e par Fie $p = 2$. Avem $4+q^2 = s^2$ de unde $(s-p)(s+p) = 4$

Avem $s - q = 1$ şi $s + q = 4$. De aici $q = \frac{3}{2}$ şi $s = \frac{5}{2}$ care nu sunt numere naturale. Deci ecuaţia nu are soluţii.

Aplicaţia 4.

Să se rezolve ecuaţia: $x^2 + (1 - x)^2 = y^2$ unde x şi y sunt numere întregi.

Soluţie. I. Fie $x = m^2-n^2$, $1-x = 2mn$ şi $y = m^2+n^2$. De aici $x = 1-2mn$ deci $m^2 - n^2 = 1 - 2mn$ de unde $m^2 - n^2 = 1 - 2mn$ sau $(m + n)^2 - 2n^2 = 1$, adică $(m + n)^2 - 1 = 2n^2$, de unde $(m + n - 1)(m + n + 1) = 2n^2$.

a) $n = 1$

Obţinem $m(m + 2) = 2$. Nu avem soluţii.

b) $n > 1$

Avem $m + n - 1 = 2$ şi $m + n + 1 = n^2$. Obţinem $n^2 = 4$ şi $n = 2$, $m = 1$ sau $n = -2$, $m = 5$. Avem $x_1 = \pm 3$, $y_1 = \pm 5$, $x_2 = \pm 21$, $y_2 = \pm 29$.

II. $x = 2mn$, $1 - x = m^2 - n^2$. Se rezolvă ca în cazul precedent.

Ecuaţia are un numar finit de soluţii.

Aplicaţia 5.

Să se rezolve ecuaţia $x^2 + y^2 = (y + 1)^2$, unde x, y sunt numere întregi.

Soluţie. $x^2 = (y + 1)^2 - y^2 = 2y + 1$. Ecuaţia are o infinitate de soluţii.

Aplicaţia 6.

Să se rezolve ecuaţia $x^2 + k^{2n} = z^2$, unde x, z, k, n sunt numere naturale.

Soluţie. Scriem $(z - x)(x + z) = k^{2n}$. Atunci $(z - x)(z + x) = k^a k^b$, cu $a + b = 2n$ şi $a < b$. Deci $z - x = k^a$ şi $z + x = k^b$. Rezolvând sistemul se obţine $x = \frac{k^b-k^a}{2}$ şi $y = \frac{k^b+k^a}{2}$.

Aplicaţia 7.

Determinaţi numerele pitagorice în progresie aritmetică.

Soluţie. În ecuaţia $x^2 + y^2 = z^2$ luăm $x = b - r$, $y = b$ şi $z = b + r$, cu b şi r numere naturale. Obţinem $(b - r)^2 + b^2 = (b + r)^2$, de unde $b = 4r$, deci $x = 3r$, $y = 4r$, $z = 5r$.

Aplicaţia 8.

Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$, unde x, y, z sunt numere naturale nenule.

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu $x^2+y^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2$. Aceasta arată că dacă (x,y,z) este o soluţie în numere naturale, atunci z divide pe xy şi x^2+y^2 este pătrat perfect. Deci $x^2+y^2=t^2$ şi $t=\frac{xy}{z}$. Fie $d=(x,y,z)$, $x=ad$, $y=bd$, $z=cd$, cu $(a,b,c)=1$. Deci $a^2+b^2=c^2$ cu a,b,c prime între ele, două câte două şi $z=\frac{abd}{c}$. Obţinem că c divide pe d, adică $d=kc$.

Prin urmare, $x=ad=kac$, $y=bd=kbc$, $z=kab$, $t=cd=kc^2$. Dar soluţiile ecuaţiei $a^2+b^2=c^2$ sunt $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$. De unde soluţiile ecuaţiei iniţiale sunt: $x=k(m^4-n^4)$, $y=2kmn(m^2+n^2)$, $z=2kmn(m^2-n^2)$

Aplicaţia 9.

Să se demonstreze că mulţimea numerelor prime e infinită.

Soluţie. Folosim un triplet (x,y,z) de numere naturale pitagorice.

Presupunem că există cel mai mare număr prim, fie el p_k şi notăm apoi cu m produsul acestor numere prime şi fie $n=1$. Atunci $(m,n)=1$, $m>n$ şi aceste numere sunt de parităţi diferite. Rezultă că m şi n generează un triplet pitagoric ($x=2mn$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$). Dacă suma $x+y$ este un număr prim, urmează că:

$$x+y=2mn+m^2-n^2=2\cdot(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_k)+(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_k)^2-1>p_k^2,$$

adică $x+y$ este un număr prim mai mare decât p_k.

Dacă numărul $x+y$ este un număr compus, acesta trebuie să aibă un divizor mai mare decât p_k.

Această ultimă presupunere se obţine din faptul că orice număr prim $q\leq p_k$ divide pe m şi deci divide pe x. Dacă $q\,|x+y$,rezulta ca $q\,|y$, lucru ce contrazice faptul că $(x,y)=1$. Deci presupunerea că p_k este cel mai mare număr prim este falsă.

Aplicaţia 10.

Să se arate ca ecuatia $s(x^2)+s(y^2)=s(z^2)$ *are o infinitate de soluţii. Am notat prin* $s(a)$ *suma cifrelor numărului* a.

Soluţie. Pentru $x=10n-1$ avem $x^2=999\ldots.99800\ldots.01$ unde cifra este 9 este de $n-1$ ori iar cifra 0 de $n-1$ ori deci $s(x^2)=9n$.

Alegem $x=10n-1$, $y=10m-1$ şi $z=10m+n-1$

Problemă

Rezolvaţi ecuaţia: $ax^2+bx+c=0$ *unde* a,b,c *sunt numere pitagorice.*

BIBLIOGRAFIE

[1] D. Acu, *Aritmetica si teoria numerelor*, Sibiu, 1999

[2] I. Cucurezeanu, *Ecuaţii în numere întregi*, Editura Aramis, 2006

[3] D. Panaitopol, A. Gica, *Probleme de aritmetică si teoria numerelor* Editura Gil, 2006

[4] P. Radovici-Marculescu *Probleme de teoria elementară a numerelor*, Editura Tehnică, 1986

[5] Stanciu Ileana, Emil, Ioan, *Asupra unei teoreme de teoria numerelor*, a XIV-a Conferinţă Anuală a SSMR, Alba-Iulia, 2010

[6] Colecţia Gazeta Matematică

C.N. "Ştefan Velovan", Craiova

Şc. Leşile, Şimnicu de Sus, Dolj

C.N. "Carol I", Craiova
e-mail: emil54stanciu@yahoo.com

Primit la redacţie: 20 August 2011