DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 31(2013), N° 1, pp. 47–50

O TEOREMĂ DE MEDIE ŞI UNELE APLICAŢII

Ovidiu T. Pop şi Dan Bărbosu

Abstract. În această notă se demonstrează o teoremă de medie ce generalizează teoremele de medie stabilite de D. Pompeiu, T. Boggio, M. Ivan şi O. T. Pop.

1. INTRODUCERE

Reamintim pentru început teoremele ce urmează a fi generalizate.

Teorema 1. (D. Pompeiu, 1946) *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietăţile:*
a) f *este continuă pe* $[a, b]$*;*
b) f *este derivabilă pe* $]a, b[$*;*
c) $0 \notin [a, b]$.
Atunci există $c \in]a, b[$ *astfel încât*

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c). \tag{1}$$

Teorema 2. (T. Boggio, 1947) *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funcţii cu proprietăţile:*
a) f, g *sunt continue pe* $[a, b]$*;*
b) f, g *sunt derivabile pe* $]a, b[$*;*
c) $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$*;*
d) $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in]a, b[$.
Atunci există $c \in]a, b[$ *astfel că*

$$\frac{g(a)f(b) - g(b)f(a)}{g(a) - g(b)} = f(c) - g(c)\frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{2}$$

Teorema 3. (M. Ivan, 1970) *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietăţile:*
a) f *este continuă pe* $[a, b]$*;*
b) f *este derivabilă pe* $]a, b[$*;*
c) $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in]a, b[$*;*
d) $f(a) \neq f(b)$.
Atunci există $c \in]a, b[$ *astfel încât:*

$$\frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}\,. \tag{3}$$

Teorema 4. (O. T. Pop, 2005) *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile*
a) f este continuă pe $[a,b]$;
b) f este derivabilă pe $]a,b[$;
c) $f'(x)\neq 0$, $(\forall)x\in]a,b[$.
Considerăm punctele $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$. Dacă punctul $M(\alpha,\beta)$ satisface condiţiile $M\in AB$ şi $M\notin[AB]$, atunci există $c\in]a,b[$ astfel că:

$$\alpha\left(f'(c)-\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}-(f(c)-cf'(c)) \tag{4}$$

şi

$$\beta\left(\frac{1}{f'(c)}-\frac{1}{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}}\right)=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}-\left(c-\frac{f(c)}{f'(c)}\right). \tag{5}$$

2. REZULTATUL PRINCIPAL

Teorema 5. *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii cu proprietăţile:*
(i) f,g sunt continue pe $[a,b]$;
(ii) f,g sunt derivabile pe $]a,b[$;
(iii) $g'(x)\neq 0$, $(\forall)\,x\in]a,b[$
şi fie $\alpha\in\mathbb{R}$ cu proprietatea
(iv) $\alpha<a$ sau $b<\alpha$.
Atunci există $c\in]a,b[$ astfel încât:

$$\begin{aligned}&\alpha\left(\frac{g(a)-g(b)}{a-b}\,\frac{f'(c)}{g'(c)}-\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)\\&=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}-\left(f(c)-\frac{g(c)}{g'(c)}\,f'(c)\right)+\frac{bg(a)-ag(b)}{a-b}\,\frac{f'(c)}{g'(c)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Demonstraţie. Din (iii) rezultă că $g(a)\neq g(b)$ şi g este strict monotonă. Arătăm că are loc relaţia:

$$a\le\frac{a-b}{g(a)-g(b)}\,g(x)+\frac{bg(a)-ag(b)}{a-b}\le b,\quad(\forall)\,x\in[a,b]. \tag{7}$$

Dacă g este strict crescătoare, atunci $\dfrac{a-b}{g(a)-g(b)}>0$ şi cum $g(a)\le g(x)\le g(b)$, $(\forall)\,x\in[a,b]$ se obţine

$$\begin{aligned}&\frac{a-b}{g(a)-g(b)}\,g(a)+\frac{bg(a)-ag(b)}{a-b}\\&\le\frac{a-b}{g(a)-g(b)}\,g(x)+\frac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)}\le\frac{a-b}{g(a)-g(b)}\,g(b)+\frac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)}\end{aligned}$$

de unde, după efectuarea calculelor, se obţine (7). Dacă g este strict descrescătoare, relaţia (7) se demonstrează analog.

Considerăm funcţiile $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin

$$u(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{a-b}{g(a)-g(b)}g(x) + \dfrac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)} - \alpha},$$

$$v(x) = \frac{1}{\dfrac{a-b}{g(a)-g(b)}g(x) + \dfrac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)} - \alpha}.$$

E uşor de verificat că funcţiile u, v satisfac condiţiile teoremei lui Cauchy pe $[a, b]$. Aplicând atunci teorema lui Cauchy funcţiilor u, v rezultă că există $c \in]a, b[$, astfel încât

$$\frac{u(a)-u(b)}{v(a)-v(b)} = \frac{u'(c)}{v'(c)},$$

relaţie echivalentă cu

$$\frac{\dfrac{f(a)}{a-\alpha} - \dfrac{f(b)}{b-\alpha}}{\dfrac{1}{a-\alpha} - \dfrac{1}{b-\alpha}}$$

$$= \frac{f'(c)\left(\dfrac{a-b}{g(a)-g(b)}g(c) + \dfrac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)} - \alpha\right) - f(c)\dfrac{a-b}{g(a)-g(b)}g'(c)}{-\dfrac{a-b}{g(a)-g(b)}g'(c)},$$

din care se obţine relaţia (6). □

Observaţia 1. Punctul intermediar c din **Teorema 5** depinde de parametrul α.

În cele ce urmează, vom prezenta câteva aplicaţii în condiţiile **Teoremei 5**.

Aplicaţia 1. Dacă $g(x) = x$, obţinem relaţia (4) din **Teorema 4** (vezi şi [5]), iar pentru $g(x) = x$ şi $\alpha = 0$, obţinem **Teorema lui D. Pompeiu**, [4].

Aplicaţia 2. Dacă $\alpha = \dfrac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)}$, atunci obţinem **Teorema lui T. Boggio**, [1].

Aplicaţia 3. Dacă $f(x) = x$ şi $\alpha = \dfrac{bg(a)-ag(b)}{g(a)-g(b)}$, obţinem **Teorema lui M. Ivan**, [2].

Aplicaţia 4. Dacă $g(a) = f(a)$ şi $g(b) = f(b)$, egalitatea (6) devine

$$\left(\alpha\frac{f(a)-f(b)}{a-b} + \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\right)\left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - 1\right) = \frac{g(c)}{g'(c)}f'(c) - f(c). \tag{8}$$

Aplicaţia 5. Dacă $\alpha = 0$, $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in]a,b[$ şi $0 \notin]a,b[$, atunci obţinem

$$\frac{\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b} - f(c)}{f'(c)} = \frac{\dfrac{ag(b)-bg(a)}{a-b} - g(c)}{g'(c)}. \tag{9}$$

REFERENCES

[1] Boggio, T., *Sur une proposition de D. Pompeiu*, Mathematica **23**, 1947-1948, 101-102

[2] Ivan, M., *One some mean value theorems*, Atheneum, Cluj, 1970, 23-25

[3] Ivan, M., *A note on a Pompeiu-type theorem*, Mathematical Analysis and Approximation Theory, The 5^{th} Romanian-German Seminar on Approximation Theory, Sibiu, 2002, 129-134

[4] Pompeiu, D., *Sur une proposition analogue au theorème des accroissements finites*, Mathematica **22**, 1946, 143-146

[5] Pop, O. T., *About some mean-value theorems*, Creative Math. & Inf. **14** (2005), 49-52

[6] Pop, Maria S., *Asupra unor extinderi ale teoremei de medie a lui Cauchy*, Gazeta Matematică, Seria pentru informare ştiinţifică şi perfecţionarea metodică, **XIX**(XCIII), nr. 2, 1996, 106-112

[7] Rotaru, F., *Asupra unor teoreme de medie*, Gazeta Matematică **8** (1983), 316-318

[8] Stamate, I., *Asupra unei proprietăţi a lui Pompeiu*, Lucrări Ştiinţifice, Institutul Politehnic Cluj, **1**, 1956, 12-15

[9] Topan, Gh., *O extindere a teoremei de medie a lui Cauchy*, Gazeta Matematică 2-3, 1962

National College "Mihai Eminescu"
5 Mihai Eminescu Street
440014 Satu Mare, Romania
e-mail: `ovidiutiberiu@yahoo.com`

North University of Baia Mare
Department of Mathematics and Computer Science
Victoriei 76, 430122 Baia Mare, Romania
e-mail: `barbosudan@yahoo.com`

Received: September 15, 2010