DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 31(2013), N° 1, pp. 25–27

CRITERII DE DIVIZIBILITATE CU 9

Horaţiu Boncea

Abstract. In this paper we propose to give some results which get thoroughly into the criterion of divisibility with 9. We have started from the idea that being given a natural number from which we subtract the amount of the composite figures, we get a number divisibile with 9.

MSC 2000. 13A05, 16U30, 00A05.

Key words. Criterion of divisibility.

În acest articol ne propunem să dăm câteva rezultate care aprofundează criteriul de divizibilitate cu 9. Am pornit de la ideea că fiind dat un număr natural din care scădem suma cifrelor care-l formează, vom obţine un număr divizibil cu 9. Acest rezultat l-am scris sub forma următoarei teoreme:

Teorema 1. *Dacă $\overline{a_k \ldots a_0}$ este un număr natural atunci avem*

$$\left(\overline{a_k \ldots a_0} - \sum_{i=0}^{k} a_i\right) \vdots 9.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} A = \left(\overline{a_k \ldots a_0} - \sum_{i=0}^{k} a_i\right) &= (a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_k \cdot 10^k - a_0 - a_1 - \ldots - a_k) \\ &= [a_1 \cdot 9 + a_2(10^2 - 1) + \ldots + a_k(10^k - 1)] \\ &= [a_1 \cdot 9 + a_2(10-1)(10+1) + \ldots + a_k(10-1)(10^{k-1} + \ldots + 1)] \\ &= [a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 9 \cdot 11 + \ldots + a_k \cdot 9(10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 1)] \\ &= [9(a_1 + a_2 \cdot 11 + \ldots + a_k(10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 1))], \end{aligned}$$

şi deci A este divizibil cu 9.

Teorema 2. *Fie n un număr natural. Atunci*

$$\left(\overline{a_k \ldots a_0} - \sum_{i=0}^{k} a_i\right)^n \vdots 9^n.$$

Demonstraţie. Avem

$$\left(\overline{a_k\ldots a_0}-\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n=(a_0+a_1\cdot 10+\ldots+a_k\cdot 10^k-a_0-a_1-\ldots-a_k)^n$$
$$=[a_1\cdot 9+a_2(10^2-1)+\ldots+a_k(10^k-1)]^n$$
$$=[a_1\cdot 9+a_2(10-1)(10+1)+\ldots+a_k(10-1)(10^{k-1}+\ldots+1)]^n$$
$$=[a_1\cdot 9+a_2\cdot 9\cdot 11+\ldots+a_k\cdot 9(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1)]^n$$
$$=[9(a_1+a_2\cdot 11+\ldots+a_k(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1))]^n$$
$$=9^n(a_1+a_2\cdot 11+\ldots+a_k(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1)]^n,$$

şi deci teorema este demonstrată.

Consecinţa 3. *Fie n un număr natural. Atunci*

$$\left(\overline{a_k\ldots a_0}-\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n\,\vdots\,9.$$

Demonstraţie.

$$\left(\overline{a_k\ldots a_0}-\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n=(a_0+a_1\cdot 10+\ldots+a_k\cdot 10^k-a_0-a_1-\ldots-a_k)^n$$
$$=[a_1\cdot 9+a_2(10^2-1)+\ldots+a_k(10^k-1)]^n$$
$$=[a_1\cdot 9+a_2(10-1)(10+1)+\ldots+a_k(10-1)(10^{k-1}+\ldots+1)]^n$$
$$=[a_1\cdot 9+a_2\cdot 9\cdot 11+\ldots+a_k\cdot 9(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1)]^n$$
$$=[9(a_1+a_2\cdot 11+\ldots+a_k(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1))]^n$$
$$=9^n(a_1+a_2\cdot 11+\ldots+a_k(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1)]^n\,\vdots\,9.$$

Teorema 4. *Fie n un număr natural. Atunci:*

$$\left[\overline{a_k\ldots a_0}^n-\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n\right]\,\vdots\,9.$$

Demonstraţie. Fie

$$P=\left[\overline{a_k\ldots a_0}^n-\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n\right]$$

$$=\left(\overline{a_k\ldots a_0}-\sum_{i=0}^{k}a_i\right)\left[\overline{a_k\ldots a_0}^{n-1}+\overline{a_k\ldots a_0}^{n-2}\sum_{i=0}^{k}a_i+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^{n-1}\right].$$

În baza Teoremei 1, obţinem că P este divizibil cu 9 deoarece

$$\left[\overline{a_k\ldots a_0}^{n-1}+\overline{a_k\ldots a_0}^{n-2}\sum_{i=0}^{k}a_i+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^{n-1}\right]\in\mathbb{N}.$$

Observaţie. Dacă în rezultatele de mai sus alegem $n = 1$ atunci obţinem rezultatul din Teorema 1.

Teorema 5. *Dacă n este un număr natural, iar m un număr întreg, atunci*

$$m\left[\overline{a_k\ldots a_0}-\sum_{i=0}^{k}a_i\right]^n \vdots 9.$$

Demonstraţie. Aplicând Consecinţa 3, avem că

$$\left[\overline{a_k\ldots a_0}-\sum_{i=0}^{k}a_i\right]^n \vdots 9.$$

Atunci înmulţind numărul de mai sus cu numărul întreg m obţinem tot un multiplu al lui 9.

Teorema 6. *Dacă n este un număr natural, iar m un număr întreg, atunci*

$$m\left[\overline{a_k\ldots a_0}-\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n\right] \vdots 9.$$

Demonstraţie. Aplicând Teorema 4, avem că

$$\left[\overline{a_k\ldots a_0}^n-\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\right)^n\right] \vdots 9.$$

Atunci înmulţind numărul de mai sus cu numărul întreg m obţinem tot un multiplu al lui 9.

Observaţie. Toate teoremele şi consecinţele prezentate mai sus pot fi aplicate şi în cazul divizibilităţii cu 3.

BIBLIOGRAFIE

[1] L. Panaitopol, A. Gica, *O introducere în Aritmetică şi Teoria Numerelor*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2002.

[2] L. Panaitopol, A. Gica, *Aritmetică şi Teoria Numerelor. Probleme*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.

[3] A. I. Vinogradov, Yu. V. Nesterenko, *Proceedings on number theory*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **322**, 2005.

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `horatiu.boncea@ubbcluj.ro`

Primit la redacţie: 1 Octombrie 2010