1. Probleme

P 0.1 Să se arate că funcţia $f:[0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in[0,+\infty[$, este continuă în punctul $x=1$.

Rezolvare. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de puncte din $[0,+\infty[$ convergent către 1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ avem

$$0\leq |f(x_n)-f(1)|=|\sqrt{x_n}-1|=\frac{|x_n-1|}{\sqrt{x_n}+1}\leq |x_n-1|.$$

Deoarece şirul (x_n) converge către 1, în baza teoremei , deducem că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge către $f(1)$. Rezultă că pentru orice şir (x_n) convergent către $x_0=1$, şirul $(f(x_n))$ converge către $f(1)$. Aşadar funcţia f este continuă în punctul $x=1$. ■

P 0.2 Să se arate că următoarele funcţii sunt continue în punctele x_0 indicate:

a) $f:[0,+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in[0,+\infty[$; $x_0=4$,

b) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$; $x_0=1$,

P 0.3 Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dacă } x \text{ este raţional}\\ -x & \text{dacă } x \text{ este iraţional,}\end{cases}$$

este continuă în punctul $x=0$.

P 0.4 Să se arate că următoarele funcţii $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, nu sunt continue în punctul $x=0$:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos(1/x), & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0;\end{cases}$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0;\end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{dacă } x \text{ este raţional}\\ x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional.}\end{cases}$$

P 0.5 Folosind criteriul cu ε şi δ să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^2+2x-3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ este continuă în punctul $x=2$.

Rezolvare. *Metoda* 1. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, avem

$$|f(x) - f(2)| = |x-2|\,|x+4|\,.$$

Fie $\delta > 0$ şi x astfel încât $|x-2| < \delta$; atunci $|x| \le |x-2| + 2 < \delta + 2$ şi deci $|x+4| \le |x| + 4 < \delta + 6$, prin urmare $|f(x) - f(2)| < \delta(\delta + 6)\,.$

Pe de altă parte, dacă $\varepsilon > 0$, atunci inegalitatea $t(t+6) < \varepsilon$ este verificată de orice $t \in]-3-\sqrt{9+\varepsilon}, -3+\sqrt{9+\varepsilon}[$. De aici deducem că pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta = -3 + \sqrt{9+\varepsilon} > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-2| < \delta$ să avem $|f(x) - f(2)| = |x-2|\,.\,|x+4| < \delta(\delta+6) < \varepsilon$.

In baza teoremei **??** (criteriul cu ε şi δ) funcţia f este continuă în punctul $x = 2$.

Metoda 2. Observăm că pentru fiecare $x \in]1,3[$; echivalent cu $|x-2| < 1$, avem $|x+4| \le |x| + 4 < 7$ şi atunci

$$|f(x) - f(2)| = |x-2|\,|x+4| \le 7\,|x-2|\,.$$

De aici deducem că oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, alegând $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ obţinem că $\delta > 0$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-2| < \delta$, avem

$$|f(x) - f(2)| \le 7\,|x-2| < 7\delta \le \varepsilon.$$

In baza teoremei **??** (criteriul cu ε şi δ) funcţia f este continuă în punctul $x = 2$. ■

P 0.6 Folosind criteriul cu ε şi δ să se arate că următoarele funcţii sunt continue în punctele x_0 indicate în dreptul fiecăreia:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 + 2x - 3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 2$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 - 3x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$;

c) $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 1/x^2$, oricare ar fi $x \in]0,2[$; $x_0 = 1$;

d) $f :]0,5[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (x-1)/(x+3)\,,$ oricare ar fi $x \in]0,5[$; $x_0 = 2$

P 0.7 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 2^x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional,} \end{cases}$$

este continuă în punctul $x = 0$.

P 0.8 Să se arate că funcţia $f : [-1,2] \cup \{3\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [1,2] \\ -5, & \text{dacă } x = 3, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x_0 = 3$.

Rezolvare. Numărul $x_0 = 3$ este punct izolat al mulţimii $D = [1,2] \cup \{3\}$; atunci, în baza teoremei **??**, funcţia f este continuă în punctul $x_0 = 3$. ■

P 0.9 Să se arate că funcţia $f :]-\infty, 0[\cup \{1\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in]-\infty, 0[\\ 7, & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x_0 = 1$

P 0.10 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-1} \tan 7\,(x-1)\,, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 7, & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x_0 = 1$.

Rezolvare. Folosim teorema **??**. Numărul $x_0 = 1 \in D = \mathbb{R}$, este punct de acumulare al mulţimii D. Întrucât

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\tan 7(x-1)}{x-1} = 7 = f(1),$$

deducem ca funcţia f este continuă în punctul $x_0 = 1$. ■

P 0.11 Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctul x_0, dacă:

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} \arctan\left(|x-1|^{-1}\right), & \text{dacă } x \neq 1 \\ \pi/2, & \text{dacă } x = 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1;$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} (\sin x^2)\,/\,|x|\,, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} (\ln|x-1|)\,/\,|x-1|\,, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1;$$

$$d)\quad f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(|\,x\,|\,/\,(1+|\,x\,|)\right), & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0;$$

$$e)\quad f(x)=\begin{cases}\ln\left(\left(\mid x\mid+1\right)\mid x-1\mid^{-1}\right),\,, & \text{dacă } x\neq 1\\ 1, & \text{dacă } x=1,\end{cases}\qquad x_0=1.$$

P 0.12 Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}\sin(x-1)\right)/\left(x^2-1\right), & \text{dacă } x>1\\ 0, & \text{dacă } x=1\\ x^2+5x-6, & \text{dacă } x<1,\end{cases}$$

este continuă în punctul $x=1$.

Rezolvare. Utilizam teorema **??**. Evident, $x_0=1$ este punct de acumulare atât al mulţimii $]-\infty,1[$, cât şi al mulţimii $]1,+\infty[$. Întrucât

$$\begin{aligned}&f(x_0-0)=\lim_{x\nearrow 1}(x^2+5x-6)=0,\\&f(x_0+0)=\lim_{x\searrow 1}\left(\sqrt{x-1}\sin(x-1)\right)/\left(x^2-1\right)=0,\\&f(x_0)=0,\end{aligned}$$

deducem că funcţia f este continuă în punctul $x_0=1$. ■

P 0.13 Să se determine valoarea constantei $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}3\left(x+2\right)^{-1}\sin\left(a\left(x+2\right)\right), & \text{dacă } x>-2\\ ax+3+\sqrt[3]{x^2-2x}, & \text{dacă } x\leq -2,\end{cases}$$

să fie continuă în punctul $x_0=-2$.

Rezolvare. Evident $x_0=-2$ este punct de acumulare atât al mulţimii $]-\infty,-2[$, cât şi al mulţimii $]-2,+\infty[$. Întrucât

$$\begin{aligned}f(-2-0)&=\lim_{x\nearrow -2}(ax+3+\sqrt[3]{x^2-2x})=-2a+5,\\ f(-2+0)&=\lim_{x\searrow -2}\frac{3\sin a(x+2)}{x+2}=3a,\\ f(-2)&=-2a+5,\end{aligned}$$

deducem că funcţia f este continuă în punctul $x_0=-2$ dacă şi numai dacă $-2a+5=3a$, adică dacă şi numai dacă $a=1$. ■

P 0.14 Să se arate că funcţia $f:]-\infty,\pi/2[\to\mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x)=\begin{cases}\exp(\sin x), & \text{dacă } x\in]-\infty,0[\\ 1, & \text{dacă } x=0\\ x^2+1+\tan x, & \text{dacă } x\in]0,\pi/2[,\end{cases}$$

este continuă pe $]-\infty,\pi/2[$.

Rezolvare. Fie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcţia definită prin $\varphi(x)=\exp x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi fie $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcţia definită prin $\psi(x)=\sin x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Funcţiile φ şi ψ, fiind elementare, sunt continue. Deoarece $f(x)=(\varphi\circ\psi)(x)$, oricare ar fi $x\in]-\infty,0[$, în baza teoremei **??**, deducem că funcţia f este continuă pe $]-\infty,0[$.

Fie acum $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcţia definită prin $g(x)=x^2+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi fie $h:]0,\pi/2[\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin $h(x)=\tan x$, oricare ar fi $x\in]0,\pi/2[$. Funcţiile g şi h, fiind elementare, sunt continue. Deoarece $f(x)=(g+h)(x)$, oricare ar fi $x\in]0,\pi/2[$, în baza teoremei 4.7, deducem că funcţia f este continuă pe $]0,\pi/2[$.

În punctul $x=0$, avem $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ şi deci funcţia f este continuă în punctul $x=0$. Aşadar funcţia f este continuă în orice punct $x\in]-\infty,\pi/2[$; prin urmare, funcţia f este continuă pe $]-\infty,\pi/2[$. ∎

P 0.15 Să se arate că următoarele funcţii sunt continue pe mulţimea lor de definiţie:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=|\sin x|$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=|\cos x-\sin x|$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\exp(x^{-1}), & \text{dacă } x\in]0,+\infty[\\ 0, & \text{dacă } x=0\\ x^2+2x+\sin x, & \text{dacă } x\in]-\infty,0[;\end{cases}$$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0;\end{cases}$$

e) $f:[-1,2]\cup\{4\}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{dacă } x\in[-1,2]\\ 0, & \text{dacă } x=4.\end{cases}$$

P 0.16 Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii pe mulţimea de definiţie:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \lfloor x \rfloor$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x \lfloor 1/x \rfloor, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 1 - x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional;} \end{cases}$$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ \cos x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional;} \end{cases}$$

f) $f : [-2, 1] \cup \{3\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{dacă } x \in [-2, 0] \\ 1 + \sin x, & \text{dacă } x \in]0, 1] \\ 2, & \text{dacă } x = 3; \end{cases}$$

g) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (1 + x)^{1/x}, & \text{dacă } x \in]0, +\infty[\\ \mathrm{e}, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

P 0.17 Determinaţi punctele de discontinuitate ale funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor},\ g(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor},\ \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

P 0.18 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ \lfloor x \rfloor, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimile

$$L = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : f \text{ are limită în punctul } x\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ este continuă în punctul } x\}.$$

P 0.19 Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii pe mulţimea de definiţie:

a) $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2}, & \text{dacă } x \in [1,2] \\ 3a + 2x, & \text{dacă } x \in]2,3]; \end{cases}$$

b) $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + \cos x, & \text{dacă } x \in]-\pi/2, \pi/4] \\ \tan x + 2a \cot x, & \text{dacă } x \in]\pi/4, \pi/2[; \end{cases}$$

c) $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \exp(3x), & \text{dacă } x \in]0,1] \\ a(\sin(x-1)) / (x^2 - 5x + 4), & \text{dacă } x \in]1, \pi[; \end{cases}$$

d) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 \sin(1/x)) / \sin x^2, & \text{dacă } x \in]0,1] \\ a, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x) / |x|, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (x^n - a^n) / (x - a), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ b, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

P 0.20 Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(1/x) - \arccos(1/x), & \text{dacă } |x| \geq 1 \\ ax + b, & \text{dacă } |x| < 1, \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

P 0.21 Determinaţi parametrii reali a_n şi b_n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) astfel încât funcţiile următoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie continue pe $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} a_n + x/n, & \text{dacă } x \in]-\infty, -1/(2n)] \\ (1 + nx)/2, & \text{dacă } x \in]-1/(2n), 1/(2n)] \\ b_n + x/n, & \text{dacă } x \in]1/(2n), +\infty[; \end{cases}$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x\in]-\infty,-n] \\ a_n+b_nx, & \text{dacă } x\in]-n,n] \\ 1 & \text{dacă } x\in]1/(2n),+\infty[; \end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases} a_nx^3+b_nx, & \text{dacă } x\in]-\infty,n[\\ a_nx^2+b_n, & \text{dacă } x\in[n,n+1[\\ a_nx+1, & \text{dacă } x\in[n+1,+\infty[. \end{cases}$$

P 0.22 Să se determine mulţimea punctelor $x\in\mathbb{R}$ în care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 1/x^2, & \text{dacă } x \text{ este iraţional,} \end{cases}$$

este continuă.

P 0.23 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $x=a\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că există o funcţie $\delta:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, depinzând de f şi a, cu proprietatea că pentru fiecare $\varepsilon>0$ avem $|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$ de îndată ce $|h|<\delta(\varepsilon)$.

b) Este funcţia δ, de la punctul *a*), unic determinată de f şi a.

c) Există funcţii f şi puncte a pentru care funcţia δ, de la punctul *a*), este constantă?

d) Există funcţii f şi puncte a pentru care funcţia δ, de la punctul *a*), este funcţia identică a lui $]0,+\infty[$?

P 0.24 Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcţii şi $x_0\in\mathbb{R}$.

a) Dacă $g(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi funcţiile $f+g$, fg, f/g sunt continue în punctul x_0, atunci funcţiile f şi g sunt continue în x_0? Analizaţi exemplul:

$$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{dacă } x<0 \\ 1, & \text{dacă } x\geq 0, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x<0 \\ -1, & \text{dacă } x\geq 0. \end{cases}$$

b) Dacă funcţiile f şi $g\circ f$ sunt continue în x_0, atunci funcţia g este continuă în x_0? Analizaţi exemplul

$$f(x)=0,\ \text{oricare ar fi } x\in\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1, & \text{dacă } x=0. \end{cases}$$

P 0.25 Să se studieze continuitatea funcţiilor compuse $g\circ f$ şi $f\circ g$, unde $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt definite prin

$$f(x)=\operatorname{sgn}x,\ g(x)=x^2-4x+4,\ \text{oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

P 0.26 Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$. Să se arate că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă funcţiile $f^+, f_- : D \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f_-(x) = \min\{0, f(x)\}, \text{ oricare ar fi } x \in D,$$

sunt continue în punctul x_0. (Funcţia f^+ se numeşte *partea pozitivă* a funcţiei f, iar funcţia f_- se numeşte *partea negativă* a funcţiei f).

P 0.27 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x) = \lfloor x \rfloor f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia g este continuă în punctul $x_0 = n$ dacă şi numai dacă $f(n) = 0$.

P 0.28 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 < a < b$ şi $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Arătaţi că funcţia f este continuă.

b) Arătaţi că există o funcţie continuă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = f(x)$, oricarear fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Calculaţi $F(0)$, $F(1/2)$, $F(1)$.

d) Există $\lim_{x\to\infty} F(x)$ şi $\lim_{x\to-\infty} F(x)$?

P 0.29 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 < a < b$ şi $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \left(\frac{b^x - a^x}{x(b-a)}\right)^{1/(x-1)}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

a) Arătaţi că funcţia f este continuă.

b) Arătaţi că existstă o funcţie continuă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = f(x)$, oricarear fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

c) Calculaţi $F(-1)$, $F(0)$, $F(1/2)$, $F(1)$, $F(2)$.

d) Există $\lim_{x\to\infty} F(x)$ şi $\lim_{x\to-\infty} F(x)$?