Dr. Christian Săcărea

"Babeş–Bolyai" Universität, Cluj-Napoca
Fachbereich Mathematik und Informatik

Sommersemester 2018

Lösungshinweise zur 2. Übung

Algorithmische Graphentheorie für Informatiker

GRUPPENÜBUNGEN:

(G 5)(Komplementgraph)

Man zeichne das Komplement der beiden Graphen aus Abbildung 1.

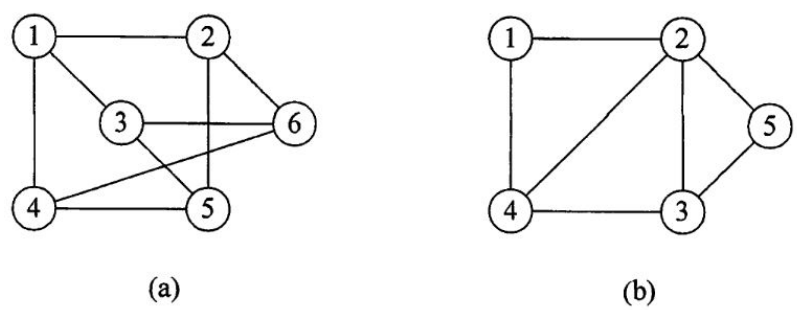

Abbildung 1:

Lösung:

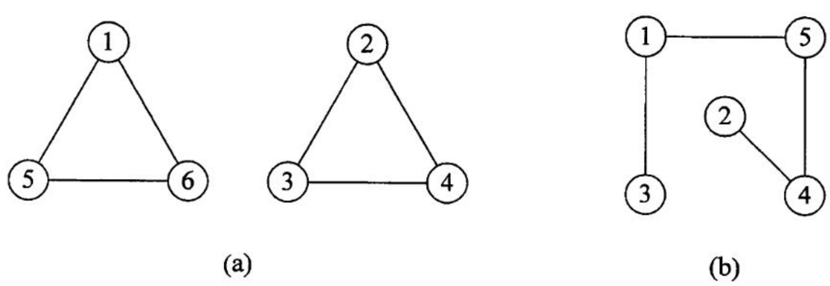

Abbildung 2:

(G 6)Nicht isomorphe Graphen

a) Sei $N(n,k)$ die Anzahl aller nichtisomorpher schlichten Graphen mit n Knoten und k Kanten. Bestimme $N(4,3)$.

b) Bestimme alle nichtisomorphe Graphen mit 4 Knoten.

c) Ein schlichter Graph isomorph zu seinem Komplement heißt Selbstkomplementär. Man bestimme einen selbstkomplementären Graphen mit 4 Knoten.

d) Finde zwei selbstkomplementäre Graphen mit 5 Knoten.

e) Finde zwei nichtisomorphe Graphen mit 6 Knoten und Grade 1, 1, 2, 2, 3 und 3. Bestimme die Anzahl der Kanten dieser beiden Graphen mit das Handschlaglemma.

Lösung:

a)

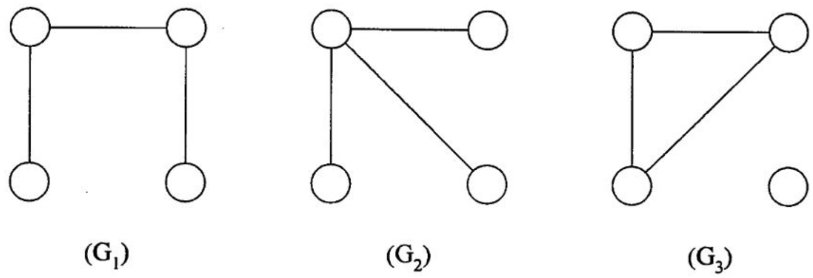

Abbildung 3:

b)

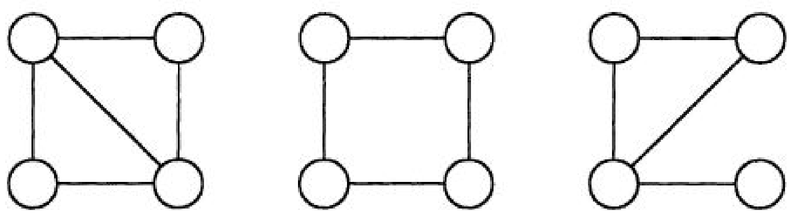

Abbildung 4:

Nach dem Handschlaglemma ist die maximale Anzahl der Kanten eines schlichten Graphen mit 4 Knoten gleich 6. Der vollständige Graph K_4 ist der einzige Graph mit 4 Knoten und 6 Kanten. Es gibt einen nichtisomorphen Graphen mit 4 Knoten und 5 Kanten und zwei mit 4 Knoten und 4 Kanten (s. Abbildung 4). Es folgt, dass $N(4,6) = 1, N(4,5) = 1, N(4,4) = 2$. Wir haben soeben bewiesen, dass $N(4,3) = 3$. Es ist einfach zu sehen, dass $N(4,2) = 2, N(4,1) = N(4,0) = 1$. Hiervon folgt, dass die Anzahl aller nichtisomorphen Graphen mit 4 Knoten gleich 11 ist.

c) Die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen mit 4 Knoten ist 6. Ein selbstkomplementärer Graph mit 4 Knoten muss 3 Kanten haben. Unter den einzigen nichtisomorphen Graphen aus Abbildung 3 ($N(4,3)$) ist nur der erste selbstkomplementär.

d) S. Abbildung 5

e) Die Summe der Grade beträgt 12, also ist die Anzahl der Kanten gleich 6. Siehe Abbildung 6

(G 7)Permutationsmatrizen

a) Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische binäre Matrix, welche genau ein 1 auf jede Zeile und jede Spalte besitzt. Zwei Matrizen A und A' sind isomorph genau dann, wenn eine Permutationsmatrix P existiert, so dass $A'P = PA$. Beweise, dass zwei Graphen genau dann isomorph sind, wenn ihre Adjazenzmatrizen isomorph sind.

b) Bestimme die Adjazenzmatrizen der Graphen G und G' aus Abbildung 7, sowie eine Permutationsmatrix P.

Lösung:

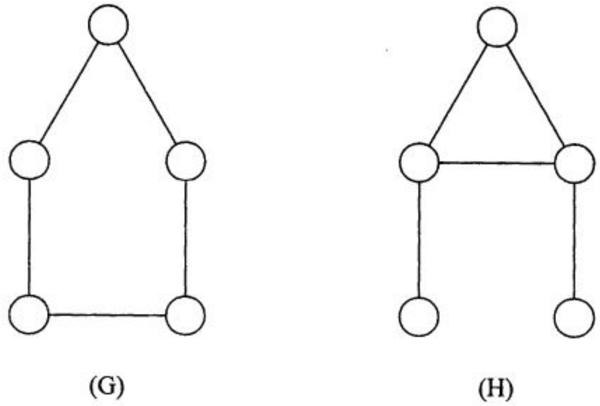

Abbildung 5:

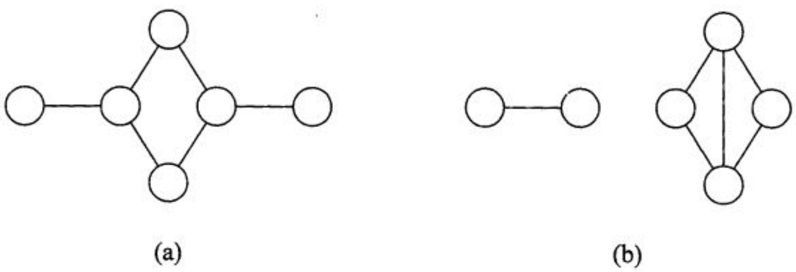

Abbildung 6:

a) Angenommen A und A' sind Adjazenzmatrizen zweier isomorpher Graphen. Eine dieser Matrizen erhält man aus der anderen durch Permutation von Zeilen und Spalten. Die Zeilen von A zu permutieren ist gleichbedeutend A mit einer Permutationsmatrix P von links zu multiplizieren. Die Spalten von PA zu permutieren ist gleichbedeutend mit der Rechtsmultiplikation von PA mit P^{-1}. Es folgt $P' = PAP^{-1}$. Andersrum, falls $PA = AP'$ impliziert, dass A' aus A durch Permutation von Zeilen und Spalten erzeugt wird, d.h., die zwei Graphen sind isomorph.

b) Die Adjazenzmatrizen sind

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Isomorphismus $f\colon G \to G'$ ist durch $f(1) = 5, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 4, f(5) = 3$ gegeben. Wir erhalten A' aus A indem wir die 5. Zeile von A mit der ersten ersetzen, dann die erste mit der dritten, dann die dritte mit der fünften. Angenommen die somit erhaltene Matrix ist mit B bezeichnet. Ersetze die 5. Spalte von B mit der ersten, die erste mit der dritten und die dritte mit der fünften. Wir erhalten somit A'. Um die Permutationsmatrix zu berechnen, wenden wir nun dieselben Operationen

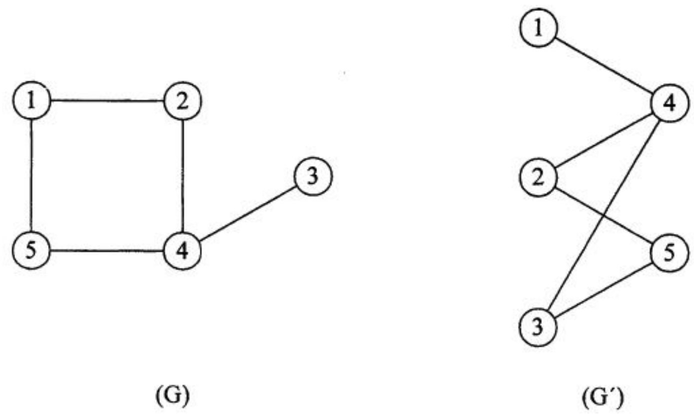

Abbildung 7:

auf die Einheitsmatrix I an und erhalten

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(G 8)Charakteristisches Polynom

a) Das charakteristische Polynom eines schlichten Graphen mit n Kanten ist die Determinante der Matrix $A - \lambda I$, wobei A die Adjazenzmatrix und I die Einheitsmatrix ist. Man beweise, dass zwei Graphen genau dann isomorph sind, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom besitzen.

b) Bestimme das charakteristische Polynom der Graphen aus Abbildung 3 und zeige, dass zwei nichtisomorphe Graphen dasselbe charakteristische Polynom besitzen können.

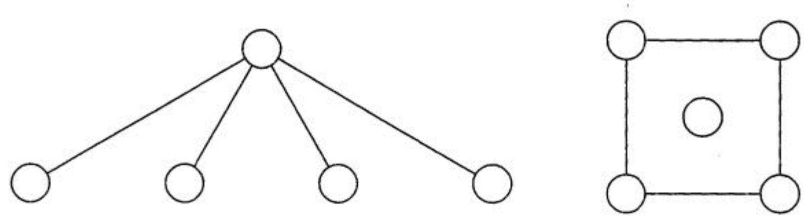

Abbildung 8:

Lösung:

a) Angenommen A und A' sind die Adjazenzmatrizen zweier isomorphen Graphen G und G'. Dann existiert eine Permutationsmatrix P mit $A' = PAP^{-1}$. Also $A' - \lambda I = P(A - \lambda I)P^{-1}$. Daraus folgt, dass $detA = detA'$ ist.

b) $4\lambda^3 - \lambda^5$.

(G 9)Binäre Codes

a) Sei G ein Graph mit n Knoten und $A = (a_{ij})$ seine Adjazenzmatrix. Das binäre Code von G bzgl. A ist gegeben durch

$$a_{12}2^0 + a_{13}2^1 + \cdots + a_{1n}2^{n-1} + a_{23}2^n + \cdots + a_{2n}2^{2n-3} + \cdots + a_{n-1,n}2^{k-1},$$

mit $k = n(n-1)/2$. Bestimmen das binäre Code der Adjazenzmatrix des Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

b) Man beweise, dass es möglich ist einen schlichten Graphen eindeutig zu bestimmen, falls sein binärer Code und die Knotenanzahl bekannt sind.

Lösung:

a) 53.

b) Das binäre Code kann eindeutig als eine Summe von Faktoren der Form $a_i 2^i$ beschrieben werden, wobei die Koeffizienten a_i entweder 0 oder 1 sind. Diese Information gibt uns alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonale der Adjazenzmatrix, falls wir die Anzahl der Knoten des Graphen kennen.