LISTA 8

1) Fie K un corp, K' un subcorp al lui K şi V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că, folosind operaţiile din corpul K şi faptul că K' este subcorp în K, grupul $(K, +)$ poate fi organizat ca un spaţiu vectorial peste K' şi că dacă $\dim_{K'} K = m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) atunci $\dim_{K'} V = mn$.

2) Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim. Să se arate că operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire înzestrează pe

$$V = \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

cu o structură de $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi să se determine o bază şi dimensiunea acestui spaţiu vectorial.

3) Fie K un corp comutativ, $V = M_2(K)$. Să se arate că

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\} \text{ şi } V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$$

sunt subspaţii ale lui V şi să se găsească dimensiunile lui V_1, V_2, $V_1 + V_2$ şi $V_1 \cap V_2$.

4) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune 3 şi V_1, V_2 două subspaţii diferite de dimensiune 2. Să se arate că $V_1 \cap V_2$ are dimensiunea 1. Care este semnificaţia geometrică în cazul $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$?

5) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ şi V_1, V_2 subspaţii ale lui V. Să se arate că dacă $\dim V_1 = n - 1$ şi $V_2 \nsubseteq V_1$ atunci

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_2 - 1 \text{ şi } V_1 + V_2 = V.$$

6) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi V_1, V_2 subspaţii ale lui V care verifică egalitatea

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

Să se arate că $V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

7) Fie f şi g endomorfisme ale unui K-spaţiu vectorial V de dimensiune finită. Dacă $f + g$ este un automorfism al lui V şi $f \circ g$ este endomorfismul nul atunci

$$\dim V = \dim f(V) + \dim g(V).$$

8) a) Fie V_1, V_2 două K-spaţii vectoriale de dimensiune finită cu $\dim V_1 = \dim V_2$ şi $f : V_1 \to V_2$ o transformare liniară. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) f este injectivă;

ii) f este surjectivă;

iii) f este izomorfism.

b) Să se arate că, în cazul spaţiilor vectoriale de dimensiune infinită, condiţiile din problema anterioară nu sunt echivalente.

9) a) Să se determine numărul bazelor ordonate ale următoarelor spaţii vectoriale: ${}_{Z_2}(Z_2)^2$; ${}_{Z_2}(Z_2)^3$; ${}_{Z_3}(Z_3)^2$; ${}_{Z_3}(Z_3)^3$.

b) Fie K un corp finit cu q elemente şi V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

i) numărul bazelor ordonate ale lui V;

ii) ordinul grupului $GL_n(K)$.

10) Fie K un corp finit cu q elemente, V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ şi $G_n^k(q)$ numărul subspaţiilor lui V care au dimensiunea k. Numerele $G_n^k(q)$ se numesc *numerele lui Gauss* asociate lui V. Să se arate că:

i) $G_n^0(q) = 1 = G_n^n(q)$;

ii) $G_n^k(q) = \dfrac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1)\cdots(q - 1)}$, pentru $k \in \{1, \ldots, n-1\}$;

iii) $G_n^k(q) = G_n^{n-k}(q)$, pentru $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$;

iv) $G_n^k(q) = q^k G_{n-1}^k(q) + G_{n-1}^{k-1}(q)$, pentru $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.