Seminarul 9

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\displaystyle\int_1^6 \int_2^3 \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos^2 y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

d) **(Temă)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{y\sin y}{(1+\cos x)(1+\cos y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \min\{x,y\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

f) $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $a>1$.

2. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{(x+y+z)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

b) **(Temă)** $\displaystyle\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde $a,b,c>0$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \min\{x,y,z\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă A este mulțimea plană mărginită de parabola $y=x^2$ și de dreapta $y=2x+3$.

4. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă A este mulțimea plană mărginită de dreptele $x=\sqrt{3}$, $y=x$ și de hiperbola de ecuație $xy=1$.

5. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă A este mulțimea definită prin $A := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq y\geq 0, x^2+y^2\leq 2\}$.

6. **(Temă)** Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă A este mulțimea definită prin $A := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; y \geq |x|, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

7. Fie $a, b > 0$ și fie $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ -b \leq y \leq b \right\}$. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x^2}{y^2+b^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8. **(Temă)** Fiind date numerele reale $a, b > 0$, să se calculeze

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Concursul William Lowell Putnam 1989, problema A2

9. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dacă A este mulțimea din spațiu cuprinsă între planele de ecuații $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ și $x + y + z = 1$.

10. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dacă

$$A := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \,\}.$$

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$\begin{aligned}
\int_1^6 \int_2^3 \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=1}^{x=6} \left(\int_{y=2}^{y=3} \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=1}^{x=6} \left(-\frac{1}{x+y}\bigg|_{y=2}^{y=3} \right) \mathrm{d}x = \int_1^6 \left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \ln \frac{x+2}{x+3}\bigg|_1^6 = \ln \frac{32}{27}\,.
\end{aligned}$$

b) Aplicând teorema lui Fubini, avem (atenție la alegerea ordinii de integrare: una dintre integralele iterate se calculează ușor, cealaltă greu)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=1} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} (1+x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{-1/2} \bigg|_{x=0}^{x=1} \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \bigg|_{x=0}^{x=1} \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \right) \mathrm{d}y \\
&= \ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{y^2+2}} \bigg|_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

c) Notăm $I := \displaystyle\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos^2 y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=0}^{y=\pi/2} \frac{x \sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos^2 y)}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \underbrace{\int_{y=0}^{y=\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{1+\cos^2 y}}_{I_2} \right) \mathrm{d}x \\
&= I_2 \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}x}_{I_1} = I_1 I_2.
\end{aligned}
$$

Pentru calculul integralei $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$, facem schimbarea de variabilă $x = \pi - t$. Obținem

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\, \mathrm{d}t \\
&= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}\, \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

de unde

$$
2I_1 = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2},
$$

deci $I_1 = \pi^2/4$.

Pentru calculul integralei $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{1+\cos^2 y}$, facem schimabarea de variabilă $\operatorname{tg} y = t$. Obținem

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{\mathrm{d}y}{1+\cos^2 y} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

În final, avem $I = I_1 I_2 = \dfrac{\pi^3}{8\sqrt{2}}$.

Observație. In rezolvare s-a folosit următorul rezultat: dacă funcțiile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann, atunci are loc egalitatea

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Acest rezultat este o consecință imediată a teoremei lui Fubini și el va fi folosit și în rezolvarea altor probleme.

d) Răspuns: $\dfrac{\pi}{2} - 1$.

e) Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \min\{x, y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1} \Big(\underbrace{\int_{x=0}^{x=1} \min\{x, y\}\mathrm{d}x}_{G(y)}\Big)\mathrm{d}y = \int_0^1 G(y)\,\mathrm{d}y.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{x=0}^{x=y} \min\{x, y\}\mathrm{d}x + \int_{x=y}^{x=1} \min\{x, y\}\mathrm{d}x = \int_0^y x\mathrm{d}x + \int_y^1 y\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=y} + xy\Big|_{x=y}^{x=1} = \frac{y^2}{2} + y - y^2 = y - \frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

deci $I = \displaystyle\int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$.

f) Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$\begin{aligned} I &:= \int_{1/a}^a \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=1/a}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=1/a}^{x=a} \frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\Big|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_{1/a}^a \frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă $x = 1/t$, obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{1/a} t\,\mathrm{arctg}\,t\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/a}^a \frac{1}{t}\,\mathrm{arctg}\,t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{1/a}^a \frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{1/a}^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - I, \end{aligned}$$

de unde $I = \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_{1/a}^{a} \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}\,\ln a$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ a) Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$\begin{aligned}
\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{(x+y+z)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_1^2\left(\int_1^2\left(\int_1^2 (x+y+z)^{-3}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2\left(\int_1^2\left(\left.\frac{(x+y+z)^{-2}}{-2}\right|_{z=1}^{z=2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\left(\int_1^2\left(-\frac{1}{(x+y+2)^2}+\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\left.\left(\frac{1}{x+y+2}-\frac{1}{x+y+1}\right)\right|_{y=1}^{y=2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\ln\left.\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}\right|_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\,\ln\frac{128}{125}\,.
\end{aligned}$$

b) Răspuns: $\dfrac{abc(a+b+c)}{2}$.

c) Fie $I := \displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \min\{x,y,z\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$I = \int_0^1\int_0^1 F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $F_1 : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ este funcția definită prin

$$\begin{aligned}
F_1(x,y) &= \int_0^1 \min\{x,y,z\}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\min\{x,y\}} \min\{x,y,z\}\,\mathrm{d}z + \int_{\min\{x,y\}}^1 \min\{x,y,z\}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\min\{x,y\}} z\,\mathrm{d}z + \int_{\min\{x,y\}}^1 \min\{x,y\}\,\mathrm{d}z \\
&= \min\{x,y\} - \frac{\min\{x,y\}^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aplicând încă o dată teorema lui Fubini, obținem

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\min\{x, y\} - \frac{\min\{x, y\}^2}{2} \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Dar

$$\int_0^1 \left(\min\{x, y\} - \frac{\min\{x, y\}^2}{2} \right) \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^x \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}y + \int_x^1 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}y = x - x^2 + \frac{x^3}{3},$$

deci

$$I = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Parabola $y = x^2$ și dreapta $y = 2x + 3$ se intersectează în punctele $M(-1, 1)$ și $N(3, 9)$ (a se vedea figura 1).

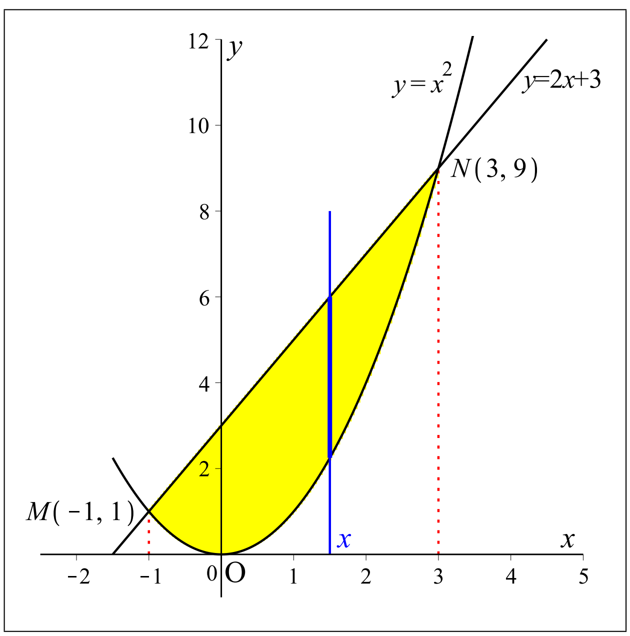

Figura 1:

Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=-1}^{x=3}\left(\int_{y=x^2}^{y=2x+3}\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{x=-1}^{x=3}\ln(y+1)\Big|_{y=x^2}^{y=2x+3}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{3}\big(\ln(2x+4)-\ln(x^2+1)\big)\mathrm{d}x\\ &= 4+2\ln 5-\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}3.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Hiperbola $xy=1$ și dreapta $y=x$ se intersectează în primul cadran în punctul de coordonate $(1,1)$ (a se vedea figura 2).

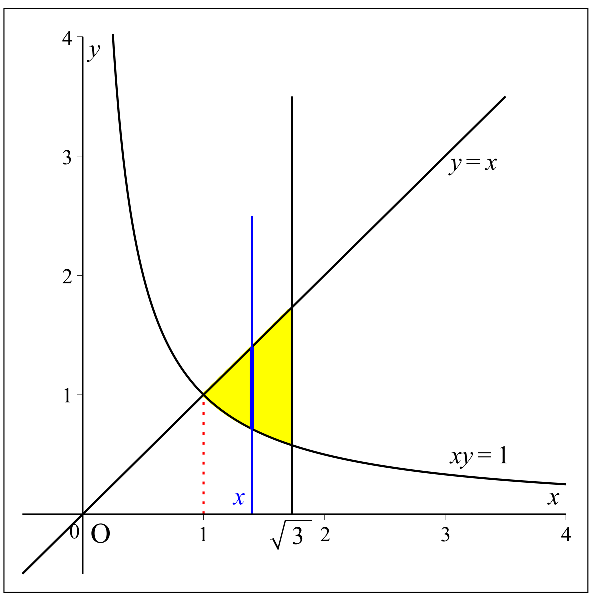

Figura 2:

Trecând la integrale iterate, avem

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=1}^{x=\sqrt{3}}\left(\int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}\frac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}y\Big|_{y=1/x}^{y=x}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} x\left(\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ținând seama că $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, obținem

$$\iint_A \frac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} x\left(2\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Trecând la integrale iterate, avem (a se vedea figura 3):

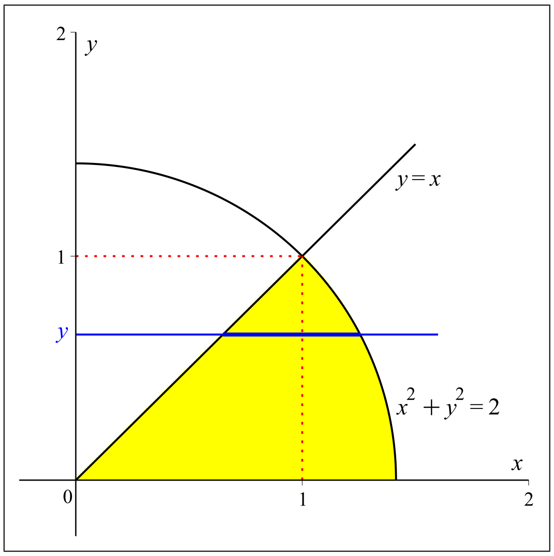

Figura 3:

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=y}^{x=\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{y^2+1}\cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=y}^{x=\sqrt{2-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1-y^2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Răspuns: $\pi - 2$.

$\boxed{\mathbf{7.}}$ Trecând la integrale iterate, avem (a se vedea figura 4):

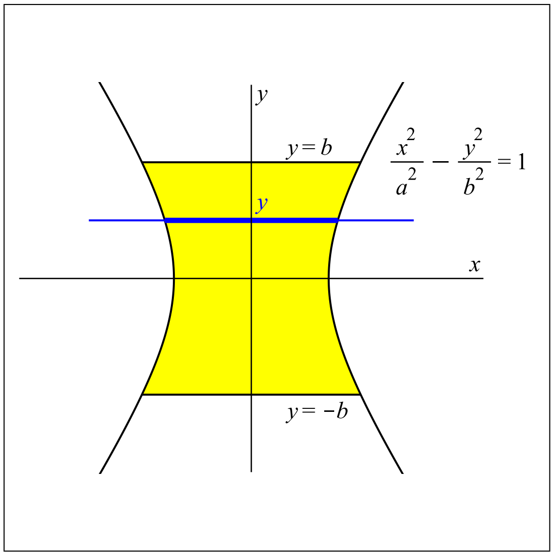

Figura 4:

$$\iint_A \frac{x^2}{y^2+b^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=-b}^{y=b}\left(\int_{x=-\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}}^{x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}} \frac{x^2}{y^2+b^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{y=-b}^{y=b} \frac{1}{y^2+b^2}\cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}}^{x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-b}^{b} \frac{1}{y^2+b^2}\cdot\frac{2a^3(y^2+b^2)^{3/2}}{3b^3}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2a^3}{3b^3}\int_{-b}^{b}\sqrt{y^2+b^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2a^3}{3b}\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Fie I valoarea integralei din enunț. Avem $[0,a]\times[0,b] = A_1 \cup A_2$, unde

$$A_1 = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{a}\,x \right\},$$
$$A_2 = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le b,\ 0 \le x \le \frac{a}{b}\,y \right\}.$$

Ținând seama de aceasta, deducem că

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_0^b \left(\int_0^{\frac{a}{b}y} e^{a^2y^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \frac{b}{a} x e^{b^2x^2} \mathrm{d}x + \int_0^b \frac{a}{b} y e^{a^2y^2} \mathrm{d}y = \frac{e^{a^2b^2}-1}{ab}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{9.}}$ A este mulțimea punctelor situate în interiorul și pe fețele tetraedrului $OMNP$, unde O este originea, $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$, $P(0,0,1)$ (a se vedea figura 5). Proiecția lui A pe planul Oxy este triunghiul OMN, adică mulțimea $A_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

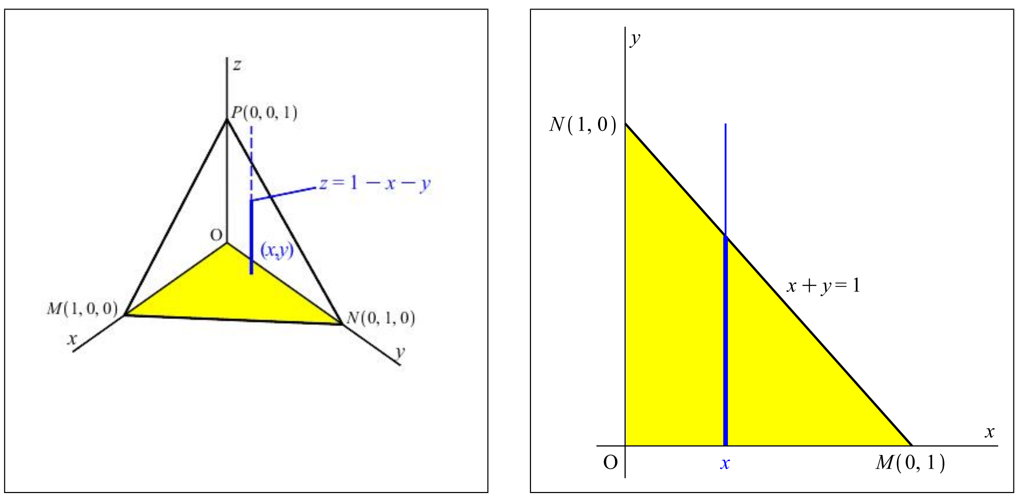

Figura 5:

Trecând la integrale iterate, avem

$$
\begin{aligned}
&\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{A_0} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} -\frac{1}{x+y+z+1} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{A_0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{x+y+1} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{4} + \iint_{A_0} \frac{1}{x+y+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

deoarece $\iint_{A_0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = m(A_0) = \dfrac{1}{2}$. Pentru calculul integralei duble, trecem din nou la integrale iterate. Avem

$$\begin{aligned}\iint_{A_0} \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=1-x}\frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{x=0}^{x=1}\ln(x+y+1)\Big|_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1\big(\ln 2 - \ln(x+1)\big)\mathrm{d}x = 1-\ln 2.\end{aligned}$$

În final, avem $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{3}{4} - \ln 2.$

$\boxed{\textbf{10.}}$ A este mulțimea punctelor situate în interiorul pânzei paraboloidului de ecuație $z = x^2+y^2$, sub planul $z = 4$ (a se vedea figura 6).

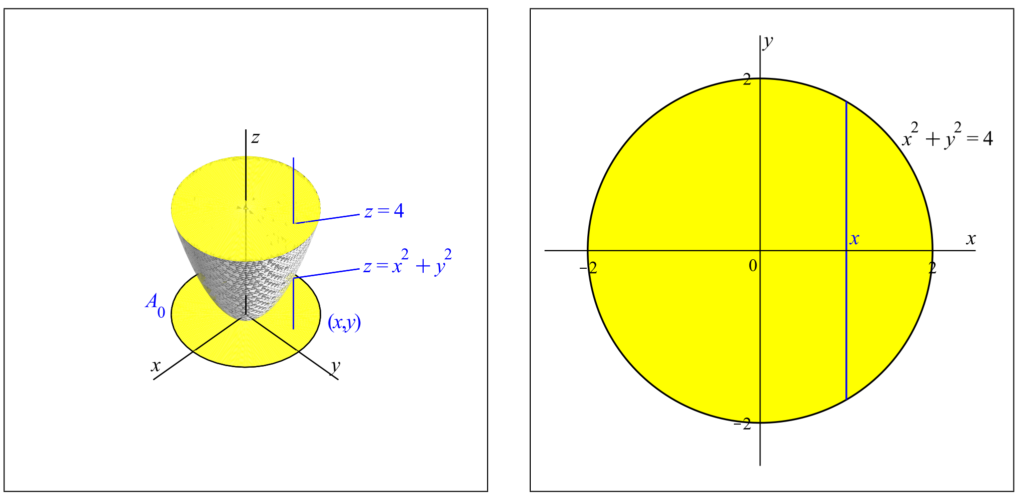

Figura 6:

Proiecția lui A pe planul Oxy este discul A_0, cu centrul în origine și de rază 2. Trecând la integrale iterate, avem

$$\begin{aligned}I \;:=\; &\iiint_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{A_0}\left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=4}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =\; &\iint_{A_0}(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Încercând să calculăm integrala dublă cu ajutorul teoremei lui Fubini (adică trecând la integrale iterate), obținem

$$I = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

GROAZNIC ! (cine nu crede, se poate convinge încercând calculele)

De aceea, vom calcula integrala dublă nu cu teorema lui Fubini, ci cu ajutorul coordonatelor polare (trecerea la coordonate polare este, de fapt, o schimbare de variabile în integrala dublă). Avem (a se vedea figura 7)

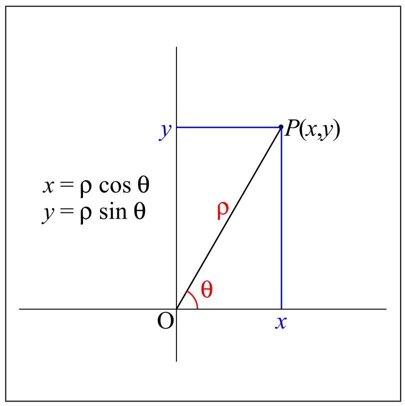

Figura 7:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \qquad \rho \in [0,2],\\ y &= \rho\sin\theta, \qquad \theta \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

Determinantul Jacobi al transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Fčând schimbarea de variabilă, obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right)\left(4-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta\right)\cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3(4-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^2 (4\rho^3-\rho^5)\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right). \end{aligned}$$

Pentru ultima egalitate s-a folosit observația de după rezolvarea problemei 1c). Răspunsul final este $I = \dfrac{32\pi}{3}$.