# Seminarul 8

**1.** Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x,y) := (1-x^2)\cos y - e^x \sin y \ln(1+x^2+y^2).$$

Să se demonstreze că există o vecinătate deschisă $U \subseteq \mathbb{R}$ a lui 1 și o funcție $f : U \to \mathbb{R}$, de clasă $C^1$ pe $U$, în așa fel încât

$$f(1) = 0 \quad \text{și} \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in U.$$

Să se determine $f'(1)$.

**2.** Fie $a > 0$ și fie mulțimea

$$C := \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 - \frac{a}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0\right\}.$$

Punctele lui $C$ sunt situate pe o curbă plană, numită *cardioidă* (a se vedea figura 1). Să se determine toate punctele cardioidei în jurul cărora se poate explicita $y$ ca funcție de $x$.

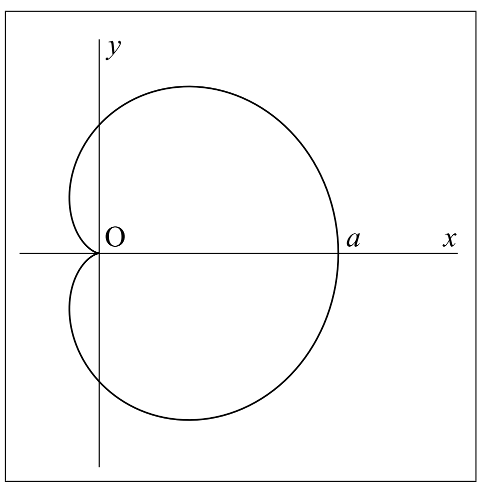


Figura 1: Graficul cardioidei

**3.** **(Temă)** Să se arate că ecuația $x^2 + xy + 2y^2 + 3z^4 - z = 9$ definește implicit într-o vecinătate a punctului $(1, -2)$ o funcție $z = f(x, y)$, de clasă $C^1$ și cu proprietatea $f(1, -2) = 1$. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi și diferențiala lui $f$ în punctul $(1, -2)$.

**4.** **(Temă)** Fie $a > 0$ și fie mulțimea

$$C := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax \}.$$

Punctele lui $C$ sunt situate pe o curbă în spațiu, numită *curba lui Viviani* (a se vedea figura 2). Să se determine toate punctele de pe curba lui Viviani în jurul cărora aceasta se poate parametriza utilizându-l pe $y$ ca parametru.

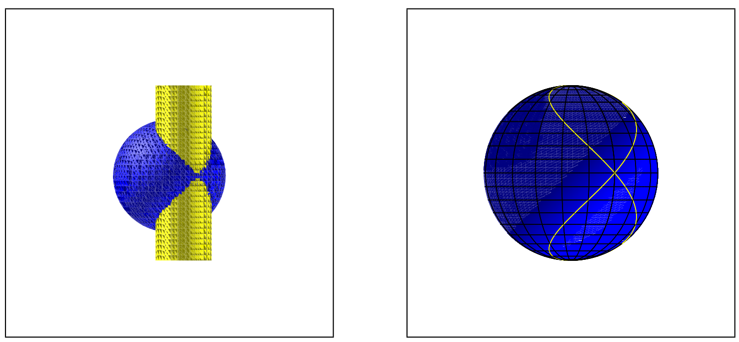

Figura 2: Curba lui Viviani

**5.** Să se demonstreze că sistemul

$$\begin{cases} x^2 + uy + e^v = 0 \\ 2x + u^2 - uv = 5 \end{cases}$$

definește implicit într-o vecinătate a punctului $(2, 5)$ o funcție

$$f = (f_1(x, y),\ f_2(x, y)),$$

de clasă $C^1$ și cu proprietatea $f(2, 5) = (-1, 0)$. Să se determine $\mathrm{d}f(2, 5)$.

**6.** **(Temă)** Să se demonstreze că sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \cos u \cos v + z = 1 \end{cases}$$

definește implicit într-o vecinătate a punctului $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ o funcție

$$f = (f_1(u,v),\ f_2(u,v),\ f_3(u,v)),$$

de clasă $C^1$ și cu proprietatea $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (1,1,0)$. Să se determine $\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

**7.** Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y,z) := x+y+z$ și mulțimea $C := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ 2x+y+2z = 1\,\}$. Să se determine $\min f(C)$ și $\max f(C)$.

**8.** **(Temă)** Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y,z) := x^2+y^2-z^2$ și mulțimea $C := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 9,\ x+y+z = 5\,\}$. Să se determine $\min f(C)$ și $\max f(C)$.

**9.** Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-2x+2\sqrt{2}y+2z$$

și mulțimea $B := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\,\}$. Să se determine $\min f(B)$ și $\max f(B)$.

**10.** Să se determine punctele critice ale următoarelor funcții și să se precizeze natura acestora:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-2xyz$;

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^4+y^4-2x^2$.

# Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ Avem de arătat că ecuația

$$F(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-x^2)\cos y - e^x \sin y \ln(1+x^2+y^2)=0$$

definește implicit pe $y$ ca funcție de $x$ în jurul punctului $(a,b)=(1,0)$. Verificăm ipotezele teoremei funcției implicite (Teorema 2.15.3 din notițele de curs). Evident, $F$ este de clasă $C^1$ pe $\mathbb{R}^2$ și $F(a,b)=F(1,0)=0$. Cealaltă condiție este

$$\det J_y(F)(1,0)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0)\neq 0.$$

Deoarece

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -(1-x^2)\sin y - e^x\cos y \ln(1+x^2+y^2) - e^x \sin y\cdot \frac{2y}{1+x^2+y^2}\,,$$

rezultă că $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0)=-e\ln 2\neq 0$, deci teorema funcției implicite poate fi aplicată. În baza ei, există o vecinătate deschisă $U\subseteq\mathbb{R}$ a lui 1 și există o funcție $f:U\to\mathbb{R}$, de clasă $C^1$ pe $U$, astfel ca $f(1)=0$ și

$$F(x,f(x)) = (1-x^2)\cos f(x) - e^x\sin f(x)\ln(1+x^2+f^2(x)) = 0 \quad \forall\, x\in U.$$

Derivând ambii membri ai acestei egalități, deducem că pentru orice $x\in U$ avem

$$\begin{aligned}
&-2x\cos f(x) - (1-x^2)\sin f(x)\cdot f'(x) - e^x\sin f(x)\ln(1+x^2+f^2(x))\\
&\quad -e^x\cos f(x)\cdot f'(x)\ln(1+x^2+f^2(x))\\
&\quad\quad -e^x\sin f(x)\,\frac{2x+2f(x)f'(x)}{1+x^2+f^2(x)} = 0.
\end{aligned}$$

Punând $x=1$ și ținând seama că $f(1)=0$, găsim

$$-2-e\ln 2\cdot f'(1)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=-\frac{2}{e\ln 2}\,.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Fie $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x,y) := x^2+y^2-\frac{a}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

și fie $(x_0, y_0) \in C$. Condiția ca $y$ să se poată explicita ca funcție de $x$ în jurul lui $(x_0, y_0)$ este, de fapt, condiția ca ecuația $F(x, y) = 0$ să definească implicit pe $y$ ca funcție de $x$ în jurul lui $(x_0, y_0)$. Aceasta este

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y_0 - \frac{ay_0}{2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \neq 0.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 2y - \dfrac{ay}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \\ x^2 + y^2 - \dfrac{a}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0, \end{cases}$$

obținem $(x, y) \in \left\{(0,0),\ (a,0),\ \left(-\dfrac{a}{8}, \dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right),\ \left(-\dfrac{a}{8}, -\dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$. Prin urmare, punctele de pe cardioidă în jurul cărora se poate explicita $y$ ca funcție de $x$ sunt $(x, y) \in C \setminus \left\{(0,0),\ (a,0),\ \left(-\dfrac{a}{8}, \dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right),\ \left(-\dfrac{a}{8}, -\dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$ (a se vedea figura 3).

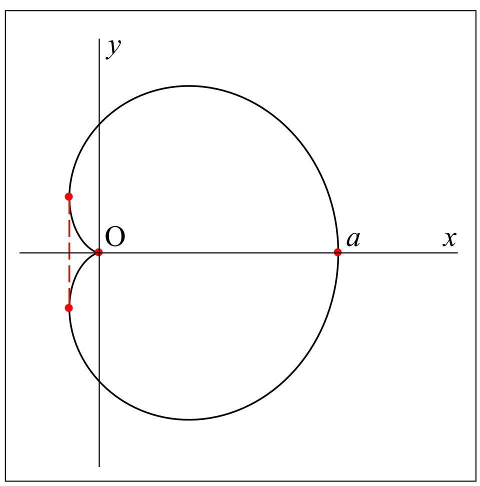


Figura 3:

$\boxed{\textbf{3.}}$ Considerăm funcția $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x, y, z) := x^2 + xy + 2y^2 + 3z^4 - z - 9$$

și punctele $a := (1, -2)$, $b := 1$. Avem de arătat că ecuația $F(x, y, z) = 0$ definește implicit pe $z$ ca funcție de $x$ și $y$ în jurul punctului $(a, b) = (1, -2, 1)$. Verificăm ipotezele teoremei funcției implicite. Evident, $F$ este de clasă $C^1$ pe $\mathbb{R}^3$ și $F(a, b) = F(1, -2, 1) = 0$. Cealaltă condiție este

$$\det J_z(F)(1, -2, 1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, -2, 1) \neq 0.$$

Deoarece

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 12z^3 - 1,$$

rezultă că $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, -2, 1) = 11 \neq 0$, deci teorema funcției implicite poate fi aplicată. În baza ei, există o vecinătate deschisă $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a lui $a$ și există o funcție $f : U \to \mathbb{R}$, de clasă $C^1$ pe $U$, astfel ca $f(1, -2) = 1$ și

$$x^2 + xy + 2y^2 + 3f^4(x, y) - f(x, y) - 9 = 0 \quad \forall\ (x, y) \in U.$$

Derivând ambii membri ai acestei egalități, mai întâi în raport cu $x$, iar apoi în raport cu $y$, obținem

$$2x + y + 12f^3(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \forall\ (x, y) \in U$$

și

$$x + 4y + 12f^3(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall\ (x, y) \in U.$$

Punând $(x, y) = (1, -2)$ și ținând seama că $f(1, -2) = 1$, găsim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = \frac{7}{11}\,.$$

Drept urmare, avem $\mathrm{d}f(1, -2)(h_1, h_2) = \frac{7}{11}\,h_2$ oricare ar fi $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Considerăm funcția $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$F(x, y, z) := \big(x^2 + y^2 + z^2 - a^2,\ x^2 + y^2 - ax\big).$$

Avem de determinat punctele $(x_0, y_0, z_0) \in C$ cu proprietatea că ecuația $F(x, y, z) = (0, 0)$ definește implicit în jurul lui $(x_0, y_0, z_0)$ variabilele $x$ și $z$

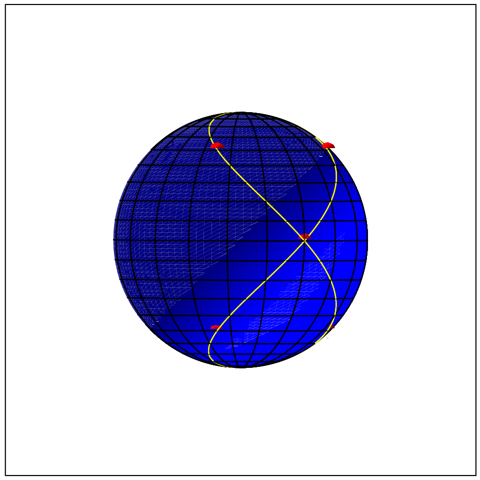

Figura 4:

ca funcții de $y$. Procedând ca în rezolvarea problemei $\boxed{\mathbf{2}}$, se obține (a se vedea figura 4)

$$\begin{aligned}(x_0, y_0, z_0) \quad \in \quad C \setminus \Bigg\{ &(a, 0, 0), \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \\ &\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Bigg\}.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Considerăm funcția $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$F(x, y, u, v) := \big( \underbrace{x^2 + uy + e^v}_{F_1(x,y,u,v)}, \underbrace{2x + u^2 - uv - 5}_{F_2(x,y,u,v)} \big)$$

și punctele $a := (2, 5)$, $b := (-1, 0)$. Avem de arătat că ecuația vectorială (sau sistemul de ecuații scalare) $F(x, y, u, v) = (0, 0)$ definește implicit variabilele $u$ și $v$ ca funcții de $x$ și $y$ în jurul punctului $(a, b) = (2, 5, -1, 0)$. Verificăm ipotezele teoremei funcției implicite. Evident, $F$ este de clasă $C^1$ pe $\mathbb{R}^4$ și $F(2, 5, -1, 0) = (0, 0)$. Cealaltă condiție este

$$\det J_{(u,v)}(F)(2, 5, -1, 0) \neq 0.$$

Avem

$$\begin{aligned}
J_{(u,v)}(F)(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y & e^v \\ 2u-v & -u \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\det J_{(u,v)}(F)(2,5,-1,0) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

deci teorema funcției implicite poate fi aplicată. Conform acestei teoreme, există o vecinătate deschisă $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a punctului $a$, precum și o funcție $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$, de clasă $C^1$ pe $U$, astfel ca $f(2,5) = (-1,0)$ și

$$(1) \qquad \forall\ (x,y) \in U\ :\quad \begin{cases} x^2 + f_1(x,y)y + e^{f_2(x,y)} = 0 \\ 2x + f_1^2(x,y) - f_1(x,y)f_2(x,y) - 5 = 0. \end{cases}$$

Derivând cele două egalități din (1) în raport cu $x$, obținem

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,y + e^{f_2(x,y)}\,\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] 2 + 2f_1(x,y)\,\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,f_2(x,y) - f_1(x,y)\,\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$$

pentru orice $(x,y) \in U$. Punând apoi $(x,y) = (2,5)$ și ținând seama că $f_1(2,5) = -1$ și $f_2(2,5) = 0$, găsim

$$\begin{cases} 5\,\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(2,5) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(2,5) = -4 \\[2ex] -2\,\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(2,5) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(2,5) = -2, \end{cases}$$

de unde $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(2,5) = -\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(2,5) = -\dfrac{18}{7}$.

Derivând acum cele două egalități din (1) în raport cu $y$ și procedând ca mai sus, obținem $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(2,5) = \dfrac{1}{7}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(2,5) = \dfrac{2}{7}$. Avem atunci

$$J(f)(2,5) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{7} & \dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{18}{7} & \dfrac{2}{7} \end{pmatrix},$$

deci

$$\mathrm{d}f(2,5)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{7} & \dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{18}{7} & \dfrac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2h_1 + h_2}{7} \\ \dfrac{-18h_1 + 2h_2}{7} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{7.}}$ $C$ este mulțimea punctelor situate pe cercul de intersecție dintre sfera $(S)\ :\ x^2+y^2+z^2=1$ și planul $(\pi)\ :\ 2x+y+2z=1$ (a se vedea figura 5).

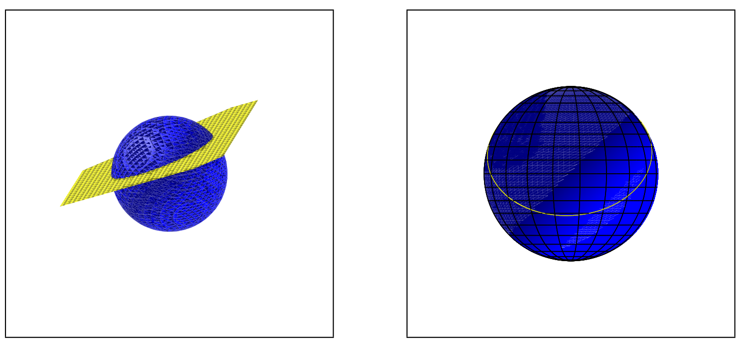

Figura 5:

Prin urmare, $C$ este o mulțime compactă. Funcția $f$ fiind continuă, în baza teoremei lui Weierstrass rezultă că ea este mărginită și își atinge marginile pe $C$. Există așadar punctele $(a,b,c) \in C$ și $(a',b',c') \in C$ în așa fel încât

$$f(a,b,c) = \min f(C) \quad \text{și} \quad f(a',b',c') = \max f(C).$$

Conform regulii multiplicatorilor lui Lagrange (Teorema 2.17.1 din notițele de curs), există pentru fiecare dintre cele două puncte de extrem câte o pereche de multiplicatori $(\lambda_0,\mu_0), (\lambda_0',\mu_0') \in \mathbb{R}^2$ astfel încât punctele

$$(a,b,c,\lambda_0,\mu_0) \quad \text{și} \quad (a',b',c',\lambda_0',\mu_0')$$

să fie puncte critice pentru funcția lui Lagrange. Fie

$$F_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{și} \quad F_2(x,y,z) := 2x + y + 2z - 1$$

funcțiile care dau legăturile dintre variabile în definiția mulțimii $C$ și fie

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda,\mu) &:= f(x,y,z) + \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z) \\ &= x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(2x + y + 2z - 1) \end{aligned}$$

funcția lui Lagrange. Tot ce rămâne de făcut este să determinăm punctele critice ale lui $L$. Acestea sunt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} L'_x(x,y,z,\lambda,\mu) &= 1 + 2\lambda x + 2\mu = 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda,\mu) &= 1 + 2\lambda y + \mu = 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda,\mu) &= 1 + 2\lambda z + 2\mu = 0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ L'_\mu(x,y,z,\lambda,\mu) &= 2x + y + 2z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Scăzând membru cu membru prima și a treia ecuație, găsim $2\lambda(x - z) = 0$, de unde $x = z$ (nu putem avea $\lambda = 0$ deoarece, în caz contrar, ar rezulta $1 + 2\mu = 0 = 1 + \mu$, ceea ce ar fi absurd). Prin urmare, avem

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 4x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0,\ y = 1 \\ \qquad \text{sau} \\ x = \frac{4}{9},\ y = -\frac{7}{9}\,. \end{cases}$$

În final, punctele critice ale lui $L$ sunt

$$(0,1,0,\dots,\dots) \quad \text{și} \quad \left(\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \dots, \dots\right).$$

Nu am mai determinat valorile multiplicatorilor deoarece ele nu au nicio relevanță pentru problemă. Cum $f(0,1,0) = 1$ și $f\left(\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{9}$, rezultă că $\min f(C) = \frac{1}{9}$ și $\max f(C) = 1$.

**9.** Mulțimea $B$ este compactă, iar funcția $f$ este continuă. Conform teoremei lui Weierstrass, există punctele $(a,b,c)$, $(a',b',c') \in B$ în așa fel încât

$$f(a,b,c) = \min f(B) \quad \text{și} \quad f(a',b',c') = \max f(B).$$

Observăm că

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 2\sqrt{2} = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ z = -1, \end{cases}$$

iar $(1, -\sqrt{2}, -1) \notin \operatorname{int} B$. Prin urmare, $(a,b,c)$, $(a',b',c') \in \operatorname{bd} B$. Avem

$$\operatorname{bd} B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Fie funcția $F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Conform regulii multiplicatorilor lui Lagrange, pentru fiecare dintre cele două puncte de extrem există câte un multiplicator $\lambda_0, \lambda_0' \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a,b,c,\lambda_0)$ și $(a',b',c',\lambda_0')$ să fie puncte critice ale funcției lui Lagrange

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda) &:= f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2\sqrt{2}y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1). \end{aligned}$$

Un calcul simplu arată că singurele puncte critice ale lui $L$ sunt

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{și} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -3\right).$$

Ținând seama că $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -3$ și $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5$, obținem în final $\min f(B) = -3$ și $\max f(B) = 5$.

**Interpretare geometrică.** Mulțimea $B$ este bila unitate închisă din $\mathbb{R}^3$. Avem $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y + \sqrt{2}\,)^2 + (z+1)^2 - 4$, deci

$$f(x,y,z) = PM^2 - 4, \quad \text{unde } P(x,y,z),\ M(1, -\sqrt{2}, -1).$$

Prin urmare, problema revine la a determina cea mai mică și cea mai mare distanță $PM$, atunci când punctul $P$ parcurge mulțimea $B$. Punctele $P'$ și $P''$ pentru care distanța $PM$ este minimă/maximă se obțin intersectând dreapta $OM$ cu sfera $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (a se vedea figura 6). Dreapta $OM$ are ecuațiile parametrice $OM : x = t$, $y = -\sqrt{2}t$, $z = -t$. Punând condiția ca $(t, -\sqrt{2}t, -t) \in S$, găsim $t = \pm\frac{1}{2}$, deci $P'\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ și $P''\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

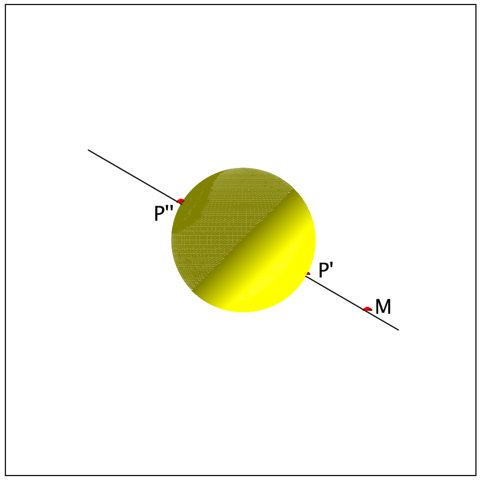


Figura 6:

$\boxed{\textbf{10.}}$ a) **I.** Determinăm mai întâi punctele critice ale lui $f$. Acestea sunt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 4x - y + 2z = 0 \\ f'_y(x,y,z) &= -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ f'_z(x,y,z) &= 2x + 2z = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul, se obțin punctele critice $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ și $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

**II.** Determinăm derivatele parțiale de ordinul al doilea ale lui $f$ și matricea hessiană. Avem

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y,z) &= 4, & f''_{xy}(x,y,z) &= f''_{yx}(x,y,z) = -1, \\ f''_{yy}(x,y,z) &= 6y, & f''_{yz}(x,y,z) &= f''_{zy}(x,y,z) = 0, \\ f''_{zz}(x,y,z) &= 2, & f''_{zx}(x,y,z) &= f''_{xz}(x,y,z) = 2. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**III.1.** Matricea hessiană în primul punct critic este

$$H(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

iar minorii principali diagonali din criteriul lui Sylvester

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14.$$

Deoarece $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ și $\Delta_3 > 0$, rezultă că $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ este punct de minim local pentru $f$.

**III.2.** În cel de-al doilea punct critic avem

$$H(f)\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

și

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

Prin urmare, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ este punct șa.

**Observație.** Cu toate că $f$ are un singur punct de extrem local (minim), acesta nu este punct de minim global pentru $f$. În adevăr, avem

$$f(0, y, 0) = y^3 - y \longrightarrow -\infty \quad \text{când } y \to -\infty.$$

b) **I.** Punctele critice ale lui $f$ sunt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3 - 6x^2 - y^2 + 4xy = 0 \\ f'_y(x, y) &= -3 - 2xy + 2x^2 + 3y^2 = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul, se obțin punctele critice $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

**II.** Determinăm derivatele parțiale de ordinul al doilea ale lui $f$ și matricea hessiană. Avem

$$f''_{xx}(x, y) = -12x + 4y, \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -2y + 4x,$$
$$f''_{yy}(x, y) = -2x + 6y.$$

Prin urmare,

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 4y - 12x & 4x - 2y \\ 4x - 2y & 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

**III.1.** Deoarece

$$H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

avem

$$\Delta_1 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -36,$$

deci $(1,1)$ este punct șa.

**III.2.** Deoarece

$$H(f)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{20}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{14}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

avem

$$\Delta_1 = -\frac{20}{\sqrt{6}}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{20}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{14}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = 36,$$

deci $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim local pentru $f$.

Procedând ca mai sus, se constată **(Temă)** că $(-1,-1)$ este punct șa, iar $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim local.

c) **I.** Punctele critice ale lui $f$ sunt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 2x - 2yz = 0 \\ f'_y(x,y,z) &= 2y - 2zx = 0 \\ f'_z(x,y,z) &= 2z - 2xy = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul, se obțin punctele critice $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$ și $(-1,1,-1)$.

**II.** Determinăm derivatele parțiale de ordinul al doilea ale lui $f$ și matricea hessiană. Avem

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y,z) &= 2, & f''_{xy}(x,y,z) &= f''_{yx}(x,y,z) = -2z, \\ f''_{yy}(x,y,z) &= 2, & f''_{yz}(x,y,z) &= f''_{zy}(x,y,z) = -2x, \\ f''_{zz}(x,y,z) &= 2, & f''_{zx}(x,y,z) &= f''_{xz}(x,y,z) = -2y. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix}.$$

**III.1.** Deoarece

$$H(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

avem $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 8$, deci $(0,0,0)$ este punct de minim local.

**III.2.** Deoarece

$$H(f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

avem $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 0$, deci criteriul lui Sylvester nu poate fi aplicat. Determinăm diferențiala a doua a lui $f$ în punctul critic $(1,1,1)$. Aceasta este forma pătratică

$$\mathrm{d}^2 f(1,1,1)(h_1,h_2,h_3) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - 4h_1h_2 - 4h_2h_3 - 4h_3h_1.$$

Cum $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)(1,0,0) = 2 > 0$ și $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)(1,1,1) = -6 < 0$, rezultă că $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)$ este o formă pătratică indefinită. Drept urmare, $(1,1,1)$ este punct șa.

Procedând similar, se constată **(Temă)** că și celelalte trei puncte critice ale lui $f$ sunt puncte șa.

d) Punctele critice ale lui $f$ sunt **(Temă)** $(0,0)$, $(1,0)$ și $(-1,0)$, iar matricea hessiană este

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Cum $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem $\Delta_1 = -4$, $\Delta_2 = 0$, deci criteriul lui Sylvester nu poate fi aplicat. Diferențiala a doua a lui $f$ în $(0,0)$, $\mathrm{d}^2 f(0,0)(h_1,h_2) = -4h_1^2$ este o formă pătratică negativ **semi**definită, deci nici cu ajutorul ei nu putem decide natura lui $(0,0)$. Observăm că

$$f(0,y) = y^4 > 0 = f(0,0) \quad \text{oricare ar fi } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

deci $(0,0)$ nu poate fi punct de maxim local pentru $f$. Pe de altă parte, deoarece

$$f(x,0) = x^2(x^2-2) < 0 = f(0,0) \quad \text{oricare ar fi } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,) \setminus \{0\},$$

rezultă că $(0,0)$ nu poate fi nici punct de minim local. În concluzie, $(0,0)$ este punct șa.

Cum $H(f)(1,0) = H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 0$, deci criteriul lui Sylvester nu poate fi aplicat nici acum. Diferențiala a doua a lui $f$ în $(1,0)$ și în $(-1,0)$, $\mathrm{d}^2 f(1,0)(h_1,h_2) = \mathrm{d}^2 f(-1,0)(h_1,h_2) = 8h_1^2$ este o formă pătratică pozitiv **semi**definită, deci nici cu ajutorul ei nu putem decide natura punctelor $(1,0)$ și $(-1,0)$. Observăm că

$$f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1 \geq -1 = f(1,0) = f(-1,0)$$

oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, deci $(1,0)$ și $(-1,0)$ sunt puncte de minim global pentru $f$.