Seminarul 7

1. Fie mulțimea $A := \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 2\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin
$$f(x, y) := 5 + 4x + 3y - 2x^2 - y^2.$$
Să se determine $\min f(A)$, $\max f(A)$ și $f(A)$.

2. **(Temă)** Fie mulțimea $A := [-1, 1]^2$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin
$$f(x, y) := x^3 + xy + y^3.$$
Să se determine $\min f(A)$, $\max f(A)$ și $f(A)$.

3. **(Temă)** Fie mulțimea $A := \{(x, y) \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin
$$f(x, y) := xy^2(1 - x - y)^3.$$
Să se determine $\min f(A)$ și $\max f(A)$.

4. Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ așa încât $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că
$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$
Olimpiada Internațională de Matematică, Praga 1984

5. **(Temă)** Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ așa încât $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că
$$4(xy + yz + zx) \leq 9xyz + 1.$$

6. Fie mulțimile definite prin $A := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \,\}$ și respectiv $B := \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v > 0,\ u - v > 0 \,\}$. Să se demonstreze că funcția $f : A \to B$, definită prin $f(x, y) := (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

7. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin
$$f(x, y) := (x^3 + 3xe^y,\ y - x^2),$$
este un difeomorfism de clasă C^1.

8. **(Temă)** Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f(x, y) := (x^3 + x,\ y - x^2),$$

este un difeomorfism de clasă C^1.

9. Se caută funcțiile $f : A \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 și care satisfac

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 3(x - y)f(x, y) = 0 \tag{1}$$

oricare ar fi $(x, y) \in A$, unde $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

a) Să se demonstreze că pentru orice $(x, y) \in A$ avem $(xy,\ x + y) \in B$, unde $B := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v^2 > 4u\}$.

b) Funcția $g : A \to B$, definită prin $g(x, y) := (xy,\ x + y)$, este un difeomorfism de clasă C^1.

c) Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1, atunci și funcția $F : B \to \mathbb{R}$, definită prin $F := f \circ g^{-1}$, este de clasă C^1. Mai mult, (1) are loc oricare ar fi $(x, y) \in A$ dacă și numai dacă avem

$$\forall \ \ (u, v) \in B \ \ : \qquad \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - 3F(u, v) = 0.$$

d) Să se determine funcțiile $f : A \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 și care satisfac (1) pentru orice $(x, y) \in A$.

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ A este mulțimea punctelor situate în interiorul și pe laturile triunghiului POQ, unde $P(-2, 2)$, $O(0, 0)$, $Q(2, 2)$, deci A este compactă. Cum funcția f este continuă, din teorema lui Weierstrass rezultă că f este mărginită și își atinge marginile pe A. Fie

$$m := \min f(A) \quad \text{și respectiv} \quad M := \max f(A).$$

Pentru aflarea lui m și M folosim observația 2.11.3 ($3°$) din notițele de curs.

I. Determinăm mai întâi valorile minimă și maximă ale lui f pe frontiera lui A. Notăm

$$m_1 := \min f(\operatorname{bd} A) \quad \text{și respectiv} \quad M_1 := \max f(\operatorname{bd} A).$$

Observăm că

$$\begin{aligned}\operatorname{bd} A &= [OP] \cup [OQ] \cup [PQ] \\ &= \{(x, -x) \mid x \in [-2, 0]\} \cup \{(x, x) \mid x \in [0, 2]\} \\ &\qquad \cup \{(x, 2) \mid x \in [-2, 2]\}.\end{aligned}$$

Fie

$$\begin{aligned}f_1(x) &:= f(x, -x) = 5 + 4x - 3x - 2x^2 - (-x)^2 = -3x^2 + x + 5, \\ f_2(x) &:= f(x, x) = 5 + 4x + 3x - 2x^2 - x^2 = -3x^2 + 7x + 5, \\ f_3(x) &:= f(x, 2) = 5 + 4x + 6 - 2x^2 - 4 = -2x^2 + 4x + 7.\end{aligned}$$

Folosind proprietățile de monotonie ale funcției de gradul al doilea (clasa a IX-a), avem:

$$\begin{aligned}&\min_{x \in [-2,0]} f_1(x) = f_1(-2) = -9, &&\max_{x \in [-2,0]} f_1(x) = f_1(0) = 5, \\ &\min_{x \in [0,2]} f_2(x) = f_2(0) = 5, &&\max_{x \in [0,2]} f_2(x) = f_2\left(\frac{7}{6}\right) = 9\frac{1}{12}, \\ &\min_{x \in [-2,2]} f_3(x) = f_3(-2) = -9, &&\max_{x \in [-2,2]} f_3(x) = f_3(1) = 9.\end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\begin{aligned}m_1 &= -9, &&\text{atins în punctul } P(-2, 2), \\ M_1 &= 9\frac{1}{12}, &&\text{atins în punctul } R\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right).\end{aligned}$$

II. Determinăm acum punctele critice ale lui f din $\operatorname{int} A$. Mai precis, determinăm mulțimea

$$C := \{(x, y) \in \operatorname{int} A \mid \nabla f(x, y) = (0, 0)\}.$$

Avem

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = 4 - 4x = 0 \\ f'_y(x, y) = 3 - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3/2. \end{cases}$$

Așadar, mulțimea C conține doar punctul $S(1,3/2)$. Atunci avem

$$m_2 := \min f(C) = f(1,3/2) = 9\frac{1}{4} = \max f(C) =: M_2.$$

În concluzie, avem (a se vedea observația 2.11.3 (3°) din notițele de curs)

$$\begin{aligned} m &= \min\{m_1, m_2\} = -9, && \text{atins în punctul } P(-2,2),\\ M &= \max\{M_1, M_2\} = 9\frac{1}{4}, && \text{atins în punctul } S\left(1,\ \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Conform problemei 5 din Seminarul 4, $f(A)$ este un interval compact, deci $f(A) = \left[-9,\ 9\frac{1}{4}\right]$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ **I.** Avem

$$\begin{aligned} \operatorname{bd} A \;=\; & \{(x,-1) \mid x \in [-1,1]\} \cup \{(x,1) \mid x \in [-1,1]\} \\ & \cup \{(-1,x) \mid x \in [-1,1]\} \cup \{(1,x) \mid x \in [-1,1]\}. \end{aligned}$$

Folosind metoda de studiere a variației unei funcții cu ajutorul derivatei (învățată în clasa a XI-a), se constată ușor că

$$\begin{aligned} &\min_{x\in[-1,1]} f(x,-1) = \min_{x\in[-1,1]} f(-1,x) = \min_{x\in[-1,1]} \left(x^3 - x - 1\right) = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{9},\\ &\min_{x\in[-1,1]} f(x,1) = \min_{x\in[-1,1]} f(1,x) = \min_{x\in[-1,1]} \left(x^3 + x + 1\right) = -1,\\ &\max_{x\in[-1,1]} f(x,-1) = \max_{x\in[-1,1]} f(-1,x) = \max_{x\in[-1,1]} \left(x^3 - x - 1\right) = -1 + \frac{2\sqrt{3}}{9},\\ &\max_{x\in[-1,1]} f(x,1) = \max_{x\in[-1,1]} f(1,x) = \max_{x\in[-1,1]} \left(x^3 + x + 1\right) = 3. \end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} m_1 &:= \min f(\operatorname{bd} A) = -1 - \tfrac{2\sqrt{3}}{9}, && \text{atins în punctele } \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right),\ \left(-1,\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\\ M_1 &:= \max f(\operatorname{bd} A) = 3, && \text{atins în punctul } (1,1). \end{aligned}$$

II. Deoarece

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 + y = 0 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 + x = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = y = 0 \\ \text{sau} \\ x = y = -1/3, \end{cases}$$

rezultă că

$$C := \{(x,y) \in \operatorname{int} A \mid \nabla f(x,y) = (0,0)\} = \left\{(0,0),\ \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Cum

$$f(0,0) = 0 \quad \text{și} \quad f\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27},$$

deducem că

$$m_2 := \min f(C) = 0 \quad \text{și respectiv} \quad M_2 := \max f(C) = \frac{1}{27}.$$

În final,

$$\begin{array}{ll} m = \min\{m_1, m_2\} = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}, & \text{atins în punctele } \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right),\ \left(-1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ M = \max\{M_1, M_2\} = 3, & \text{atins în punctul } (1,1), \end{array}$$

deci, $f(A) = \left[-1 - \frac{2\sqrt{3}}{9},\ 3\right]$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ **I.** Deoarece $f(x,y) = 0$ pentru orice $(x,y) \in \operatorname{bd} A$, rezultă că

$$m_1 := \min f(\operatorname{bd} A) = 0 \quad \text{și} \quad M_1 := \max f(\operatorname{bd} A) = 0.$$

II. Avem

$$\begin{aligned} &\nabla f(x,y) = (0,0) \\ &\qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'_x(x,y) = y^2(1-x-y)^3 - 3xy^2(1-x-y)^2 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2xy(1-x-y)^3 - 3xy^2(1-x-y)^2 = 0 \end{cases} \\ &\qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2(1-x-y)^2(1-4x-y) = 0 \\ xy(1-x-y)^2(2-2x-5y) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} C &:= \{(x,y) \in \operatorname{int} A \mid \nabla f(x,y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \mid 1-4x-y = 0,\ 2-2x-5y = 0\} = \left\{\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$m_2 := \min f(C) = f\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432} = \max f(C) =: M_2,$$

deci

$$\begin{array}{ll} m = \min\{m_1, m_2\} = 0, & \text{atins în toate punctele lui } \operatorname{bd} A, \\ M = \max\{M_1, M_2\} = 3, & \text{atins în punctul } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right). \end{array}$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Considerăm mulțimea

$$A := \{(x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x + y + z = 1\}.$$

Aceasta este mulțimea punctelor situate în interiorul și pe laturile triunghiului PQR, unde $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 1)$, deci este compactă. Întrucât funcția definită prin

$$f(x, y, z) := xy + yz + zx - 2xyz$$

este continuă, din teorema lui Weierstrass rezultă că f este mărginită și își atinge marginile pe A. Problema cere să determinăm $m := \min f(A)$ și $M := \max f(A)$. Din păcate, avem $\operatorname{int} A = \emptyset$, ceea ce face inaplicabilă teorema lui Fermat, deci și metoda descrisă în observația 2.11.3 din notițele de curs.

Din $x + y + z = 1$ rezultă $z = 1 - x - y$. Inegalitatea din enunț se rescrie în forma echivalentă

$$0 \le \underbrace{xy + y(1 - x - y) + (1 - x - y)x - 2xy(1 - x - y)}_{g(x,y) := f(x, y, 1 - x - y)} \le \frac{7}{27}.$$

Avem $m = \min g(B)$ și $M = \max g(B)$, unde

$$B := \{(x, y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}.$$

B este mulțimea punctelor situate în interiorul și pe laturile triunghiului $P'OQ'$, unde $P'(1, 0)$, $O(0, 0)$, $Q'(0, 1)$. Spre deosebire de A, mulțimea B are interiorul nevid. Prin calcul, se obține expresia lui g

$$g(x, y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2 - y^2 - 3xy + x + y.$$

I. Procedând ca în problemele anterioare, se obține **(Temă)**

$$\begin{array}{ll} m_1 := \min g(\operatorname{bd} B) = 0, & \text{atins în punctele } (0,0),\ (1,0),\ (0,1), \\ M_1 := \max g(\operatorname{bd} B) = \frac{1}{4}, & \text{atins în punctele } \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ \left(0, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{array}$$

II. Avem

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g'_x(x,y) = 4xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1 = 0 \\ g'_y(x,y) = 2x^2 + 4xy - 2y - 3x + 1 = 0. \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului conduce la **(Temă)**

$$C := \{(x,y) \in \operatorname{int} A \mid \nabla g(x,y) = (0,0)\} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\},$$

de unde

$$m_2 := \min g(C) = g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{27} = \max g(C) =: M_2.$$

În final, avem $m = \min\{m_1, m_2\} = 0$ și $M = \max\{M_1, M_2\} = \frac{7}{27}$, ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț.

Observație. Inegalitatea stângă din enunț are loc cu egalitate dacă și numai dacă două dintre variabilele x, y, z sunt 0, iar a treia 1. Inegalitatea dreaptă din enunț are loc cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z = 1/3$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Deoarece derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x, 2x) \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y, -2y)$$

sunt continue pe A, rezultă că f este de clasă C^1 pe A. Pentru a demonstra bijectivitatea lui f, avem de arătat că

$$\forall\ (u,v) \in B\ \exists!\ (x,y) \in A\ :\ f(x,y) = (u,v).$$

Fie $(u,v) \in B$ arbitrar. Avem

$$f(x,y) = (u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ x^2 - y^2 = v, \end{cases}$$

sistem care are în A soluția unică $x = \sqrt{\frac{u+v}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{u-v}{2}}$. Am dovedit astfel că f este bijectivă și am determinat totodată și inversa $f^{-1} : B \to A$,

$$f^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}, \sqrt{\frac{u-v}{2}} \right).$$

Deoarece derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f^{-1}

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^{-1}}{\partial u}(u,v) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}}, \frac{1}{2\sqrt{2(u-v)}}\right), \\
\frac{\partial f^{-1}}{\partial v}(u,v) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}}, -\frac{1}{2\sqrt{2(u-v)}}\right),
\end{aligned}$$

sunt continue pe B, rezultă că f^{-1} este de clasă C^1 pe B. În concluzie, f este difeomorfism de clasă C^1.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Deoarece derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(3x^2 + 3e^y,\ -2x\big) \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (3xe^y,\ 1)$$

sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, rezultă că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$. Pentru a demonstra bijectivitatea lui f, avem de arătat că

$$\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\ \exists!\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ f(x,y) = (u,v).$$

Fie $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ arbitrar. Avem

$$f(x,y) = (u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 + 3xe^y = u \\ y - x^2 = v \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 + 3xe^{v+x^2} = u \\ y = v + x^2. \end{cases}$$

Este suficient așadar să dovedim că ecuația $x^3 + 3xe^{v+x^2} = u$ are în $\mathbb{R}$ o unică soluție x_0. Atunci $(x_0, v + x_0^2)$ este unica soluție în $\mathbb{R}^2$ a sistemului $f(x,y) = (u,v)$. Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 + 3xe^{v+x^2}$ are derivata

$$g'(x) = 3x^2 + 3e^{v+x^2} + 6x^2e^{v+x^2} > 0,$$

deci este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, rezultă că există un unic $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x_0) = u$. Aceasta demonstrează că f este într-adevăr bijectivă.

Spre deosebire de problema anterioară, acum nu putem determina explicit pe f^{-1}, deoarece nu putem determina explicit rădăcina x_0 în funcție de u și v. Prin urmare, nu putem demonstra direct, pe baza definiției, că f este difeomorfism de clasă C^1. Salvarea o oferă Consecința 2.14.6 din notițele de curs. Aceasta este deosebit de importantă deoarece oferă condiții suficiente ca f să fie difeomorfism de clasă C^1 pe baza unor informații legate doar de f (nu și de f^{-1}). Conform Consecinței 2.14.6, este suficient să probăm că aplicația liniară $\mathrm{d}f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este bijectivă oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrar. Avem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y) \text{ bijectivă } &\Leftrightarrow J(f)(x,y) \text{ inversabilă} \\ &\Leftrightarrow \det J(f)(x,y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x^2+3e^y & 3xe^y \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 3x^2+3e^y+6x^2e^y \neq 0, \end{aligned}$$

ceea ce într-adevăr are loc.

$\boxed{\textbf{9.}}$ a) Fie $(x,y) \in A$ arbitrar. Atunci avem $x > y$ și

$$(xy, x+y) \in B \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2 > 4xy \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 > 0,$$

ceea ce este adevărat.

b) Evident, g este de clasă C^1 pe A. Pentru a demonstra că g este bijectivă, fie $(u,v) \in B$ arbitrar. Avem

$$\begin{aligned} g(x,y) = (u,v) &\Leftrightarrow xy = u \text{ și } x+y = v \\ &\Leftrightarrow x = \frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2},\ y = \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2}, \end{aligned}$$

deoarece x și y sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea $z^2 - vz + u = 0$ și $x > y$ (condiția ca $(x,y) \in A$). Așadar, pentru orice $(u,v) \in B$ există un unic punct $(x,y) \in A$ cu proprietatea că $g(x,y) = (u,v)$. Rezultă că g este bijectivă, iar inversa ei este funcția $g^{-1} : B \to A$, definită prin

$$g^{-1}(u,v) = \left(\frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2}, \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2} \right).$$

Un calcul simplu arată că derivatele parțiale ale lui g^{-1} sunt continue pe B, deci g^{-1} este de clasă C^1 pe B. În concluzie, funcția g este un difeomorfism de clasă C^1.

c) Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe A, care satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0 \quad \forall\, (x,y) \in A \tag{2}$$

și fie $F : B \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F := f \circ g^{-1}$. Notăm

$$x(u,v) := \frac{v + \sqrt{v^2 - 4u}}{2} \quad \text{și} \quad y(u,v) := \frac{v - \sqrt{v^2 - 4u}}{2}$$

componentele scalare ale lui g^{-1}. Aplicând regula de derivare a unei funcții compuse, avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(g^{-1}(u,v)\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(g^{-1}(u,v)\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{v^2-4u}}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u,v), y(u,v)\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u,v), y(u,v)\right)\right].
\end{aligned}$$

Întrucât derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe A, rezultă că $\frac{\partial F}{\partial u}$ este continuă pe B. Similar se probează că și $\frac{\partial F}{\partial v}$ este continuă pe B, deci F este de clasă C^1. Mai mult, cum f satisface (2), rezultă că

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= -\frac{1}{\sqrt{v^2-4u}}(-3)\big[x(u,v) - y(u,v)\big] f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \\
&= \frac{3}{\sqrt{v^2-4u}} \cdot \sqrt{v^2-4u}\,\big(f \circ g^{-1}\big)(u,v) = 3F(u,v).
\end{aligned}$$

d) Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe A, care satisface (2) și fie $F : B \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $F := f \circ g^{-1}$. Conform punctului c), pentru orice $(u,v) \in B$ avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) - 3F(u,v) = 0 \quad \Big|\cdot e^{-3u} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-3u}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) - 3e^{-3u}F(u,v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u}\Big[e^{-3u}F(u,v)\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Rezultă de aici că $e^{-3u}F(u,v) = h(v)$, unde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă arbitrară, deci $F(u,v) = e^{3u}h(v)$. Cum $f = F \circ g$, deducem în final că funcțiile f care satisfac (2) sunt de forma $f(x,y) = e^{3xy}h(x+y)$, cu $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție derivabilă arbitrară.