Seminarul 6

1. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) := \begin{cases} x^{4/3} \sin \dfrac{y}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

3. (Temă) Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Fie $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$ și fie funcția $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x,y,z) := f\left(x^2 - y + 2yz^2,\ z^3 e^{xy}\right)$. Să se determine, în funcție de derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f, derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui F.

5. (Temă) Fie $f = f(u,v,w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$ și fie funcția $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x,y) := f\left(-3x + 2y,\ x^2 + y^2,\ 2x^3 - y^3\right).$$

Să se determine, în funcție de derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f, derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui F.

6. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$ și fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin

$$F(x,y) := f\left(\cos x + \sin y,\ \sin x + \cos y,\ e^{x-y}\right).$$

Știind că $J(f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, să se determine $\mathrm{d}F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Folosind eventual coordonatele polare, să se determine funcțiile diferențiabile $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care satisfac

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall\ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

8. **(Temă)** Cu ajutorul coordonatelor polare să se determine funcțiile diferențiabile $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care satisfac

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall\ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

9. **(Temă)** Cu ajutorul coordonatelor polare să se determine funcțiile diferențiabile $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care satisfac

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 \quad \forall\ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ Considerăm mulțimea $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Aceasta este deschisă, f este derivabilă parțial pe A, iar derivatele sale parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y^4 - 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

sunt continue pe A. Drept urmare, funcția f este diferențiabilă în toate punctele lui A.

Studiem în continuare diferențiabilitatea lui f în punctul $(0, 0)$. Verificăm mai întâi existența derivatelor parțiale în $(0, 0)$. Avem

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1 \quad \text{și} \quad \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1,$$

deci f este derivabilă parțial în $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$. Trecem la etapa a II-a, adică la studiul limitei

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \omega(h_1, h_2), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
\omega(h_1,h_2) &= \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \frac{\dfrac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^2h_2-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Întrucât

$$\lim_{k\to\infty}\omega\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=0 \quad \text{și} \quad \lim_{k\to\infty}\omega\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)=\frac{2}{5\sqrt{5}}\neq 0,$$

deducem că ℓ nu există, deci f nu este diferențiabilă în $(0,0)$.

În concluzie, f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ și nu este diferențiabilă în punctul $(0,0)$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Considerăm mulțimea $A := \{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$. Atunci mulțimea $\mathbb{R}^2\setminus A$ este deschisă, funcția f este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2\setminus A$, iar derivatele sale parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4}{3}x^{1/3}\sin\frac{y}{x}-x^{-2/3}\cos\frac{y}{x} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^{1/3}\cos\frac{y}{x}$$

sunt continue pe $\mathbb{R}^2\setminus A$. Drept urmare, f este diferențiabilă în toate punctele lui $\mathbb{R}^2\setminus A$.

Studiem în continuare diferențiabilitatea lui f în punctele lui A, adică în puncte de forma $(0,a)$, cu $a\in\mathbb{R}$. Verificăm mai întâi existența derivatelor parțiale în $(0,a)$. Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,a)-f(0,a)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{4/3}\sin\dfrac{a}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{1/3}\sin\frac{a}{x}=0$$

și

$$\lim_{y\to a}\frac{f(0,y)-f(0,a)}{y-a}=\lim_{y\to a}\frac{0}{y-a}=0,$$

deci f este derivabilă parțial în $(0,a)$ și $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,a)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,a)=0$. Trecem la etapa a II-a, adică la studiul limitei

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,a+h_2)-f(0,a)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,a)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,a)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \omega(h_1,h_2),
\end{aligned}$$

unde

$$\omega(h_1,h_2)=\frac{f(h_1,a+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,.$$

Dacă $h_1\neq 0$, atunci avem

$$\begin{aligned}
|\omega(h_1,h_2)| &= \frac{|h_1|^{4/3}\left|\sin\dfrac{a+h_2}{h_1}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{|h_1|^{4/3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,|h_1|^{1/3}\\
&\leq |h_1|^{1/3}.
\end{aligned}$$

Deoarece $f(0,a+h_2)=0$, avem $\omega(0,h_2)=0$, deci inegalitatea de mai sus are loc și pentru $h_1=0$. Am demonstrat astfel că

$$0\leq|\omega(h_1,h_2)|\leq|h_1|^{1/3}\quad \text{oricare ar fi } (h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

În baza teoremei cleștelui, deducem de aici că $\ell=\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\omega(h_1,h_2)=0$, deci f este diferențiabilă în punctul $(0,a)$. În concluzie, funcția f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

3. Răspuns: f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

4. Avem $F=f\circ g$, unde $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ este funcția definită prin

$$g(x,y,z):=\left(x^2-y+2yz^2,\ z^3e^{xy}\right).$$

Fie

$$u(x,y,z):=x^2-y+2yz^2 \quad \text{și respectiv} \quad v(x,y,z):=z^3e^{xy}$$

componentele scalare ale lui g. Aici IT-istul din voi va exploda. Cine ne permite să folosim aceeași literă u pentru a nota atât **o variabilă** (prima variabilă a funcției f) cât și **o funcție** (prima componentă scalară a funcției g)? Cred că nici Python-ul nu înghite așa ceva. Facem acest "abuz" de notație deoarece astfel e mai ușor de ținut minte formula de derivare parțială a unei funcții compuse (a se vedea cele două formule din finalul secțiunii 2.8 din notițele de curs). Conform acestei formule, avem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Vă atrag atenția că această formulă, cu toate că e ușor de memorat, nu este riguroasă deoarece derivatele parțiale $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial x}$ se evaluează în punctul $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pe când derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial u}$ și $\frac{\partial f}{\partial v}$ se evaluează în punctul $g(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$. Riguros, formula de mai sus se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z),$$

adică

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) \quad &= \quad 2x\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2 - y + 2yz^2,\; z^3 e^{xy}\right) \\ &\qquad + yz^3 e^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2 - y + 2yz^2,\; z^3 e^{xy}\right).\end{aligned}$$

Analog, avem formulele prescurtate

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

și

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\,,$$

formulele riguroase

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)$$

și

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z),$$

de unde

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= (2z^2-1)\,\frac{\partial f}{\partial u}\,\left(x^2-y+2yz^2,\, z^3e^{xy}\right)\\ &\quad +xz^3e^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}\,\left(x^2-y+2yz^2,\, z^3e^{xy}\right)\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 4yz\,\frac{\partial f}{\partial u}\,\left(x^2-y+2yz^2,\, z^3e^{xy}\right)\\ &\quad +3z^2e^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}\,\left(x^2-y+2yz^2,\, z^3e^{xy}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Se procedează ca în rezolvarea problemei anterioare. Avem $F = f\circ g$, unde $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ este funcția definită prin

$$g(x,y) := \left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right).$$

Fie

$$u(x,y) := -3x+2y, \quad v(x,y) := x^2+y^2 \quad \text{și respectiv} \quad w(x,y) := 2x^3-y^3$$

componentele scalare ale lui g.

Răspunsuri: formulele prescurtate în acest caz sunt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

și respectiv

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

iar expresiile finale

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= -3\,\frac{\partial f}{\partial u}\,\left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right)\\ &\quad +2x\,\frac{\partial f}{\partial v}\,\left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right)\\ &\quad +6x^2\,\frac{\partial f}{\partial w}\,\left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right)\end{aligned}$$

și respectiv

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right)\\ &\quad +2y\,\frac{\partial f}{\partial v}\left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right)\\ &\quad -3y^2\,\frac{\partial f}{\partial w}\left(-3x+2y,\, x^2+y^2,\, 2x^3-y^3\right).\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ Diferențiala lui F în punctul $\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$ este aplicația liniară

$$\mathrm{d}F\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

a cărei matrice este matricea Jacobi $J(F)\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$. Observăm că $F = f \circ g$, unde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este funcția definită prin

$$g(x,y) := \left(\cos x + \sin y,\, \sin x + \cos y,\, e^{x-y}\right).$$

Fie

$$u(x,y) := \cos x + \sin y,\ v(x,y) := \sin x + \cos y \text{ și respectiv } w(x,y) := e^{x-y}$$

componentele scalare ale lui g. Conform teoremei 2.8.2, avem

$$\begin{aligned}J(F)\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right) &= J(f)\left(g\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot J(g)\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)\\ &= J(f)(1,1,1)\cdot J(g)\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Rămâne să determinăm matricea Jacobi $J(g)\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem

$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial w}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y\\ \cos x & -\sin y\\ e^{x-y} & -e^{x-y}\end{pmatrix},$$

de unde

$$J(g)\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, avem

$$J(F)\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

deci

$$\mathrm{d}F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h_1 - 7h_2 \\ h_1 - 2h_2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{7.}}$ Fie $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă, care satisface

$$(1) \qquad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \forall\ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Sugerată de legătura dintre coordonatele carteziene și cele polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta, \end{cases}$$

considerăm funcția $F : (0, \infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta).$$

Observăm că $F = f \circ g$, unde $g : (0, \infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty) \times (0, \infty)$ este funcția definită prin $g(\rho, \theta) := (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$. Fie

$$x(\rho, \theta) := \rho\cos\theta \quad \text{și respectiv} \quad y(\rho, \theta) := \rho\sin\theta$$

componentele scalare ale lui g. Aplicând formula de derivare parțială a unei funcții compuse, avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(\rho, \theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(\rho, \theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) \\ &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta). \end{aligned}$$

Înmulțind ambii membri cu ρ, obținem

$$\begin{aligned} \rho\,\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \rho\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) + \rho\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) \\ &= \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}} = \cos\theta, \end{aligned}$$

deoarece f satisface (1). Rezultă că

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\cos\theta}{\rho}\,.$$

De aici, prin integrare, găsim

$$F(\rho, \theta) = \int \frac{\cos\theta}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = \cos\theta \cdot \ln\rho + h(\theta),$$

unde $h : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă arbitrară. Rămâne ca din expresia funcției F să recuperăm expresia lui f. Se poate demonstra **(Temă)** că g este bijectivă, inversa ei fiind funcția

$$g^{-1} : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

definită prin

$$g^{-1}(x, y) := \left(\sqrt{x^2 + y^2},\, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Din $F = f \circ g$ rezultă $f = F \circ g^{-1}$, adică

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \cdot \ln\sqrt{x^2 + y^2} + h\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\,\ln(x^2 + y^2) + h\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Se poate verifica prin calcul direct **(și sunteți invitați să o faceți !)** că pentru orice funcție derivabilă $h : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, funcția f, având expresia de mai sus, satisface (1).