# Seminarul 5

**1.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x,y) := x\sqrt{x^2+y^2}$. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui $f$, $\nabla f(3,4)$ și $df(3,4)$.

**2. (Temă)** Fie $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ și fie funcția $f : A \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y) := \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui $f$, $\nabla f(1,1)$ și $\mathrm{d}f(1,1)$.

**3.** Fie mulțimea $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 2z > 0\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}^2$ funcția definită prin $f(x,y,z) := \big(\ln(xy+2z), \sin(xy+yz+zx)\big)$. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui $f$ și $\mathrm{d}f(2,-1,2)$.

**4. (Temă)** Fiind dată funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) := \big(x^2 - y,\ xy + y^2,\ \sin(x^2 - y^2)\big),$$

să se determine $\mathrm{d}f(1,1)$.

**5.** Să se demonstreze că funcția $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ satisface egalitatea

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \quad \text{oricare ar fi } (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

**6. (Temă)** Fie mulțimea $A := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz \,\}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x,y,z) := \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$. Să se demonstreze că pentru orice $(x,y,z) \in A$ are loc egalitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{3}{x+y+z}.$$

**7.** Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y) := y^\alpha e^{-x^2/(4y)}$, să satisfacă

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \ : \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right).$$

**8.** Fie $r > 0$, fie $A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \}$ și fie $f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) := 2 \ln \frac{r\sqrt{8}}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Să se demonstreze că pentru orice $(x, y) \in A$ are loc egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^{f(x,y)}.$$

**9. (Temă)** Să se demonstreze că funcția $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) := (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

satisface pentru orice $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ egalitatea

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2f(x, y).$$

**10.** (Exemplu de funcție discontinuă, derivabilă după orice direcție) Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{dacă} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

este discontinuă în punctul $(0, 0)$, dar este derivabilă după orice direcție în acest punct.

**Observație.** Acest exemplu arată de ce nu ne putem rezuma la derivatele parțiale. Dacă derivabilitatea parțială ar fi singurul concept de diferențiabilitate pe care l-am folosi, atunci ar apărea acest fenomen neplăcut, al existenței unor funcții diferențiabile care sunt discontinue. În cazul diferențiabilității Fréchet acest fenomen nu apare. Orice funcție diferențiabilă Fréchet într-un punct este continuă în acel punct.

Algoritm cu ajutorul căruia se poate studia diferențiabilitatea unei funcții reale $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ într-un punct $a \in \operatorname{int} A$:

I. Se studiază dacă $f$ este derivabilă parțial în punctul $a$.

• dacă $f$ nu este derivabilă parțial în $a$, atunci $f$ nu este diferențiabilă în punctul $a$;

• dacă $f$ este derivabilă parțial în $a$, atunci se calculează $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ pentru $j = 1, \ldots, n$ și se trece la etapa următoare.

II. Se studiază limita

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{x \to a} \frac{1}{\|x-a\|}\left[f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right] \\ &= \lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to 0_n} \frac{f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}}.\end{aligned}$$

• dacă $\ell = 0$, atunci $f$ este diferențiabilă în $a$ și

$$\forall\ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \ :\quad df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a);$$

• în caz contrar, $f$ nu este diferențiabilă în $a$.

Pentru o funcție vectorială $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ se studiază, pe baza algoritmului de mai sus, diferențiabilitatea în $a$ a fiecărei componente scalare $f_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

• dacă toate funcțiile $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferențiabile în $a$, atunci $f$ este diferențiabilă în $a$ și

$$df(a) = (df_1(a), \ldots, df_m(a)).$$

• în caz contrar, $f$ nu este diferențiabilă în $a$.

Foarte util în studiul diferențiabilității este următorul rezultat.

**Teoremă.** *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă, iar $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcție derivabilă parțial pe $A$, cu toate derivatele parțiale continue pe $A$, atunci $f$ este diferențiabilă pe $A$.*

**11.** Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x, y) := \sqrt[3]{x^3 - y^3}$.

# Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ Pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Formulele de mai sus pentru derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui $f$ nu sunt valabile și în originea lui $\mathbb{R}^2$. În acest punct derivabilitatea parțială trebuie studiată cu ajutorul definiției. Deoarece

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

rezultă că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Pe de altă parte, deoarece

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0,$$

rezultă că $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Avem

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(3, 4) = \left(\frac{34}{5}\,, \frac{12}{5}\right).$$

Diferențiala lui $f$ în punctul $(3, 4)$ este aplicația liniară $\mathrm{d}f(3, 4) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\mathrm{d}f(3, 4)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) \cdot h_2 = \frac{34}{5}\,h_1 + \frac{12}{5}\,h_2.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Răspunsuri: $f(x, y) := \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}\,,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\,, \quad \nabla f(1, 1) = \left(\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathrm{d}f(1, 1)(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\,h_1 - \frac{1}{2}\,h_2.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ funcțiile definite prin $f_1(x,y,z) := \ln(xy+2z)$ și respectiv $f_2(x,y,z) := \sin(xy+yz+zx)$. Acestea sunt componentele scalare ale lui $f$. Pentru orice $(x,y,z) \in A$ avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\right) \\
&= \left(\frac{y}{xy+2z}, (y+z)\cos(xy+yz+zx)\right), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)\right) \\
&= \left(\frac{x}{xy+2z}, (z+x)\cos(xy+yz+zx)\right), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)\right) \\
&= \left(\frac{2}{xy+2z}, (x+y)\cos(xy+yz+zx)\right).
\end{aligned}$$

Diferențiala Fréchet a funcției $f$ în punctul $(2,-1,2) \in A$ este aplicația liniară $\mathrm{d}f(2,-1,2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, a cărei matrice este matricea Jacobi

$$\begin{aligned}
J(f)(2,-1,2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(2,-1,2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(2,-1,2) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(2,-1,2) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(2,-1,2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(2,-1,2) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,-1,2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, pentru orice $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$ avem

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(2,-1,2)(h_1,h_2,h_3) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}h_1 + h_2 + h_3 \\ h_1 + 4h_2 + h_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Răspunsuri: $f(x,y) := \big(x^2 - y,\ xy + y^2,\ \sin(x^2 - y^2)\big)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(2x,\ y,\ 2x\cos(x^2-y^2)\big),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(-1,\ x+2y,\ -2y\cos(x^2-y^2)\big),$$
$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y & x+2y \\ 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{pmatrix},$$

$\mathrm{d}f(1,1)$ este aplicația liniară $\mathrm{d}f(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definită prin

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(1,1)(h_1,h_2) &= J(f)(1,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2h_1 - h_2 \\ h_1 + 3h_2 \\ 2h_1 - 2h_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Avem $f(x,y) := \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

de unde

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \quad \text{oricare ar fi } (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ Indicație: se folosește identitatea

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz,$$

de unde

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{7.}}$ Pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ avem $f(x,y) = y^{\alpha}e^{-x^2/(4y)}$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{xy^{\alpha-1}}{2}\,e^{-x^2/(4y)},$$

de unde $\displaystyle x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x^3y^{\alpha-1}}{2}\,e^{-x^2/(4y)}$ și prin urmare

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) &= -\frac{3x^2y^{\alpha-1}}{2}\,e^{-x^2/(4y)} + \frac{x^4y^{\alpha-2}}{4}\,e^{-x^2/(4y)}\\ &= \frac{1}{4}\,x^2y^{\alpha-2}e^{-x^2/(4y)}(x^2-6y).\end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2\left(\alpha y^{\alpha-1}e^{-x^2/(4y)} + \frac{x^2y^{\alpha-2}}{4}\,e^{-x^2/(4y)}\right)\\ &= \frac{1}{4}\,x^2y^{\alpha-2}e^{-x^2/(4y)}(x^2+4\alpha y).\end{aligned}$$

Așadar, egalitatea din enunț are loc pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ dacă și numai dacă $4\alpha=-6$, adică $\alpha=-\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Cum $\displaystyle f(x,y) := 2\ln\frac{r\sqrt{8}}{r^2-x^2-y^2}$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x}{r^2-x^2-y^2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y}{r^2-x^2-y^2},$$

de unde

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4x}{r^2-x^2-y^2}\right)\\ &= \frac{4(r^2-x^2-y^2)-4x(-2x)}{(r^2-x^2-y^2)^2} = \frac{4(r^2+x^2-y^2)}{(r^2-x^2-y^2)^2}\end{aligned}$$

și analog

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4(r^2-x^2+y^2)}{(r^2-x^2-y^2)^2}.$$

Drept urmare, avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{8r^2}{(r^2-x^2-y^2)^2} = e^{f(x,y)}$$

pentru orice $(x,y)\in A$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Indicație: se procedează ca în rezolvarea problemei anterioare, ținând seama de definiția derivatei parțiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Deoarece

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^3}\right) = (0,0) \quad \text{și} \quad \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^3}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1/k^5}{2/k^6} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2} = \infty,$$

rezultă că $f$ este discontinuă în $(0,0)$. Pe de altă parte, dacă $v = (v_1, v_2)$ este o direcție arbitrară din $\mathbb{R}^2$, atunci

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0_2 + tv) - f(0_2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3 v_1^2 v_2}{t(t^6 v_1^6 + t^2 v_2^2)} = \frac{v_1^2}{v_2},$$

dacă $v_2 \neq 0$ și respectiv

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0_2 + tv) - f(0_2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1, 0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0,$$

dacă $v_2 = 0$. Prin urmare, $f$ este derivabilă în $0_2$ după orice direcție și

$$f'(0_2; v) = \begin{cases} v_1^2/v_2 & \text{dacă } v = (v_1, v_2), \text{ cu } v_2 \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } v = (v_1, 0). \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{11.}}$ Considerăm mulțimea $A := \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Atunci mulțimea $\mathbb{R}^2 \setminus A$ este deschisă, funcția $f$ este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2 \setminus A$, iar derivatele sale parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - y^3)^2}} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 - y^3)^2}}$$

sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Drept urmare, $f$ este diferențiabilă în toate punctele lui $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Studiem în continuare diferențiabilitatea lui $f$ în punctele lui $A$, adică în puncte de forma $(a,a)$, cu $a \in \mathbb{R}$. Verificăm mai întâi existența derivatelor parțiale în $(a,a)$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{f(x,a) - f(a,a)}{x - a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^3 - a^3}}{x - a} = \lim_{x\to a}\sqrt[3]{\frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)^3}} \\ &= \lim_{x\to a}\sqrt[3]{\frac{x^2 + ax + a^2}{(x-a)^2}} = \infty \end{aligned}$$

și analog

$$\begin{aligned}\lim_{y\to a}\frac{f(a,y)-f(a,a)}{y-a} &= \lim_{y\to a}\frac{\sqrt[3]{a^3-y^3}}{y-a}=\lim_{y\to a}\sqrt[3]{\frac{-(y-a)(y^2+ay+a^2)}{(y-a)^3}}\\ &= -\lim_{y\to a}\sqrt[3]{\frac{y^2+ay+a^2}{(y-a)^2}}=-\infty\end{aligned}$$

oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Prin urmare, $f$ nu este derivabilă parțial, deci nu este nici diferențiabilă în punctele de forma $(a,a)$, cu $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

În fine, mai avem de studiat diferențiabilitatea lui $f$ în punctul $(0,0)$. Deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

și

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$

rezultă că $f$ este derivabilă parțial în $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$. Trecem la etapa a II-a, adică la studiul limitei

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\omega(h_1,h_2),\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}\omega(h_1,h_2) &= \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{h_1^3-h_2^3}-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.\end{aligned}$$

Întrucât

$$\lim_{k\to\infty}\omega\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=0 \quad \text{și} \quad \lim_{k\to\infty}\omega\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)=\frac{\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{5}}\neq 0,$$

deducem că $\ell$ nu există, deci $f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$.

În concluzie, $f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus A$ și nu este diferențiabilă pe $A$.