Seminarul 4

1. Să se calculeze următoarele limite:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$;

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$;

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{xy}$;

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$;

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$;

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}$;

13) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}$;

14) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-\sin x\sin y}{xy(x^2+y^2)}$;

15) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1\cdots x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2}, \qquad n\in\mathbb{N};$

16) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{x_1\cdots x_n}, \qquad n,p\in\mathbb{N};$

17) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{1-\cos x_1\cdots\cos x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2};$

18) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1\cdots x_n-\sin x_1\cdots\sin x_n}{x_1\cdots x_n(x_1^2+\cdots+x_n^2)}.$

2. Fie B o submulțime închisă a lui $\mathbb{R}^n$ și $f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q : B\to\mathbb{R}$ funcții continue pe B. Să se demonstreze că mulțimea

$$A=\{\, x\in B \mid f_i(x)=0,\ i=1,\ldots,p,\ g_j(x)\le 0,\ j=1,\ldots,q\,\}$$

este închisă.

3. Fie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}^n$ şi fie B o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^m$. Să se demonstreze că mulţimea

$$f^{-1}(B):=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\in B\}$$

este deschisă în $\mathbb{R}^n$.

4. Fie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}^n$ şi fie B o submulţime închisă a lui $\mathbb{R}^m$. Să se demonstreze că mulţimea

$$f^{-1}(B):=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\in B\}$$

este închisă în $\mathbb{R}^n$.

5. Să se demonstreze că dacă $A\subseteq\mathbb{R}^n$ este o mulțime convexă, compactă, nevidă, iar $f:A\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe A, atunci $f(A)$ este un interval compact.

6. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție și fie $G_f=\{(x,f(x)) \mid x\in[a,b]\}$ graficul său. Să se demonstreze că f este continuă pe $[a,b]$ dacă și numai dacă G_f este o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^2$. Generalizare.

7. Conform teoremei lui Weierstrass, dacă $A\subseteq\mathbb{R}^n$ este o mulțime compactă, atunci orice funcție continuă $f:A\to\mathbb{R}$ este mărginită (și chiar își atinge marginile). Demonstrați reciproca: dacă A este o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că orice funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită, atunci A este compactă.

Berkeley 1987

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ 1) Avem

$$0 \leq \left| \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{xy} - \mathbf{0} \right| = \left(x^2 + y^2\right) \left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq x^2 + y^2,$$

de unde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{xy} = \mathbf{0}$, în baza teoremei cleștelui.

2) Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} y \cdot \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 2 \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 2.$$

3) Vom dovedi că limita nu există (în general, limita raportului a două polinoame omogene de același grad, în două sau mai multe variabile, nu există). Pentru aceasta vom folosi caracterizarea limitei cu ajutorul șirurilor (teorema lui Heine). Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Deoarece

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (0,0); \qquad \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

și

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, 0\right) = (0,0); \qquad \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1,$$

rezultă că limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

4) Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. Vom demonstra că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. În acest scop, vom folosi teorema cleștelui (este dealtfel

singurul instrument pe care îl avem la dispoziție; din păcate, nu există o variantă a regulii lui L'Hôpital pentru funcții de mai multe variabile). Avem

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y) - \mathbf{0}| &= \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}\,|y| \\ &\leq |x|+|y|, \end{aligned}$$

deoarece $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ și $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. În baza teoremei cleștelui, deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \mathbf{0}$.

5) Vom dovedi că limita nu există. Pentru aceasta vom folosi caracterizarea limitei cu ajutorul șirurilor (teorema lui Heine). Fie mulțimea

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$$

și fie funcția $f : A \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y) := \dfrac{x^3+y^3}{xy}$. Deoarece

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (0,0); \qquad \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k} = 0$$

și

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = (0,0); \qquad \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^6}}{\frac{1}{k^3}} = 1,$$

rezultă că limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

9) Avem

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty. \end{aligned}$$

10) Deoarece $x^4+y^4 \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2$, avem

$$0 \leq \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} \leq \frac{2e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} = 2\cdot\frac{\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} \quad \text{oricare ar fi } (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

Întrucât

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0,$$

deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} = 0.$

13) Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0.$$

Această egalitate poate fi verificată prin calcul, cu ajutorul regulii lui L'Hôpital, sau poate fi privită drept un caz particular al formulei lui Taylor cu restul în forma Peano. Definind $f(x) := \dfrac{\cos x - \left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, avem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 f(x) \quad \text{și} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Drept urmare, avem

$$\begin{aligned}
1-\cos x\cos y &= 1 - \left(1-\frac{x^2}{2}+x^2f(x)\right)\left(1-\frac{y^2}{2}+y^2f(y)\right)\\
&= \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^2y^2}{4} - x^2f(x)\left(1-\frac{y^2}{2}+y^2f(y)\right)\\
&\quad -y^2f(y)\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2f(x)\right) + x^2y^2f(x)f(y),
\end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2} &= \frac{1}{2}-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{4}-f(x)f(y)\right)\\ &\quad -\frac{x^2}{x^2+y^2}\,f(x)\left(1-\frac{y^2}{2}+y^2f(y)\right)\\ &\quad -\frac{y^2}{x^2+y^2}\,f(y)\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2f(x)\right).\end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}0\le\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{4}-f(x)f(y)\right)-\mathbf{0}\right| &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\,y^2\left|\frac{1}{4}-f(x)f(y)\right|\\ &\le y^2\left|\frac{1}{4}-f(x)f(y)\right|\end{aligned}$$

și $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, deducem că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{4}-f(x)f(y)\right)=\mathbf{0}.$$

Analog se arată că

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\,f(x)\left(1-\frac{y^2}{2}+y^2f(y)\right)\\ &=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}\,f(y)\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2f(x)\right)=0.\end{aligned}$$

În concluzie, avem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos x\cos y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$.

15) Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ definim $f_n:\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}\to\mathbb{R}$ prin

$$f_n(x_1,\ldots,x_n):=\frac{x_1\cdots x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

și respectiv $\ell_n:=\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} f_n(x_1,\ldots,x_n)$. Atunci $\ell_1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nu există. Procedând ca la 3), se arată (T) că nu există nici $\ell_2=\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)}\dfrac{x_1x_2}{x_2^2+x_2^2}$.

Vom dovedi în continuare că $\ell_n = 0$ oricare ar fi $n \geq 3$. Pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ avem

$$(1) \qquad 0 \leq |f_n(x_1, \dots, x_n) - \mathbf{0}| = \frac{|x_1| \cdots |x_n|}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

În baza inegalității dintre media geometrică și media pătratică a numerelor $|x_1|, \dots, |x_n|$, avem

$$\sqrt[n]{|x_1| \cdots |x_n|} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x_1| \cdots |x_n|}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq \frac{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^{n/2}}.$$

Combinând inegalitatea de mai sus cu (1), obținem

$$0 \leq |f_n(x_1, \dots, x_n) - \mathbf{0}| \leq \frac{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^{n/2}},$$

de unde $\ell_n = \mathbf{0}$ (în baza teoremei cleștelui).

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Fie (x_k) un șir convergent arbitrar de puncte din A și fie $x := \lim_{k\to\infty} x_k$. Pentru a dovedi că A este închisă, este suficient să demonstrăm că $x \in A$. Deoarece B este închisă, avem $x \in B$ $(*)$. Fie apoi $i \in \{1, \dots, p\}$ arbitrar. Cum $x_k \in A$, avem $f_i(x_k) = 0$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Făcând $k \to \infty$ și ținând seama că f_i este continuă în x, deducem că $f_i(x) = 0$ oricare ar fi $i \in \{1, \dots, p\}$ $(**)$. Analog se ajunge la concluzia că $g_j(x) \leq 0$ oricare ar fi $j \in \{1, \dots, q\}$ $(***)$. Din $(*)$, $(**)$ și $(***)$ conchidem că $x \in A$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Fie a un punct arbitrar din $f^{-1}(B)$. Atunci punctul $b := f(a)$ aparține lui B. Întrucât B este deschisă, există un $\varepsilon > 0$ astfel ca $B(b, \varepsilon) \subseteq B$. Pe de altă parte, din continuitatea lui f în a rezultă existența unui $\delta > 0$, cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ cu $\|x - a\| < \delta$ să avem

$$\|f(x) - b\| = \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) \subseteq B.$$

Rezultă de aici că $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$. Cum a a fost arbitrar în $f^{-1}(B)$, deducem că mulțimea $f^{-1}(B)$ este deschisă.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Temă. Se procedează ca în rezolvarea problemei $\boxed{\mathbf{2}}$. Mai precis, se arată că dacă (x_k) este un șir convergent arbitrar de puncte din $f^{-1}(B)$, iar x este limita șirului, atunci $x \in f^{-1}(B)$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Fie $m := \inf f(A)$ și respectiv $M := \sup f(A)$. Conform teoremei lui Weierstrass, există punctele $a, b \in A$ astfel ca $f(a) = m$ și $f(b) = M$. Evident, avem

$$f(A) \subseteq [m, M]. \tag{1}$$

Cum A este convexă, avem $\{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$. Prin urmare, funcția $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f((1-t)a + tb)$, este bine definită și continuă (fiind compusa a două funcții continue). Evident, avem $\operatorname{Im} g \subseteq f(A)$. Pe de altă parte, se știe că $\operatorname{Im} g$ este un interval. Cum $m = g(0) \in \operatorname{Im} g$ și $M = g(1) \in \operatorname{Im} g$, deducem că

$$[m, M] \subseteq \operatorname{Im} g \subseteq f(A). \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că $f(A) = [m, M]$.

$\boxed{\mathbf{6.}}$ *Necesitatea.* Presupunem că f este continuă pe $[a, b]$. Pentru a demonstra că G_f este compactă în $\mathbb{R}^2$, este suficient să arătăm că G_f este secvențial compactă. Fie (z_k) un șir arbitrar de puncte din G_f. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un punct $x_k \in [a, b]$ astfel ca $z_k = (x_k, f(x_k))$. Șirul (x_k) fiind mărginit, el posedă un subșir $(x_{k_j})_{j\geq 1}$, convergent către un punct $x^* \in [a, b]$. Din continuitatea lui f în x^* rezultă că $\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x^*)$. Drept urmare, avem

$$\lim_{j\to\infty} z_{k_j} = \lim_{j\to\infty} \left(x_{k_j}, f(x_{k_j}\right) = (x^*, f(x^*)) \in G_f.$$

Cu alte cuvinte, șirul (z_k) posedă subșirul (z_{k_j}), convergent către punctul $(x^*, f(x^*)) \in G_f$. În consecință, mulțimea G_f este secvențial compactă.

Suficiența. Admitem acum că mulțimea G_f este compactă în $\mathbb{R}^2$. Presupunem, prin absurd, că există un punct $x^* \in [a, b]$, în care f nu este continuă. Negând definiția continuității, deducem că există un $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$ există $x \in [a, b]$ astfel încât $|x - x^*| < \delta$ și $|f(x) - f(x^*)| \geq \varepsilon$. În particular, alegând $\delta = 1/k$, rezultă că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există un $x_k \in [a, b]$ astfel încât $|x_k - x^*| < 1/k$ și $|f(x_k) - f(x^*)| \geq \varepsilon$. Atunci avem $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Pe de altă parte, șirul (z_k), de termen general $z_k := (x_k, f(x_k))$, are termenii în mulțimea compactă G_f. Prin urmare, există un subșir (z_{k_j}) al lui (z_k) și există un punct $(x, f(x)) \in G_f$ astfel ca

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} z_{k_j} = (x, f(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{j\to\infty} (x_{k_j}, f(x_{k_j})) = (x, f(x)) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x \\ \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x). \end{cases}
\end{aligned}$$

Dar $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^*$, deoarece (x_{k_j}) este un subșir al șirului (x_k). Prin urmare, trebuie să avem $\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x^*)$. Dar această egalitate este în contradicție cu faptul că $|f(x_{k_j}) - f(x^*)| \geq \varepsilon$ oricare ar fi $j \in \mathbb{N}$. Contradicția obținută arată că f este continuă pe $[a, b]$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$, având proprietatea că orice funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită. Atunci, în particular, funcția $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$ este mărginită. Prin urmare, există un $M > 0$ cu proprietatea că $f(x) \leq M$, adică $\|x\| \leq M$ oricare ar fi $x \in A$, deci A este mărginită. Rămâne să arătăm că A este și închisă. Presupunând contrarul, ar exista un șir convergent (x_k), de puncte din A, cu proprietatea că punctul $x^* := \lim_{k\to\infty} x_k$ nu aparține lui A. Dar atunci funcția $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/\|x - x^*\|$ este continuă pe A și $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} 1/\|x_k - x^*\| = \infty$, deci f nu este mărginită pe A, în contradicție cu ipoteza.