

Seminarul 3

1. Fie (x_k) un șir convergent de puncte din $\mathbb{R}^n$ și $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Să se demonstreze că mulțimea $A := \{x\} \cup \{x_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ este compactă.
2. Să se demonstreze că mulțimea

$$A := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \right\}$$

este compactă în $\mathbb{R}$.

3. Să se demonstreze că dacă A este o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^n$, iar B este o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}^m$, atunci mulțimea $A \times B$ este compactă în $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.
4. Fiind date mulțimile $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, notăm

$$A + B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A \text{ și } \exists b \in B : x = a + b\}.$$

- a) Să se demonstreze că dacă una dintre mulțimile A și B este închisă, iar cealaltă este compactă, atunci mulțimea $A + B$ este închisă.
 - b) Dați exemplu de mulțimi închise A și B pentru care mulțimea $A + B$ nu este închisă.
5. Fie A și B submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}^n$ și fie

$$d(A, B) := \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

- a) Să se demonstreze că dacă $A = \{a\}$ și B este închisă, atunci există un $b \in B$ așa încât $d(A, B) = d(a, b)$.
- b) Să se demonstreze că dacă A este compactă și B este închisă, atunci există $a \in A$ și există $b \in B$ așa încât $d(A, B) = d(a, b)$.
- c) Arătați printr-un contraexemplu că afirmația de la b) nu rămâne adevărată în cazul când A și B sunt ambele închise dar niciuna compactă.

Berkeley 1978

6. Fiind dată mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și numărul real $r > 0$, notăm

$$B := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A : \|x - a\| = r \}.$$

a) Să se reprezinte grafic mulțimea B în cazul în care $r = 1$, iar $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este cercul cu centrul în $(0, 0)$ și de rază 2, respectiv segmentul care unește punctele $(0, 0)$ și $(1, 1)$.

b) Să se demonstreze că dacă A este închisă, atunci și B este închisă.

Berkeley 1989