Seminarul 2

1. Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$ și orice $r > 0$ are loc egalitatea $\operatorname{cl} B(a,r) = \bar{B}(a,r)$.

2. Să se demonstreze că pentru orice mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sunt adevărate următoarele relații:

1° $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{cl} A$;

2° $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

3° $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

4° $\operatorname{bd} A = (\operatorname{cl} A) \cap \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

5° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) = \operatorname{cl} A$;

6° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) \cup (\operatorname{ext} A) = \mathbb{R}^n$;

7° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;

8° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$;

9° $(\operatorname{ext} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;

10° $\operatorname{cl} A = A \cup A'$.

3. Să se demonstreze că pentru orice mulțimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ au loc următoarele incluziuni:

$$\operatorname{int}(A \setminus B) \subseteq (\operatorname{int} A) \setminus (\operatorname{int} B) \qquad \text{și} \qquad (\operatorname{cl} A) \setminus (\operatorname{cl} B) \subseteq \operatorname{cl}(A \setminus B).$$

Să se dea exemple de mulțimi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru care incluziunile de mai sus sunt stricte.

4. Fiind date mulțimile $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, să se demonstreze că:

a) Dacă $A \cup B = \mathbb{R}^n$, atunci $\big(\operatorname{cl} A\big) \cup \big(\operatorname{int} B\big) = \mathbb{R}^n$.

b) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $\big(\operatorname{cl} A\big) \cap \big(\operatorname{int} B\big) = \emptyset$.

5. Să se demonstreze că pentru orice mulțimi $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\mathrm{cl}(A_1 \cup A_2) = (\mathrm{cl}\, A_1) \cup (\mathrm{cl}\, A_2).$$

Este adevărat că pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{cl}\, A_i \ ?$$

6. Să se demonstreze că pentru orice mulțimi $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cup A_2'.$$

Este adevărat că pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i' \ ?$$

7. Fie (x_k) și (y_k) șiruri convergente de puncte din $\mathbb{R}^n$ și fie $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, $y := \lim\limits_{k\to\infty} y_k$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = d(x, y)$.

b) Să se deducă apoi că $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$.

8. Să se determine

$$\lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{k \text{ radicali}}, \ \sum_{j=1}^{k} \frac{b(j)}{j(j+1)} \right),$$

unde $b(j)$ este numărul cifrelor 1 din reprezentarea binară a lui j (de exemplu, $b(6) = b(110_2) = 2$, $b(8) = b(1000_2) = 1$).

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție aditivă, adică o funcție cu proprietatea

$$\forall \ \ x, y \in \mathbb{R} \ : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

și fie

$$G_f := \{ \ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}$$

graficul lui f. Să se demonstreze că:

a) Dacă f este continuă în cel puțin un punct, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Dacă f este continuă în cel puțin un punct (deci pe $\mathbb{R}$), atunci $f(x) = cx$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde $c = f(1)$.

c) Dacă f este discontinuă pe $\mathbb{R}$, atunci $\operatorname{cl} G_f = \mathbb{R}^2$, adică G_f este o submulțime densă a lui $\mathbb{R}^2$.