Seminarul 10

1. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A x\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă

$$A := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}x-3y\geq 0,\ 1\leq 4(x^2+y^2)\leq 4\,\}.$$

2. Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{x^2}{x^2+3y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă

$$A := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq 3,\ x+y\geq 0,\ y\geq 0\,\}.$$

3. (Temă) Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \frac{y}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă

$$A := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x+y\geq 0,\ y\geq 0\,\}.$$

4. Fie $a>0$ și $A := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2ax\,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. Fie $a>0$ și $A := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2ax,\ x^2+y^2\leq 2ay\,\}$. Să se calculeze

$$\iint_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

7. (Temă) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{1/2}\left(\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

8. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dacă

$$A := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\,\}.$$

9. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dacă

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

10. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{z}{(x^2+y^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dacă

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

11. Să se calculeze $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dacă

$$A := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\,\}.$$

12. Să se determine aria mulțimii plane A, mărginite de parabolele de ecuații $y^2 = ax$ și $y^2 = bx$ $(0 < a < b)$ și de hiperbolele de ecuații $xy = p$ și $xy = q$ $(0 < p < q)$.

13. **(Temă)** Să se determine aria mulțimii plane A, mărginite de parabolele de ecuații $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, unde $0 < a < b$, $0 < p < q$.

14. **(Temă)** Să se calculeze $\displaystyle\iint_A \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă A este mulțimea din plan mărginită de dreptele de ecuații $x+y=0$, $x+y=1$, $y=-1$ și $y=1$.

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ Trecem la coordonate polare: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, unde (a se vedea figura 1)

$$\rho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{și} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right] \quad \text{sau} \quad \theta \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

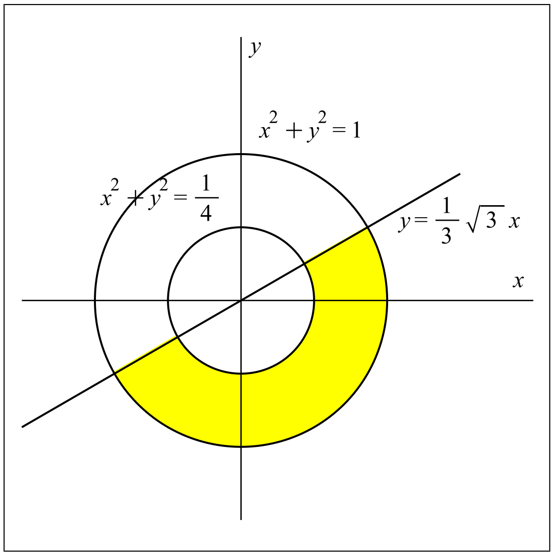

Figura 1:

Obținem

$$\begin{aligned}
&\iint_A x\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad = \int_{\rho=1/2}^{\rho=1}\int_{\theta=-5\pi/6}^{\theta=\pi/6} \rho\cos\theta\sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&\quad = \int_{\rho=1/2}^{\rho=1}\int_{\theta=-5\pi/6}^{\theta=\pi/6} \rho^2\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&\quad = \left(\int_{1/2}^{1}\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_{-5\pi/6}^{\pi/6}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&\quad = \frac{\sqrt{3}}{64}+\frac{\pi}{24}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Trecem la coordonate polare: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, unde $\rho \in [1, \sqrt{3}]$ și $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ (a se vedea figura 2).

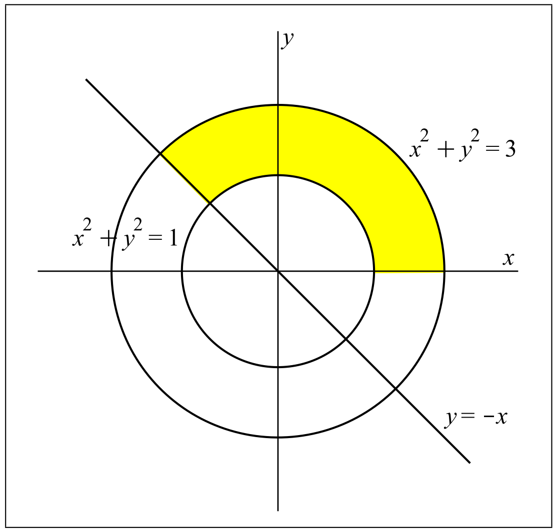

Figura 2:

Obținem

$$
\begin{aligned}
I &:= \iint_A \frac{x^2}{x^2+3y^2}\,dxdy = \int_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=3\pi/4} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\sin^2\theta}\cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=3\pi/4} \rho\,\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_1^{\sqrt{3}} \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{3\pi/4} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right).
\end{aligned}
$$

Pentru calculul integralei în raport cu θ, facem schimbarea de variabilă $\operatorname{ctg}\theta = t$. Avem

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{0+0}^{3\pi/4} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\infty}^{-1} \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{3}{t^2+1}} \left(-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{3}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_{-1}^{\infty} = \frac{\pi}{24}\,(8\sqrt{3} - 9).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Răspuns: $\dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{1}{4}\ln(2 - \sqrt{2})$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ ***Metoda 1.*** Trecem la coordonate polare, ținând seama că A este un disc de rază a, cu centrul în punctul $(a, 0)$ (a se vedea figura 3):

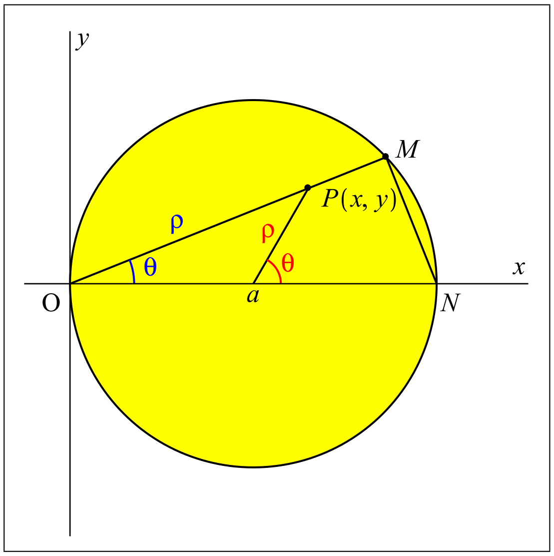

Figura 3:

$$
\begin{aligned}
x &= a + \rho\cos\theta, & \qquad \rho &\in [0, a],\\
y &= \rho\sin\theta, & \qquad \theta &\in [0, 2\pi].
\end{aligned}
$$

Determinantul Jacobi al transformării este ρ. Obținem

$$
\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\rho=0}^{\rho=a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{(a+\rho\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{\rho=0}^{\rho=a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\sqrt{a^2+\rho^2+2a\rho\cos\theta}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Această integrală dublă nu pare deloc promițătoare. Niciuna dintre integralele iterate nu este ușor de calculat.

ABANDON DU TRAVAIL.

Metoda 2. Facem trecerea uzuală la coordonate polare:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \qquad & \theta &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ y &= \rho\sin\theta, \qquad & \rho &\in [0, 2a\cos\theta]. \end{aligned}$$

În acest caz ρ nu mai reprezintă distanța de la P la centrul discului, ci distanța OP, de la P la origine. Valoarea maximă pe care o poate lua ρ pentru unghiul θ fixat este OM. Lungimea segmentului $[OM]$ se determină ușor din triunghiul dreptunghic OMN: $OM = ON\cos\theta = 2a\cos\theta$. Avem

$$\begin{aligned} \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta} \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{32a^3}{9}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Trecem la coordonate polare: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Avem $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (a se vedea figura 4).

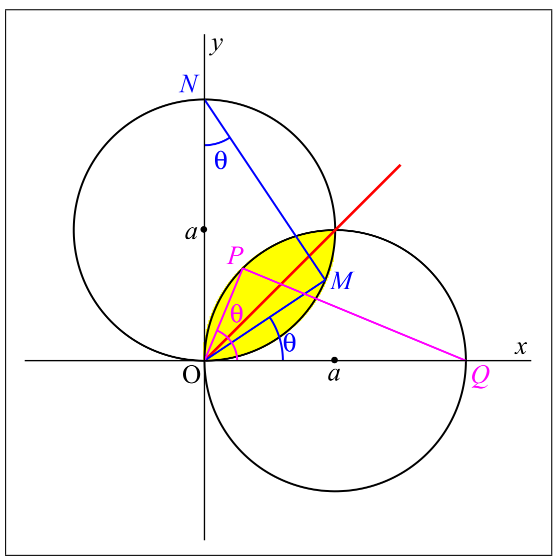

Figura 4:

Dacă $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, atunci valoarea maximă pe care o poate lua ρ este OM. Lungimea segmentului $[OM]$ se determină ușor din triunghiul dreptunghic

OMN: $OM = ON \sin\theta = 2a\sin\theta$. Dacă însă $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, atunci valoarea maximă pe care o poate lua ρ este OP. Lungimea segmentului $[OP]$ se determină ușor din triunghiul dreptunghic OPQ: $OP = OQ\cos\theta = 2a\cos\theta$. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} &\rho \in [0, 2a\sin\theta], \quad \text{dacă } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ &\rho \in [0, 2a\cos\theta], \quad \text{dacă } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabile (trecerea la coordonate polare), obținem

$$\begin{aligned} &\iint_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2a\sin\theta} \rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta} \rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\ &\quad = 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta + 4a^4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 8a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &\quad = \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)a^4. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Fie $I := \displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$. Integrala iterată I provine din calculul integralei duble (cu care este egală dealtfel) $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\mid\; 0\le x\le 2,\, 0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\right\}.$$

Curba de ecuație $y=\sqrt{2x-x^2}$ are drept imagine semicercul situat deasupra axei Ox al cercului $y^2 = 2x - x^2 \iff (x-1)^2+y^2 = 1$. Prin urmare, A este mulțimea plană mărginită de axa Ox și de semicercul amintit mai sus. Procedând ca în rezolvarea problemei $\boxed{\mathbf{4}}$, se obține $I = 16/9$.

$\boxed{\mathbf{7.}}$ Răspuns: $\dfrac{\pi}{18}$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Notăm $I := \displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Mulțimea A este bila unitate din $\mathbb{R}^3$. Proiecția lui A pe planul Oxy este discul

$$A_0 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2+y^2\le 1\}.$$

Încercând să calculăm integrala dublă cu ajutorul teoremei lui Fubini (adică trecând la integrale iterate), obținem

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{A_0} \left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} \ln\left(z-2+\sqrt{(z-2)^2+x^2+y^2} \right) \Bigg|_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} \ln\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-2+\sqrt{5-4\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad - \iint_{A_0} \ln\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}-2+\sqrt{5+4\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

GROAZNIC ! (cine nu crede, se poate convinge încercând să continue calculele)

De aceea, vom calcula integrala triplă nu cu teorema lui Fubini, ci cu ajutorul coordonatelor sferice (a se vedea figura 5).
Coordonatele sferice ale punctului $P(x, y, z)$ sunt distanța ρ de la P la origine, unghiul polar θ al proiecției lui P pe planul Oxy și unghiul φ, format de OP cu direcția pozitivă a axei Oz. Legătura dintre coordonatele carteziene și cele sferice este următoarea (a se vedea figura 5):

$$
\begin{aligned}
x &= OQ\cos\theta = PR\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\
y &= OQ\sin\theta = PR\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\
z &= OP\cos\varphi = \rho\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Determinantul Jacobi al transformării este

$$
\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}
$$
$$
= \rho^2\sin\varphi.
$$

Atunci când punctul P parcurge bila unitate din $\mathbb{R}^3$, avem

$$
\rho \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0,2\pi].
$$

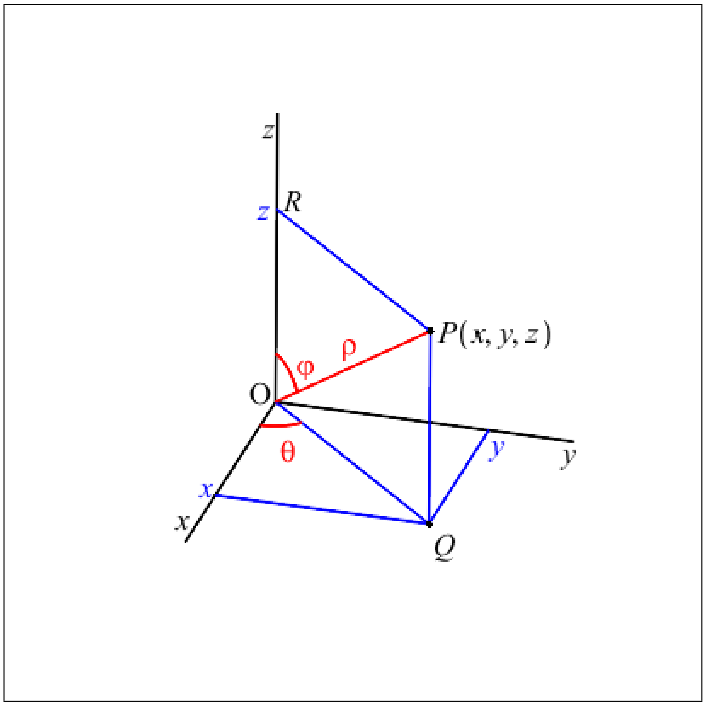

Figura 5:

Făcând schimbarea de variabilă, obținem

$$I = \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4}} \,\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$
$$= \left(\int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4}} \,\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right)$$
$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4}} \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho.$$

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4} = t$. Atunci

$$\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4 = t^2 \quad \Rightarrow \quad \rho\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\, t \,\mathrm{d}t.$$

Avem

$$I = 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \left(\int_{t=2-\rho}^{t=2+\rho} \frac{\rho}{t} \cdot \frac{1}{2}\, t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\rho = \pi \int_0^1 2\rho^2 \,\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Notăm $I := \displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Metoda 1. Proiecția lui A pe planul Oxy este discul

$$A_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2+y^2 \le 1\}.$$

Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{A_0} \left(\int_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} \ln\left(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2+3}\right) \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} \ln\left(2+\sqrt{1-x^2-y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{A_0} \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+3\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Cele două integrale duble de mai sus se calculează destul de ușor prin trecere la coordonate polare **(Temă)**.

Metoda 2. Trecem la coordonate sferice

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

unde $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Obținem

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+3}}\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+3}}\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) \\
&= 2\pi\left(1 - \frac{3}{4}\ln 3\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Notăm $I := \displaystyle\iiint_A \frac{z}{(x^2+y^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Metoda 1. Proiecția lui A pe planul Oxy este discul

$$A_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2+y^2 \le 1\}.$$

Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{A_0} \left(\int_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{(x^2+y^2+1)^2} \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} \cdot \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \iint_{A_0} \frac{1-x^2-y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Integrala dublă de mai sus se calculează ușor prin trecere la coordonate polare **(Temă)**.

Metoda 2. Trecând la coordonate sferice, avem

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\rho^3 \sin\varphi \cos\varphi}{(\rho^2 \sin^2\varphi + 1)^2} \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3 \sin\varphi \cos\varphi}{(\rho^2 \sin^2\varphi + 1)^2} \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \\
&= 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} \cdot \frac{2\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(\rho^2 \sin^2\varphi + 1)^2} \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

Făcând schimbarea de variabilă $\rho^2 \sin^2\varphi + 1 = t$, avem $2\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$, deci

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \left(\int_{t=1}^{t=\rho^2+1} \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right) \mathrm{d}\rho = \pi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \left. -\frac{\rho}{t} \right|_{t=1}^{t=\rho^2+1} \mathrm{d}\rho \\
&= \pi \int_0^1 \left(\rho - \frac{\rho}{\rho^2+1} \right) \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}(1 - \ln 2).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{11.}}$ Notăm $I := \displaystyle\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Metoda 1. Proiecția lui A pe planul Oxy este discul unitate închis A_0

din $\mathbb{R}^2$. Aplicând teorema lui Fubini, avem

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{A_0} \left(\int_{z=0}^{z=2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(3-z)^2+x^2+y^2}} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} -\ln\left(3-z+\sqrt{(3-z)^2+x^2+y^2}\right) \Bigg|_{z=0}^{z=2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A_0} \left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Pentru calculul integralei duble, trecem la coordonate polare. Obținem

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\ln\left(\sqrt{\rho^2+9}+3\right) - \ln\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right) \right) \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 \rho \ln\left(\sqrt{\rho^2+9}+3\right) \mathrm{d}\rho - \int_0^1 \rho \ln\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right) \mathrm{d}\rho \right).
\end{aligned}$$

Făcând schimbările de variabilă $\sqrt{\rho^2+9}=t$ și respectiv $\sqrt{\rho^2+1}=t$, găsim

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \left(\int_3^{\sqrt{10}} t\ln(t+3)\,\mathrm{d}t - \int_1^{\sqrt{2}} t\ln(t+1)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{2}-8}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

Metoda 2. Trecem la coordonate cilindrice. Coordonatele cilindrice ale unui punct $P(x,y,z)$ sunt distanța ρ de la P la axa Oz, unghiul polar θ al proiecției Q a lui P pe planul Oxy și cota z a lui P (cota z este coordonată atât în sistemul cartezian, cât și în cel cilindric). Legătura dintre coordonatele carteziene și cele cilindrice este (a se vedea figura 6)

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad z=z.$$

Determinantul Jacobi al transformării este

$$\begin{aligned}
\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \rho.
\end{aligned}$$

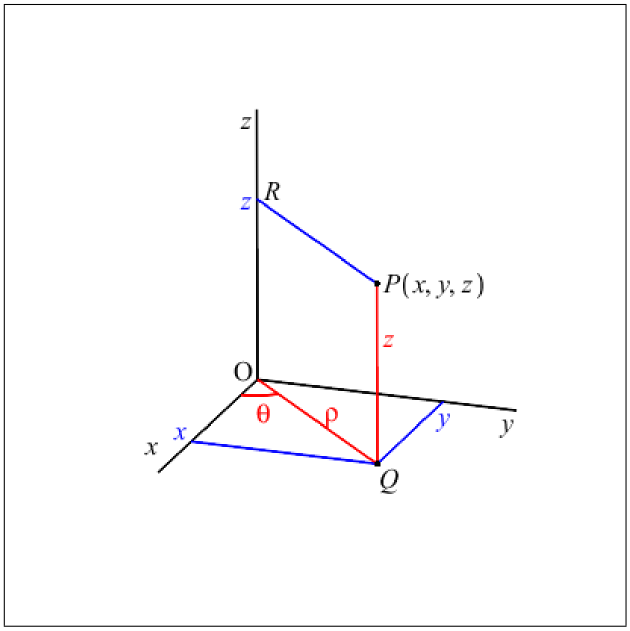

Figura 6:

Atunci când punctul P parcurge cilindrul A, avem

$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi], \quad z \in [0,2].$$

Făcând schimbarea de variabilă, obținem

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\rho=0}^{\rho=1}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=0}^{z=2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(3-z)^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\rho=0}^{\rho=1}\int_{z=0}^{z=2}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(3-z)^2}}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\right) \\
&= 2\pi\int_{z=0}^{z=2}\left(\int_{\rho=0}^{\rho=1}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(3-z)^2}}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_{z=0}^{z=2}\sqrt{\rho^2+(3-z)^2}\,\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^2\left(\sqrt{(3-z)^2+1}-(3-z)\right)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă $3 - z = t$, obținem

$$I = 2\pi \int_1^3 \left(\sqrt{t^2+1} - t\right) \mathrm{d}t = 2\pi \left(\frac{3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3 + \sqrt{10}}{1 + \sqrt{2}} \right).$$

$\boxed{\textbf{12.}}$ Notăm cu $\mathcal{A}(A)$ aria mulțimii A. Atunci avem $\mathcal{A}(A) = \iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Pentru calculul integralei duble, facem schimbarea de variabile definită de (a se vedea figura 7)

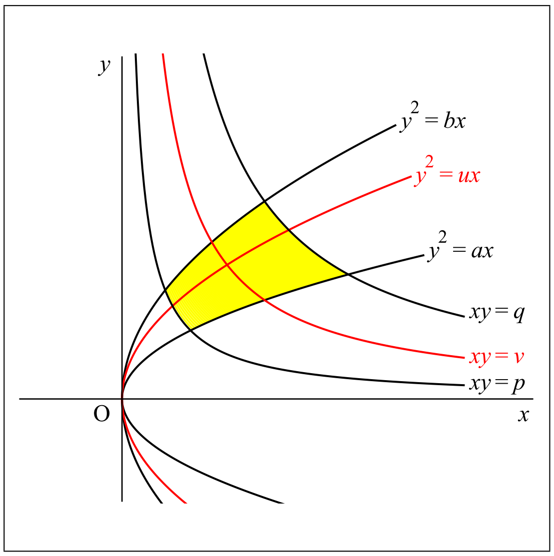

Figura 7:

$$\begin{cases} y^2 = ux \\ xy = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{-1/3}v^{2/3}, & u \in [a,b], \\ y = u^{1/3}v^{1/3}, & v \in [p,q]. \end{cases}$$

Determinantul Jacobi al transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\, u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}\, u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}\, u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}\, u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}\,.$$

Avem

$$\mathcal{A}(A) = \int_{u=a}^{u=b} \int_{v=p}^{v=q} \frac{1}{3u}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{q-p}{3}\, \ln \frac{b}{a}\,.$$