Seminarul 1

1. Fie $a = (3,\ -2,\ -4) \in \mathbb{R}^3$ și $b = (8,\ 6,\ 3) \in \mathbb{R}^3$. Să se determine $a+b$, $a-b$, $-3a+b$, $\langle a,\ b\rangle$, $\|a\|$, $\|b\|$, $d(a,b)$.

2. Să se demonstreze inegalitatea lui Cauchy-Buneakovski-Schwarz:

$$\forall \ \ x, y \in \mathbb{R}^n \ : \qquad |\langle x,\ y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\ x\rangle}\sqrt{\langle y,\ y\rangle}.$$

3. Să se demonstreze identitatea paralelogramului:

$$\forall \ \ x, y \in \mathbb{R}^n \ : \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

4. Fiind date numerele reale $p, q > 1$, cu proprietatea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, să se demonstreze că:

1° Are loc inegalitatea lui Young

$$\forall \ \ a, b \in [0, \infty[\ : \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2° Are loc inegalitatea lui Hölder

$$\forall \ \ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty[\ : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

5. Fiind dat numărul real $p \geq 1$, să se demonstreze că are loc inegalitatea lui Minkowski

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

oricare ar fi $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty)$.

6. Fiind dat numărul real $p \geq 1$, să se arate că funcția $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, definită prin

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este o normă, numită *p-norma* pe $\mathbb{R}^n$.

7. Fie X un spațiu liniar real și $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ o normă pe X. Se spune că norma $\|\cdot\|$ provine dintr-un produs scalar dacă există un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pe X, cu proprietatea $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pentru orice $x \in X$. Să se demonstreze că p-norma $\|\cdot\|_p$ pe $\mathbb{R}^n$, unde $p \geq 1$ și $n \geq 2$, provine dintr-un produs scalar dacă și numai dacă $p = 2$.

8. Să se demonstreze că funcția $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, definită prin

$$\|x\|_\infty := \max\{\,|x_1|,\ldots,|x_n|\,\} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este o normă, numită *norma Cebîșev* pe $\mathbb{R}^n$. Să se arate că norma Cebîșev nu provine dintr-un produs scalar.

9. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ are loc egalitatea

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$