Rangul unei matrice

Definiția 1. Notăm cu $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, considerăm funcția $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, definită prin $\varphi_A(x) := Ax$, oricare ar fi $x \in \mathbb{K}^n$ (cu convenția uzuală că spațiul $\mathbb{K}^p$ se identifică cu spațiul $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$). Se constată imediat că φ_A este o aplicație liniară, numită *aplicația liniară generată de matricea* A. De asemenea, un calcul simplu arată că dacă $\{e_1, \dots, e_n\}$ este baza canonică în $\mathbb{K}^n$, atunci

$$\varphi_A(e_j) = c_A^j \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, \dots, n\},$$

unde $c_A^1, \dots, c_A^n \in \mathbb{K}^m$ sunt coloanele matricei A.

Fiind dat un punct arbitrar $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, avem

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &= \varphi_A(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1\varphi_A(e_1) + \cdots + x_n\varphi_A(e_n) \\ &= x_1c_A^1 + \cdots + x_nc_A^n, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varphi_A) &= \{\, \varphi_A(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{\, x_1c_A^1 + \cdots + x_nc_A^n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\} \qquad (1) \\ &= \operatorname{lin}\{c_A^1, \dots, c_A^n\}. \end{aligned}$$

Fie matricile $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ și fie $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ și $\varphi_B : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ aplicațiile liniare generate de A și respectiv B. Atunci aplicația liniară $\varphi_{AB} : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^m$, generată de matricea $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, satisface pentru orice $x \in \mathbb{K}^p$ egalitatea

$$\varphi_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = \varphi_A\big(\varphi_B(x)\big) = \big(\varphi_A \circ \varphi_B\big)(x).$$

Drept urmare, avem

$$\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B.$$

Definiția 2 (rangul unei matrice)**.** Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Se numește *rangul matricei* A numărul maxim de coloane liniar independente ale lui A, adică dimensiunea subspațiului liniar $\operatorname{lin}\{c_A^1, \dots, c_A^n\}$ al lui $\mathbb{K}^m$. Rezultă din această definiție că

$$\operatorname{rang}(A) \le \min\{m, n\}.$$

De asemenea, în baza relației (1), avem

$$\text{rang}\,(A) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}\,(\varphi_A),$$

unde φ_A este aplicația liniară generată de matricea A.

Teorema 3 (formula dimensiunilor)**.** *Fie X și Y spații liniare peste același $\mathbb{K}$, dintre care X este finit dimensional și fie $\varphi : X \to Y$ o aplicație liniară. Atunci are loc egalitatea*

$$\dim_{\mathbb{K}} X = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}\,(\varphi) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}\,(\varphi).$$

Teorema 4. *Pentru orice matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ are loc inegalitatea*

$$\text{rang}\,(AB) \leq \min\{\text{rang}\,(A), \text{rang}\,(B)\}.$$

În particular, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ și A este inversabilă, atunci

$$\text{rang}\,(AB) = \text{rang}\,(B) = \text{rang}\,(BA).$$

Teorema 5 (inegalitatea lui Ferdinand Georg Frobenius)**.** *Pentru orice matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ și $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ are loc inegalitatea*

$$\text{rang}\,(AB) + \text{rang}\,(BC) \leq \text{rang}\,(B) + \text{rang}\,(ABC).$$

Demonstrație. Fie $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\varphi_B : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ și $\varphi_C : \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ aplicațiile liniare generate de A, B și respectiv C. Notăm

$$X := \text{Im}\,(\varphi_B) = \varphi_B(\mathbb{K}^p), \quad Y := \text{Im}\,(\varphi_C) = \varphi_C(\mathbb{K}^q)$$

și respectiv $Z := \varphi_B(Y)$. Atunci X este un subspațiu liniar al lui $\mathbb{K}^n$, Y este un subspațiu liniar al lui $\mathbb{K}^p$, iar Z este un subspațiu liniar al lui X. Avem:

$$\begin{aligned}
\text{rang}\,(B) &= \dim_{\mathbb{K}} X \\
\text{rang}\,(AB) &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}\,(\varphi_{AB}) = \dim_{\mathbb{K}} \varphi_A(\varphi_B(\mathbb{K}^p)) = \dim_{\mathbb{K}} \varphi_A(X), \\
\text{rang}\,(BC) &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}\,(\varphi_{BC}) = \dim_{\mathbb{K}} \varphi_B(\varphi_C(\mathbb{K}^q)) = \dim_{\mathbb{K}} \varphi_B(Y) \\
&= \dim_{\mathbb{K}} Z, \\
\text{rang}\,(ABC) &= \dim_{\mathbb{K}} \varphi_A(Z).
\end{aligned}$$

Considerăm restricțiile $\varphi_A : X \to \mathbb{K}^m$ și $\varphi_A : Z \to \mathbb{K}^m$. Scriind formula dimensiunilor pentru cele două restricții, obținem

$$\dim_{\mathbb{K}} X = \dim_{\mathbb{K}} \varphi_A(X) + \dim_{\mathbb{K}} (\text{Ker}\,(\varphi_A) \cap X)$$

și
$$\dim_{\mathbb{K}} Z = \dim_{\mathbb{K}} \varphi_A(Z) + \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi_A) \cap Z),$$
adică
$$\mathrm{rang}\,(B) - \mathrm{rang}\,(AB) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi_A) \cap X)$$
și
$$\mathrm{rang}\,(BC) - \mathrm{rang}\,(ABC) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi_A) \cap Z).$$
Cum Z este subspațiu liniar al lui X, avem
$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi_A) \cap Z) \leq \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi_A) \cap X),$$
deci $\mathrm{rang}\,(BC) - \mathrm{rang}\,(ABC) \leq \mathrm{rang}\,(B) - \mathrm{rang}\,(AB)$, inegalitate echivalentă cu cea din enunț. □

Observația 6. În cazul particular când $n = p$ și $B = I_n$, inegalitatea lui Frobenius devine
$$\mathrm{rang}\,(A) + \mathrm{rang}\,(C) \leq n + \mathrm{rang}\,(AC),$$
adică
$$\mathrm{rang}\,(A) + \mathrm{rang}\,(C) - n \leq \mathrm{rang}\,(AC).$$
Această ultimă inegalitate este cunoscută în literatura matematică drept *inegalitatea lui Sylvester*.

Consecința 7. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *și* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *atunci*
$$\mathrm{rang}\,(A) + \mathrm{rang}\,(B) - n \leq \mathrm{rang}\,(AB) \leq \min\{\mathrm{rang}\,(A), \mathrm{rang}\,(B)\}.$$

Teorema 8. *Următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *și* $r := \mathrm{rang}\,(A)$, *atunci* A *se poate reprezenta sub forma* $A = PJ_rQ$, *cu* $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ *și* $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *matrici inversabile, iar* $Jr := \begin{pmatrix} \boxed{I_r} & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

2° *Două matrici* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *au același rang dacă și numai dacă există matrici inversabile* $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ *și* $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *în așa fel încât să avem* $A = PBQ$.

Probleme

$\boxed{\textbf{1.}}$ Fie $n > k \geq 1$ numere întregi și fie $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici având toate rangul $n-1$. Să se demonstreze că $A_1 \cdots A_k \neq O_n$.

Concursul Vojtěch Jarník, categoria a II-a, 2011/1

$\boxed{\textbf{2.}}$ Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A) \leq 1$ dacă și numai dacă există $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}$ și $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ așa încât $a_{ij} = p_i q_j$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$ și orice $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Olimpiada națională, 1986/3

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că $\operatorname{rang} A \leq 1$. Să se demonstreze că $A^2 = (\operatorname{tr} A) \cdot A$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea $\operatorname{rang}(AB - BA) = 1$. Să se demonstreze că $(AB - BA)^2 = O_n$.

IMC 2000

$\boxed{\textbf{5.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\det A = 0$ și fie A_* adjuncta clasică a lui A. Să se demonstreze că există $\lambda \in \mathbb{C}$ în așa fel încât $A_*^2 = \lambda A_*$.

S. Rădulescu, P. Alexandrescu, Olimpiada jud. București, 1999/4

$\boxed{\textbf{6.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice astfel ca $\det A = 0$ și fie A_* adjuncta sa clasică. Demonstrați că $A_*^2 = (\operatorname{tr} A_*)A_*$.

M. Ionescu, Olimpiada județeană, 2017/4

$\boxed{\textbf{7.}}$ Fie $n \geq 2$ un număr natural, fie $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice idempotentă și fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $AB - BA = C_*$. Să se demonstreze că $(AB - BA)^2 = O_n$.

Olimpiada națională, 2019/1

$\boxed{\textbf{8.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și fie A_* adjuncta clasică a lui A. Demonstrați că dacă există un număr întreg $m \geq 1$ astfel încât $A_*^m = O_n$, atunci $A_*^2 = O_n$.

M. Ionescu, Olimpiada națională, 2006/1

$\boxed{\textbf{9.}}$ Fie $n \geq 2$ un număr întreg, fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice neinversabilă și fie A_* adjuncta clasică a lui A. Să se demonstreze că $\operatorname{tr} A_* \neq -1$ dacă și numai dacă matricea $I_n + A_*$ este inversabilă.

Olimpiada națională, 2013/1

$\boxed{\textbf{10.}}$ Fie n un număr natural impar și fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $(A-B)^2 = O_n$. Să se demonstreze că $\det(AB - BA) = 0$.

Olimpiada județeană, 2019/3

$\boxed{\textbf{11.}}$ Să se determine toate funcțiile surjective $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, \ldots, n\}$, cu proprietatea

$$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\} \quad \text{pentru orice } X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

V. Pop, SEEMOUS 2008/3

$\boxed{\textbf{12.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și fie $a_k := \operatorname{rang}\left(A^{k+1}\right) - \operatorname{rang}\left(A^k\right)$ pentru orice număr întreg $k \geq 0$. Să se demonstreze că șirul $(a_k)_{k \geq 0}$ este crescător.

Concursul studențesc Traian Lalescu, faza națională, 2011

$\boxed{\textbf{13.}}$ Să se demonstreze că:

a) Pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(A^{n+1})$.

b) Există matrici $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) \neq \operatorname{rang}\left(B^n\right)$.

c) Toate matricile $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) \neq \operatorname{rang}\left(B^n\right)$ sunt asemenea între ele.

Concursul Traian Lalescu, UTCN, profil electric, anul I, 2008

$\boxed{\textbf{14.}}$ Pornind de la o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ale cărei linii sunt $L_1, \ldots, L_n$, construim matricile $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu liniile $O, L_2, \ldots, L_n$ și $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu liniile $L_2, \ldots, L_n, O$, unde O desemnează o linie cu toate elementele nule. Notând $D = A^{-1}B$ și $E = A^{-1}C$, să se demonstreze că

$$\operatorname{rang}(D) = \operatorname{rang}(D^2) = \cdots = \operatorname{rang}(D^n)$$

și

$$\operatorname{rang}(E) > \operatorname{rang}(E^2) > \cdots > \operatorname{rang}(E^n).$$

V. Pop, Olimpiada națională, 2016/2

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ Pe baza inegalității lui Sylvester (consecința 7), se demonstrează ușor, prin inducție după k, că pentru orice $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc inegalitatea

$$\operatorname{rang}(A_1 \cdots A_k) \geq \operatorname{rang} A_1 + \cdots + \operatorname{rang} A_k - (k-1)n.$$

Presupunând, prin absurd, că $A_1 \cdots A_k = O_n$, ar rezulta atunci că

$$0 \geq \operatorname{rang} A_1 + \cdots + \operatorname{rang} A_k - (k-1)n = k(n-1) - (k-1)n = n - k,$$

de unde $n \leq k$, în contradicție cu ipoteza.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Dacă $\operatorname{rang}(A) = 0$, atunci $A = O_{m,n}$ și putem alege $p_i = q_j = 0$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$ și orice $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dacă $\operatorname{rang}(A) = 1$, atunci teorema 8 asigură existența a două matrici inversabile $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ și $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ astfel încât

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Fie $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}$ elementele de pe prima coloană a lui P, iar $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ elementele de pe prima linie a lui Q. Se constată imediat că $a_{ij} = p_i q_j$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$ și orice $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Reciproc, dacă există $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}$ și $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ așa încât $a_{ij} = p_i q_j$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$ și orice $j \in \{1, \ldots, n\}$, atunci se verifică ușor că orice minor de ordinul 2 al lui A este nul, deci $\operatorname{rang}(A) \leq 1$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Conform problemei **2**, există $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ și există $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$, astfel ca elementul de pe poziția (i, j) din matricea A să fie egal cu $p_i q_j$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Drept urmare, elementul de pe poziția (i, j) în matricea A^2 este egal cu

$$\sum_{k=1}^{n} (p_i q_k)(p_k q_j) = p_i q_j \sum_{k=1}^{n} p_k q_k = p_i q_j \operatorname{tr} A,$$

deci $A^2 = (\operatorname{tr} A) \cdot A$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Această problemă este consecință imediată a problemei **3**, ținând seama că $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Conform ipotezei, avem $AA_* = (\det A) I_n = O_n$ și $\operatorname{rang} A \leq n - 1$. Dacă $\operatorname{rang} A \leq n - 2$, atunci toți minorii de ordin $n - 1$ ai lui A sunt nuli, deci $A_* = O_n$ și concluzia are loc alegând $\lambda = 0$. Admitem în continuare că $\operatorname{rang} A = n - 1$. Conform inegalității lui Sylvester, avem atunci

$$0 = \operatorname{rang}(AA_*) \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} A_* - n = \operatorname{rang} A_* - 1,$$

de unde $\operatorname{rang} A_* \le 1$. Notând $\lambda := \operatorname{tr} A_*$, în baza problemei **3** deducem că $A_*^2 = \lambda A_*$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ A se vedea rezolvarea problemei precedente.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Matricea C trebuie să fie singulară. În adevăr, dacă C ar fi inversabilă, atunci din $C^2 = C$ ar rezulta $C = I_n$, deci $C_* = I_n$. Dar atunci am avea $n = \operatorname{tr} C_* = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, ceea ce este absurd. Prin urmare, $\det C = 0$. Cum $\operatorname{tr} C_* = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, în baza rezultatului din problema **6** deducem că $(AB - BA)^2 = C_*^2 = O_n$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Fie $d := \det A$. Trecând la determinanți în egalitatea $AA_* = dI_n$, găsim $d^n = (\det A)(\det A_*) = 0$, deoarece $\det A_* = 0$. Drept urmare, avem $d = 0$. Aplicând rezultatul problemei **6**, rezultă că $A_*^2 = (\operatorname{tr} A_*)A_* = O_n$, întrucât $\operatorname{tr} A_* = 0$ (A_* fiind nilpotentă, are toate valorile proprii 0).

$\boxed{\textbf{9.}}$ *Necesitatea*. Admitem că $\alpha := \operatorname{tr} A_* \neq -1$. Conform problemei **6**, avem $A_*^2 = \alpha A_*$. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie oarecare a lui A_*. Atunci $\lambda^2 = \alpha\lambda$, de unde $\lambda \in \{0, \alpha\}$, deci $1 + \lambda \neq 0$. Deducem de aici că matricea $I_n + A_*$ nu are pe 0 ca valoare proprie, deci este inversabilă.

Suficiența. Presupunem acum că matricea $I_n + A_*$ este inversabilă. Dacă $\operatorname{rang} A \le n - 2$, atunci $A_* = O_n$, deci $\operatorname{tr} A_* = 0 \neq -1$. Dacă $\operatorname{rang} A = n - 1$, atunci $\operatorname{rang} A_* \le 1$, deci polinomul caracteristic al lui A_* este de forma $p_{A_*}(t) = t^n - \alpha t^{n-1}$, cu $\alpha = \operatorname{tr} A_*$ (ceilalți coeficienți sunt nuli deoarece toți minorii principali de ordin mai mare sau egal cu 2 sunt nuli). Prin urmare, valorile proprii ale lui A_* sunt $\lambda_1 = \alpha$ și $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, iar $\alpha \neq -1$ (altfel 0 ar fi valoare proprie pentru $I_n + A_*$ și $I_n + A_*$ nu ar fi inversabilă). Rezultă că $\operatorname{tr} A_* \neq -1$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Fie $C := A - B$. Deoarece $C^2 = O_n$, în baza inegalității lui Sylvester avem

$$2 \operatorname{rang} C - n \le \operatorname{rang}(C^2) = 0,$$

de unde $\operatorname{rang} C \le \frac{n}{2}$. Întrucât n este impar, urmează că $\operatorname{rang} C \le \frac{n-1}{2}$. Ținând seama că $AB - BA = CB - BC$, deducem că

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(AB - BA) &= \operatorname{rang}(CB - BC) \le \operatorname{rang}(CB) + \operatorname{rang}(BC) \\ &\le \operatorname{rang} C + \operatorname{rang} C \le n - 1. \end{aligned}$$

Drept urmare, $\operatorname{rang}(AB - BA) < n$, deci $\det(AB - BA) = 0$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Vom dovedi că $f(X) = \operatorname{rang}(X)$ oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătăm mai întâi că

$$f(PX) = f(X) = f(XP) \quad \text{pentru orice } X, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ cu } P \text{ inversabilă.}$$

În adevăr, avem

$$f(PX) \leq \min\{f(P), f(X)\} \leq f(X)$$

și

$$f(X) = f(P^{-1}(PX)) \leq \min\{f(P^{-1}), f(PX)\} \leq f(PX),$$

deci $f(PX) = f(X)$. Egalitatea $f(XP) = f(X)$ se stabilește analog.

Fie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nenulă și fie $r := \operatorname{rang}(X)$. Atunci există $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici inversabile în așa fel încât $X = PJ_rQ$, unde $Jr := \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Din cele demonstrate mai sus, rezultă că $f(X) = f(J_r)$. Drept urmare, avem

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(O_n), f(J_1), \ldots, f(J_n)\}.$$

Întrucât f este surjectivă, mulțimea $\{f(O_n), f(J_1), \ldots, f(J_n)\}$ este o permutare a mulțimii $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Deoarece

$$f(O_n) = f(O_n \cdot J_k) \leq f(J_k) \quad \text{oricare ar fi } k = 1, \ldots, n$$

și

$$f(J_k) = f(J_k \cdot J_{k+1}) \leq f(J_{k+1}) \quad \text{oricare ar fi } k = 1, \ldots, n-1,$$

deducem că $f(O_n) \leq f(J_1) \leq \cdots \leq f(J_n)$. Surjectivitatea lui f asigură că $f(O_n) = 0$ și $f(J_k) = k$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$. Drept urmare, dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice nenulă și $r = \operatorname{rang}(X)$, atunci $f(X) = f(J_r) = r$. În concluzie, $f(X) = \operatorname{rang}(X)$ oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{12.}}$ Inegalitatea $a_k \leq a_{k+1}$ este echivalentă cu

$$\operatorname{rang}\left(A^{k+1}\right) - \operatorname{rang}\left(A^k\right) \leq \operatorname{rang}\left(A^{k+2}\right) - \operatorname{rang}\left(A^{k+1}\right),$$

adică cu

$$\operatorname{rang}\left(AA^k\right) + \operatorname{rang}\left(A^kA\right) \leq \operatorname{rang}\left(A^k\right) + \operatorname{rang}\left(AA^kA\right).$$

Dar ultima inegalitate nu este altceva decât un caz particular al inegalității lui Frobenius.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Pentru fiecare număr întreg $k \geq 0$ fie $\varphi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, aplicația liniară generată de matricea A^k, adică $\varphi_k(x) := A^k x$ (cu convenția $\varphi_0 = I$, aplicația identică a lui $\mathbb{C}^n$). Pentru simplitate, notăm $\varphi := \varphi_1$ aplicația liniară definită prin $\varphi(x) := Ax$. Notând $X_k := \mathrm{Im}\,(\varphi_k)$, avem $\mathrm{rang}\left(A^k\right) = \dim_{\mathbb{C}} X_k$. Întrucât $X_{k+1} = \varphi(X_k)$ oricare ar fi $k \geq 0$, rezultă imediat (prin inducție) că $X_{k+1} \subseteq X_k$, deci X_{k+1} este subspațiu liniar al lui X_k. Drept urmare, avem următorul lanț de spații vectoriale

$$\mathbb{C}^n = X_0 \succeq X_1 \succeq \cdots \succeq X_k \succeq X_{k+1} \succeq \cdots .$$

a) Presupunem că $\mathrm{rang}\,(A^n) \neq \mathrm{rang}\,(A^{n+1})$. Cum $\mathrm{rang}\left(A^n\right) = \dim_{\mathbb{C}} X_n$, $\mathrm{rang}\left(A^{n+1}\right) = \dim_{\mathbb{C}} X_{n+1}$ și X_{n+1} este subspațiu liniar al lui X_n, deducem că X_{n+1} este inclus strict în X_n. Considerând restricția $\varphi : X_n \to \mathbb{C}^n$, din formula dimensiunilor

$$\dim_{\mathbb{C}} X_n = \underbrace{\dim_{\mathbb{C}} \varphi(X_n)}_{=\dim_{\mathbb{C}} X_{n+1}} + \dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap X_n),$$

rezultă că $\dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap X_n) \geq 1$, deci $\dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap X_k) \geq 1$ pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Considerând acum restricția $\varphi : X_k \to \mathbb{C}^n$ și scriind formula dimensiunilor, obținem

$$\dim_{\mathbb{C}} X_k = \underbrace{\dim_{\mathbb{C}} \varphi(X_k)}_{=\dim_{\mathbb{C}} X_{k+1}} + \underbrace{\dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap X_k)}_{\geq 1},$$

de unde $\dim_{\mathbb{C}} X_k > \dim_{\mathbb{C}} X_{k+1}$. În consecință, avem

$$n = \dim_{\mathbb{C}} X_0 > \dim_{\mathbb{C}} X_1 > \dim_{\mathbb{C}} X_2 > \cdots > \dim_{\mathbb{C}} X_n > \dim_{\mathbb{C}} X_{n+1} \geq 0,$$

ceea ce este absurd.

b) Fie

$$B := J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

blocul Jordan de ordin n având 0 pe diagonala principală. Ridicând B la puteri succesive, diagonala de 1 se mută cu câte o poziție în sus. Astfel, avem

$$B^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și $B^n = O_n$, deci $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) = 1$ și $\operatorname{rang}\left(B^n\right) = 0$.

c) Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice astfel încât $\operatorname{rang}(B^{n-1}) \neq \operatorname{rang}(B^n)$. Pentru fiecare număr întreg $k \geq 0$ fie $\psi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ aplicația liniară generată de B^k, adică $\psi_k(x) := B^k x$ și fie $Y_k := \operatorname{Im}(\psi_k)$. Un raționament similar celui de la a) arată că

$$n = \dim_{\mathbb{C}} Y_0 > \dim_{\mathbb{C}} Y_1 > \dim_{\mathbb{C}} Y_2 > \cdots > \dim_{\mathbb{C}} Y_{n-1} > \dim_{\mathbb{C}} Y_n \geq 0.$$

Rezultă de aici că $\dim_{\mathbb{C}} Y_1 = n-1, \dots, \dim_{\mathbb{C}} Y_{n-1} = 1, \dim_{\mathbb{C}} Y_n = 0$. Prin urmare, avem $Y_n = \{0_n\}$, adică $B^n = O_n$. Fiind nilpotentă, matricea B are valorile proprii $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Fie J matricea Jordan a lui B și fie $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă în așa fel încât $B = SJS^{-1}$. Vom dovedi că $J = J_n(0)$, adică J constă dintr-un singur bloc Jordan de dimensiune n. Presupunem contrarul, adică J constă din $k \geq 2$ blocuri Jordan $J_1(0), \dots J_k(0)$, de dimensiuni $r_1, \dots, r_k$, cel mult egale cu $n-1$. Conform observației de la b), avem $J_i(0)^{r_i} = O_{r_i}$, de unde $J_i(0)^{n-1} = O_{r_i}$ oricare ar fi $i \in \{1, \dots, k\}$, deci $J^{n-1} = O_n$. Deducem că $B^{n-1} = SJ^{n-1}S^{-1} = O_n$, deci $B^n = O_n$ și drept urmare $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) = \operatorname{rang}\left(B^n\right)$, în contradicție cu ipoteza. Contradicția obținută arată că $J = J_n(0)$, de unde $B = SJ_n(0)S^{-1}$, adică B este asemenea cu blocul Jordan $J_n(0)$. Am dovedit astfel că toate matricile $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) \neq \operatorname{rang}\left(B^n\right)$ sunt asemenea cu blocul Jordan $J_n(0)$, deci sunt asemenea între ele.

14. Pentru orice $k \geq 0$ considerăm aplicațiile liniare $\varphi_k, \psi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, definite prin

$$\varphi_k(x) := D^k x \quad \text{și respectiv} \quad \psi_k(x) := E^k x,$$

cu convenția $\varphi_0 = \psi_0 = I$, aplicația identică a lui $\mathbb{C}^n$. Pentru simplitate, punem $\varphi := \varphi_1$ și respectiv $\psi := \psi_1$. Notând $X_k := \operatorname{Im}(\varphi_k)$ și $Y_k := \operatorname{Im}(\psi_k)$, avem $\operatorname{rang}\left(D^k\right) = \dim_{\mathbb{C}} X_k$ și respectiv $\operatorname{rang}\left(E^k\right) = \dim_{\mathbb{C}} Y_k$.

Întrucât $X_{k+1} = \varphi(X_k)$ oricare ar fi $k \geq 0$, rezultă imediat (prin inducție) că $X_{k+1} \subseteq X_k$, deci X_{k+1} este subspațiu liniar al lui X_k. Scriind formula dimensiunilor pentru restricția lui φ la X_k, găsim

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} X_k &= \dim_{\mathbb{C}} \varphi(X_k) + \dim_{\mathbb{C}} (X_k \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} X_{k+1} + \dim_{\mathbb{C}} (X_k \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi)),\end{aligned}$$

adică

$$\mathrm{rang}\,\left(D^k\right) = \mathrm{rang}\,\left(D^{k+1}\right) + \dim_{\mathbb{C}} (X_k \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi)).$$

Vom dovedi că $X_k \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{0_n\}$ oricare ar fi $k \geq 1$, de unde va rezulta că $\mathrm{rang}\,\left(D^k\right) = \mathrm{rang}\,\left(D^{k+1}\right)$ și implicit prima cerință din enunț.

Având în vedere că X_k este subspațiu liniar al lui X_1, este suficient să arătăm că $X_1 \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{0_n\}$. Fie $x \in X_1 \cap \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ arbitrar ales. Atunci avem $0_n = \varphi(x) = Dx = A^{-1}Bx$, de unde $Bx = 0_n$, deci

$$L_k x = 0 \quad \text{oricare ar fi } k \in \{2, \ldots, n\}.$$

Pe de altă parte, există $y \in \mathbb{C}^n$ așa încât $x = \varphi(y) = Dy = A^{-1}By$, de unde $Ax = By$. Deducem de aici că $L_1 x = 0$ și prin urmare $Ax = 0_n$. Cum A este inversabilă, conchidem că $x = 0_n$.

Ca mai sus, avem că Y_{k+1} este subspațiu liniar al lui Y_k oricare ar fi $k \geq 0$. Scriind formula dimensiunilor pentru restricția lui ψ la Y_k, găsim

$$\mathrm{rang}\,\left(E^k\right) = \mathrm{rang}\,\left(E^{k+1}\right) + \dim_{\mathbb{C}} (Y_k \cap \mathrm{Ker}\,(\psi)).$$

Fie $C_1, \ldots, C_n$ coloanele matricei A^{-1}. Vom dovedi că $C_1 \in Y_k \cap \mathrm{Ker}\,(\psi)$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, de unde va rezulta că $\mathrm{rang}\,\left(E^k\right) > \mathrm{rang}\,\left(E^{k+1}\right)$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, încheind rezolvarea problemei.

Deoarece $AA^{-1} = I_n$, avem $L_i C_j = \delta_{ij}$ oricare ar fi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, de unde

$$CC_1 = \begin{pmatrix} L_2 C_1 \\ \vdots \\ L_n C_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_n \quad \Rightarrow \quad \psi(C_1) = EC_1 = A^{-1}CC_1 = 0_n$$

și prin urmare $C_1 \in \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Pe de altă parte, pentru orice $j \in \{2, \ldots, n\}$ avem

$$CC_j = \begin{pmatrix} L_2 C_j \\ \vdots \\ L_n C_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_{j-1},$$

de unde $\psi(C_j) = EC_j = A^{-1}CC_j = A^{-1}e_{j-1} = C_{j-1}$. Obținem apoi succesiv

$$\begin{aligned}
\psi_k(C_{k+1}) &= \psi_{k-1}(\psi(C_{k+1})) = \psi_{k-1}(C_k) \\
&= \cdots \\
&= \psi_1(C_2) = \psi(C_2) = C_1,
\end{aligned}$$

deci $C_1 \in \operatorname{Im}(\psi_k) = Y_k$.