Forma canonică Jordan

Teorema 1 (teorema de triangularizare unitară a lui Schur)**.** *Fie matricea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, având valorile proprii* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Atunci există o matrice unitară* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât matricea* U^*AU *să fie superior triangulară, având pe diagonala principală* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*.*

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *și toate valorile proprii ale lui* A *sunt reale, atunci există o matrice ortogonală* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *astfel încât matricea* U^tAU *să aibă proprietatea de mai sus.*

Teorema 2 (teorema de triangularizare simultană)**.** *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel ca* $AB = BA$*. Atunci există o matrice unitară* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *cu proprietatea că matricile* U^*AU *și* U^*BU *sunt ambele superior triangulare.*

Mai mult, dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *este o familie comutativă (adică o familie cu proprietatea că oricare două matrici ale sale comută), atunci există o matrice unitară* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *în așa fel încât* U^*AU *este superior triangulară oricare ar fi* $A \in \mathcal{F}$*.*

Definiția 3. Fie $m \in \mathbb{N}$. Se numește *bloc Jordan de ordinul* m orice matrice superior triangulară din $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, de forma

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se numește *matrice Jordan* orice matrice de blocuri $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de forma

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & O & \cdots & O \\ O & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \boxed{J_{n_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix},$$

în care $J_{n_i}(\lambda_i)$ sunt blocuri Jordan, iar $n_1 + \cdots + n_k = n$. Ordinele n_i ale blocurilor Jordan, precum și valorile λ_i nu sunt neapărat distincte.

Teorema 4 (teorema formei canonice Jordan)**.** *Pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca*

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & O & \cdots & O \\ O & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \boxed{J_{n_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix} =: J_A.$$

Matricea J_A se numește matricea Jordan (sau forma canonică Jordan) a lui A. Ea este unică, abstracție făcând de o permutare a blocurilor diagonale. Numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sunt valori proprii ale lui A și ele nu sunt neapărat distincte.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și toate valorile proprii ale lui A sunt reale, atunci matricea de similaritate S poate fi aleasă din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Observația 5. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice având valorile proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, cu ordinele de multiplicitate $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$. Atunci polinomul caracteristic al lui A are forma

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{s_1} \cdots (t - \lambda_m)^{s_m}.$$

Conform teoremei lui Frobenius, polinomul minimal al lui A are forma

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_m)^{r_m},$$

unde $r_1, \ldots, r_m$ sunt numere naturale astfel încât $1 \leq r_i \leq s_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Legătura dintre matricea Jordan J_A și cele două polinoame este sintetizată mai jos:

- ⋄ Numărul total k al blocurilor Jordan (numărând și aparițiile multiple ale aceluiași bloc) reprezintă numărul vectorilor proprii liniar independenți ai lui A;

- ⋄ Numărul blocurilor Jordan corespunzătoare unei valori proprii λ_i reprezintă multiplicitatea geometrică a valorii proprii λ_i, adică dimensiunea spațiului vectorial al vectorilor proprii asociați

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda_i x\}.$$

- ⋄ Suma ordinelor blocurilor Jordan corespunzătoare unei valori proprii λ_i reprezintă multiplicitatea algebrică s_i a valorii proprii λ_i, adică puterea la care apare factorul $(t - \lambda_i)$ în descompunerea polinomului caracteristic p_A.

- ◇ Ordinul celui mai mare bloc Jordan corespunzător unei valori proprii λ_i reprezintă puterea r_i la care apare factorul $(t-\lambda_i)$ în descompunerea polinomului minimal m_A.

O consecință imediată, dar importantă în aplicații, a ultimei remarci de mai sus este următoarea.

Teorema 6. *Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $f \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom având numai rădăcini simple astfel încât $f(A) = O_n$, atunci A este diagonalizabilă.*

Probleme

$\boxed{\textbf{1.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrici nilpotente, diferite de matricea nulă, astfel ca $AB = BA$. Să se demonstreze că:

a) $AB = O_2$.

b) Există $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $A = \alpha B$.

D. Miheț, Concursul L. Duican, 2011/2

$\boxed{\textbf{2.}}$ Să se demonstreze că dacă matricile $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ comută între ele două câte două și $A^3 = B^3 = C^3 = O_3$, atunci $ABC = O_3$.

M. Rădulescu, Concursul M. Țarină, 2006/3

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $AB = BA$. Să se demonstreze că dacă există un număr natural $k \geq 1$ astfel ca $B^k = O_n$, atunci $\det(A + B) = \det A$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Fie matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, având valorile proprii de modul strict mai mic decât 1.

a) Să se demonstreze că dacă $AB = BA$, atunci valorile proprii ale matricei AB sunt de modul strict mai mic decât 1.

b) Rămâne adevărată afirmația de la a) fără ipoteza $AB = BA$?

Olimpiada de matematică a studenților din Republica Moldova, 1999

$\boxed{\textbf{5.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $AB = BA$, $\det B \neq 0$ și

$$|\det(A + zB)| = 1 \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C},\ \text{cu } |z| = 1.$$

a) Să se demonstreze că $A^n = O_n$.

b) Rămâne adevărată această concluzie în absența ipotezei $AB = BA$?

V. Pop, Olimpiada națională, 2009/3

$\boxed{\textbf{6.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei A^n și fie v un vector propriu corespunzător. Să se demonstreze că dacă vectorii $v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$ sunt liniar independenți, atunci $A^n = \lambda I_n$.

Concursul T. Lalescu, faza națională, 2013

$\boxed{\textbf{7.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că $\operatorname{tr} A = 0$ dacă și numai dacă există $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A = B + C$ și $B^2 = C^2 = O_2$.

I. Savu, Olimpiada locală București, 2006/4

$\boxed{\mathbf{8.}}$ a) Demonstrați că pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ există $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în așa fel încât $Y^3 = X^2$.

b) Dați exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $Z^3 \neq A^2$ oricare ar fi $Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

V. Pop, SEEMOUS 2016/2

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Fiind date numerele naturale $m, n \geq 2$, să se demonstreze că:

a) Oricare ar fi matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ există $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A = X^n + Y^m$.

b) Oricare ar fi matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ există $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A = X^n - Y^m$.

G. Militaru, Olimpiada județeană București, 1996/3

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Demonstrați că nu există matrici $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât matricea $C := AB - BA$ să fie nenulă și să comute atât cu A cât și cu B.

P. Schweitzer, Amer. Math. Monthly, problema 10930 [2002]

$\boxed{\mathbf{11.}}$ Fie m și n numere naturale și fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că $A^m = I_n$. Să se demonstreze că

$$\operatorname{rang}(A - \varepsilon_0 I_n) + \operatorname{rang}(A - \varepsilon_1 I_n) + \cdots + \operatorname{rang}(A - \varepsilon_{m-1} I_n) = n(m-1),$$

unde $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\}$.

D. Moldovan, V. Pop, Concursul T. Lalescu, faza națională, 2014

$\boxed{\mathbf{12.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că A și A^2 au ranguri diferite. Să se demonstreze că există o matrice nenulă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB = BA = B^2 = O_n$.

C. Delasava, Olimpiada națională, 2018/4

$\boxed{\mathbf{13.}}$ Să se demonstreze că:

a) Pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(A^{n+1})$.

b) Există matrici $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) \neq \operatorname{rang}\left(B^n\right)$.

c) Toate matricile $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $\operatorname{rang}\left(B^{n-1}\right) \neq \operatorname{rang}\left(B^n\right)$ sunt asemenea între ele.

V. Pop, Concursul Traian Lalescu, UTCN, profil electric, anul I, 2008

$\boxed{\textbf{14.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A + XY) = \det(A + YX)$ oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că:

a) Dacă $\det A \neq 0$, atunci $A = aI_n$, cu $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Dacă $\det A = 0$, atunci $A = O_n$.

M. Andronache, I. Savu, Olimpiada județeană București, 1998/4

Rezolvări

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) Matricile A și B fiind nilpotente, au toate valorile proprii nule. Aplicând teorema de triangularizare simultană (teorema 2), deducem că există o matrice ortogonală $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât matricile $T_1 := U^t AU$ și $T_2 := U^t BU$ să fie superior triangulare. Mai mult, observația precedentă referitoare la valorile proprii arată că T_1 și T_2 sunt de forma

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (deoarece A și B sunt nenule). Cum $T_1T_2 = O_2$, rezultă că $AB = UT_1T_2U^t = O_2$.

b) Avem $A = UT_1U^t$ și $B = UT_2U^t$. Notând $\alpha := a/b$, avem $T_1 = \alpha T_2$, deci $A = \alpha B$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Aplicând teorema de triangularizare simultană (teorema 2), rezultă că există o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât matricile $T_1 := U^*AU$, $T_2 := U^*BU$ și $T_3 := U^*CU$ sunt toate superior triangulare. În plus, din $A^3 = B^3 = C^3 = O_3$ rezultă că 0 este valoare proprie cu ordinul de multiplicitate 3 pentru fiecare dintre matricile A, B și C. Drept urmare, matricile T_1, T_2 și T_3 au pe diagonala principală 0, deci ele sunt de forma

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem $A = UT_1U^*$, $B = UT_2U^*$, $C = UT_3U^*$, de unde $ABC = UT_1T_2T_3U^*$. Un calcul simplu arată că $T_1T_2T_3 = O_3$, deci $ABC = O_3$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Deoarece $AB = BA$, din teorema de triangularizare simultană (teorema 2) rezultă că există o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că matricile $T_1 := U^*AU$ și $T_2 := U^*BU$ sunt ambele superior triangulare. Cum A și

T_1 sunt asemenea, rezultă că T_1 are pe diagonala principală valorile proprii ale lui A (într-o ordine oarecare). Analog, T_2 are pe diagonala principală valorile proprii ale lui B. Dar B fiind nilpotentă, are toate valorile proprii nule. Deci T_2 are pe diagonala principală zerouri. Avem

$$A + B = U(T_1 + T_2)U^*,$$

de unde $\det(A + B) = \det(T_1 + T_2)$. Dar matricea $T_1 + T_2$ este superior triangulară, deci $\det(T_1 + T_2)$ este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală în $T_1 + T_2$, adică produsul tuturor valorilor proprii ale lui A, care este tocmai $\det A$. Drept urmare, avem $\det(A + B) = \det A$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ a) Cum $AB = BA$, din teorema de triangularizare simultană (teorema 2) rezultă că există o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că matricile $T_1 := U^*AU$ și $T_2 := U^*BU$ sunt ambele superior triangulare. Deoarece matricile A și T_1 sunt asemenea, ele au același polinom caracteristic, deci au aceleași valori proprii. Întrucât T_1 este superior triangulară, valorile sale proprii sunt tocmai elementele de pe diagonala principală. Drept urmare, T_1 este o matrice superior triangulară, având pe diagonala principală elementele $\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A, iar σ este o permutare a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$. Un raționament similar arată că și T_2 este superior triangulară, având pe diagonala principală elementele $\mu_{\tau(1)}, \ldots, \mu_{\tau(n)}$, unde $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sunt valorile proprii ale lui B, iar τ este o permutare a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$.

Avem $A = UT_1U^*$ și $B = UT_2U^*$, de unde $AB = UT_1T_2U^*$. Drept urmare, matricile AB și T_1T_2 sunt asemenea, deci au aceleași valori proprii. Dar matricea T_1T_2 este superior triangulară, având pe diagonala principală elementele $\lambda_{\sigma(1)}\mu_{\tau(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}\mu_{\tau(n)}$, acestea fiind și valorile proprii ale lui T_1T_2. Rezultă așadar că valorile proprii ale matricei AB sunt

$$\lambda_{\sigma(1)}\mu_{\tau(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}\mu_{\tau(n)},$$

toate având modulul strict mai mic decât 1, deoarece $|\lambda_k| < 1$ și $|\mu_k| < 1$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Răspunsul este NU. Un contraexemplu posibil este următorul:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Atunci matricile A și B au toate valorile proprii egale cu $1/2$. Pe de altă parte, matricea

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

are polinomul caracteristic

$$p_A(t) = \det(tI_n - AB) = \left(t^2 - \frac{9}{2}\,t + \frac{1}{16}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right)^{n-2}.$$

Rădăcinile t_1 și t_2 ale ecuației $t^2 - \frac{9}{2}\,t + \frac{1}{16} = 0$ nu pot avea ambele modulul strict mai mic decât 1, deoarece $|t_1| + |t_2| \geq |t_1 + t_2| = \frac{9}{2}$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ a) Conform teoremei de triangularizare simultană, există $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice unitară astfel încât matricile $T_1 := U^*AU$ și $T_2 := U^*BU$ să fie ambele superior triangulare. Mai mult, T_1 are pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ale lui A, iar T_2 are pe diagonala principală valorile proprii $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ ale lui B. Avem

$$A + zB = UT_1U^* + zUT_2U^* = U(T_1 + zT_2)U^*,$$

de unde $\det(A + zB) = \det(T_1 + zT_2) = (\lambda_1 + \mu_1 z)\cdots(\lambda_n + \mu_n z)$.

Condiția din ipoteză arată că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ avem

$$\begin{aligned} 1 &= |(\lambda_1 + \mu_1 z)\cdots(\lambda_n + \mu_n z)|^2 \\ &= (\lambda_1 + \mu_1 z)\cdots(\lambda_n + \mu_n z)(\overline{\lambda}_1 + \overline{\mu}_1\overline{z})\cdots(\overline{\lambda}_n + \overline{\mu}_n\overline{z}) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1 z)\cdots(\lambda_n + \mu_n z)\left(\overline{\lambda}_1 + \frac{\overline{\mu}_1}{z}\right)\cdots\left(\overline{\lambda}_n + \frac{\overline{\mu}_n}{z}\right), \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$z^n = (\lambda_1 + \mu_1 z)\cdots(\lambda_n + \mu_n z)(\overline{\lambda}_1 z + \overline{\mu}_1)\cdots(\overline{\lambda}_n z + \overline{\mu}_n). \tag{1}$$

Întrucât egalitatea (1) are loc pentru o infinitate de valori ale lui z, ea trebuie să aibă loc pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Egalând coeficienții lui z^{2n}, obținem

$$\mu_1 \cdots \mu_n \overline{\lambda}_1 \cdots \overline{\lambda}_n = 0.$$

Cum $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, rezultă că există $j \in \{1, \ldots, n\}$ astfel ca $\lambda_j = 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\lambda_1 = 0$. Înlocuind în (1), deducem că

$$z^{n-1} = |\mu_1|^2 (\lambda_2 + \mu_2 z) \cdots (\lambda_n + \mu_n z)(\overline{\lambda}_2 z + \overline{\mu}_2) \cdots (\overline{\lambda}_n z + \overline{\mu}_n)$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Egalând acum coeficienții lui z^{2n-2}, obținem

$$|\mu_1|^2 \mu_2 \cdots \mu_n \overline{\lambda}_2 \cdots \overline{\lambda}_n = 0,$$

deci există $j \in \{2, \ldots, n\}$ astfel ca $\lambda_j = 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $\lambda_2 = 0$. Continuând raționamentul, ajungem la concluzia că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, deci $p_A(t) = t^n$. Aplicând teorema lui Cayley-Hamilton, conchidem că $A^n = O_n$.

b) Răspunsul este NU, după cum arată următorul contraexemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci avem $\det(A + zB) = z^{n-1}$, deci $|\det(A + zB)| = 1$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, dar $A^n = A \neq O_n$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ ***Rezolvarea 1***. Deoarece $A^n v = \lambda v$, rezultă că $A^n(A^k v) = \lambda A^k v$ oricare ar fi $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Prin urmare, vectorii $v, Av, A^2 v, \ldots, A^{n-1} v$ sunt vectori proprii ai lui A^n, corespunzători valorii proprii λ. Întrucât acești vectori sunt liniar independenți, rezultă că multiplicitatea geometrică a lui λ este n. Urmează de aici că numărul blocurilor Jordan corespunzătoare valorii proprii λ în matricea Jordan J a lui A^n este n, deci $J = \lambda I_n$. Dacă $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice inversabilă cu proprietatea că $S^{-1} A^n S = J$, atunci avem $A^n = SJS^{-1} = S(\lambda I_n)S^{-1} = \lambda I_n$.

Rezolvarea 2. Fie matricea $B := A^n - \lambda I_n$ și fie $\varphi_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ aplicația liniară corespunzătoare. Atunci $\varphi_B(A^k v) = A^n(A^k v) - \lambda A^k v = 0_n$

pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (a se vedea rezolvarea 1). Rezultă de aici că $\text{lin}\,\{v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v\} \subseteq \ker \varphi_B$, deci $\dim_{\mathbb{C}} \ker \varphi_B = n$. Din formula dimensiunilor urmează atunci că $\dim_{\mathbb{C}} \text{Im}\, \varphi_B = 0$, deci $B = O_n$.

Rezolvarea 3. Fie $p_A(t) := \det(tI_n - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ polinomul caracteristic al lui A. Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = O_n. \tag{1}$$

Înmulțind această egalitate la dreapta cu v și ținând seama că $A^n v = \lambda v$, deducem că

$$a_{n-1}A^{n-1}v + \dots + a_1 Av + (a_0 + \lambda)v = 0_n.$$

Din ipoteza că vectorii $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ sunt liniar independenți rezultă că $a_{n-1} = \dots = a_1 = 0$ și $a_0 = -\lambda$. Înlocuind în (1), deducem că $A^n = \lambda I_n$.

$\boxed{7.}$ *Necesitatea*. Admitem că $\text{tr}\, A = 0$. Conform schemei standard, este suficient să dovedim existența a două matrici $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A = B + C$ și $B^2 = C^2 = O_2$ doar în cazul particular când A este o matrice Jordan.

Cazul I. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. În acest caz se poate alege

$$B = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 1 \\ -\lambda^2/4 & -\lambda/2 \end{pmatrix} \quad \text{și respectiv} \quad C = \begin{pmatrix} \lambda/2 & -1 \\ \lambda^2/4 & -\lambda/2 \end{pmatrix}.$$

Cazul II. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. În acest caz se poate alege $B = A$ și $C = O_2$.

Suficiența. Este imediată.

$\boxed{8.}$ a) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, fie J_X matricea Jordan a lui X și fie $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă astfel încât $X = SJ_XS^{-1}$. În funcție de J_X, sunt posibile următoarele două situații.

Cazul I. $J_X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, unde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sunt valorile proprii (nu neapărat distincte) ale lui X. Alegem $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ în așa fel încât $\mu_1^3 = \lambda_1^2$ și $\mu_2^3 = \lambda_2^2$, iar apoi definim $Y := S \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} S^{-1}$. Atunci avem

$$Y^3 = S \begin{pmatrix} \mu_1^3 & 0 \\ 0 & \mu_2^3 \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} S^{-1} = X^2.$$

Cazul II. $J_X = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, unde $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie a lui X. Căutăm matricea Y de forma $Y := S \begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} S^{-1}$, cu $\mu, a \in \mathbb{C}$. Se constată imediat că egalitatea $Y^3 = X^2$ este echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu^3 = \lambda^2 \\ 3a\mu^2 = 2\lambda. \end{cases}$$

Dacă $\lambda = 0$, atunci alegem $\mu = a = 0$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci alegem $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ încât $\mu^3 = \lambda^2$ (μ este una dintre rădăcinile de ordin 3 ale lui λ^2), iar apoi alegem $a = \frac{2\lambda}{3\mu^2}$.

b) Fie $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Presupunem, prin absurd, că există o matrice $Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel ca $Z^3 = A^2$. Atunci $Z^6 = A^4 = O_3$, deci toate cele trei valori proprii ale lui Z sunt nule. Fie J_Z matricea Jordan a lui Z, care are una dintre formele

$$J_Z = O_3 \quad \text{sau} \quad J_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad J_Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și fie $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă cu proprietatea că $Z = SJ_ZS^{-1}$. Atunci avem $Z^3 = SJ_Z^3S^{-1} = O_3$, deoarece $J_Z^3 = O_3$ indiferent de forma matricei J_Z. Pe de altă parte, $A^2 \neq O_3$. Drept urmare, avem $Z^3 \neq A^2$, ceea ce este absurd.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ a) Fie J matricea Jordan a lui A și fie $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă astfel încât $S^{-1}AS = J$. Vom demonstra că există $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $J = U^n + V^m$. Atunci matricile $X := SUS^{-1}$ și $Y := SVS^{-1}$ satisfac

$$X^n + Y^m = SU^nS^{-1} + SV^mS^{-1} = S(U^n + V^m)S^{-1} = SJS^{-1} = A.$$

Pentru a demonstra existența matricilor U și V analizăm următoarele cazuri, în funcție de structura blocurilor lui J.

Cazul I. $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (adică J conține două blocuri Jordan de dimensiune 1), unde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sunt valorile proprii ale lui A. În acest caz putem alege, de exemplu, $V = O_2$ și $U = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$, unde z_1 și z_2 sunt rădăcini de ordinul n ale lui λ_1 și respectiv λ_2.

Cazul II. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (adică J conține un singur bloc Jordan de dimensiune 2), unde $\lambda \in \mathbb{C}$ este unica valoare proprie a lui A. În acest caz căutăm matrici U, V de forma $U = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ și respectiv $V = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$. Se constată imediat că egalitatea $J = U^n + V^m$ este echivalentă cu

$$z^n + w^m = \lambda \quad \text{și} \quad nz^{n-1} = 1.$$

Aceste egalități sunt satisfăcute dacă alegem $z := 1/\sqrt[n-1]{n}$, iar apoi alegem w o rădăcină complexă de ordinul m a lui $\lambda - z^n$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Căutăm matrici X și Y de forma

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \text{și respectiv} \quad Y = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix}$$

care să verifice egalitatea $A = X^n - Y^m$. Aceasta este echivalentă cu

$$x^n - u^m = a,\ z^n - w^m = d,\ y\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}z^k = b,\ -v\sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k}w^k = c.$$

Aceste egalități sunt satisfăcute dacă, de exemplu:

$\diamond$ alegem $u, w \in (0, \infty)$ astfel ca $u^m + a > 0$ și $w^m + d > 0$, iar apoi alegem $x, z \in (0, \infty)$ în așa fel încât $x^n = a + u^m$ și $z^n = d + w^m$;

$\diamond$ alegem $y := b \Big/ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}z^k$ și $v := -c \Big/ \sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k}w^k$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ ***Rezolvarea 1***. Presupunem, prin absurd, că există $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $C := AB - BA \neq O_2$, $CA = AC$ și $CB = BC$. Fie A_1 matricea Jordan a lui A și fie $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă astfel încât $S^{-1}AS = A_1$. Notăm $B_1 := S^{-1}BS$ și $C_1 := A_1B_1 - B_1A_1$. Atunci avem

$$C_1 = S^{-1}ABS - S^{-1}BAS = S^{-1}CS \neq O_2,$$

$$C_1A_1 = S^{-1}CAS = S^{-1}ACS = A_1C_1$$

și analog $C_1B_1 = B_1C_1$. Fie $B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. În funcție de structura lui A_1, avem următoarele două cazuri posibile.

Cazul I. $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, unde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sunt valorile proprii ale lui A. Atunci avem

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b(\lambda_1 - \lambda_2) \\ c(\lambda_2 - \lambda_1) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rezultă de aici că $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (altfel, am avea $C_1 = O_2$, în contradicție cu ipoteza noastră). Un calcul simplu arată că egalitatea $C_1A_1 = A_1C_1$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} b\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = b\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\ c\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1) = c\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1). \end{cases}$$

Având în vedere că $\lambda_1 \neq \lambda_2$, aceste două egalități implică $b = c = 0$. Dar atunci avem $C_1 = O_2$, ceea ce este absurd.

Cazul II. $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, unde $\lambda \in \mathbb{C}$ este unica valoare proprie a lui A. Atunci avem

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & d - a \\ 0 & -c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Egalitatea $C_1A_1 = A_1C_1$ este echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} c & d - a \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d - a \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici că $c = -c$, adică $c = 0$, de unde

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & d - a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simplu arată acum că egalitatea $C_1B_1 = B_1C_1$ este echivalentă cu $a = d$. Dar atunci avem $C_1 = O_2$, ceea ce este absurd.

Rezolvarea 2. Presupunem, prin absurd, că există $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $C := AB - BA \neq O_2$, $CA = AC$ și $CB = BC$. Fie

$$X := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid CM = MC\}.$$

Atunci X este un subspațiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, care conține matricile I_2, A, B și C. Dacă $\dim_{\mathbb{C}} X = 4 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci avem $CM = MC$ oricare ar fi $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, deci există o constantă $\alpha \in \mathbb{C}$ așa încât $C = \alpha I_2$. Cum $\operatorname{tr} C = 0$, rezultă că $\alpha = 0$. Dar atunci avem $C = O_2$, ceea ce este absurd. Prin urmare, avem $\dim_{\mathbb{C}} X \leq 3$, deci sistemul (I_2, A, B, C) este liniar dependent. Cu alte cuvinte, una dintre cele patru matrici poate fi scrisă ca și combinație liniară de celelalte trei.

$\diamond$ $I_2 = \alpha A + \beta B + \gamma C$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Dacă $\alpha \neq 0$, atunci înmulțind această egalitate de la dreapta și apoi de la stânga cu B, obținem

$$B = \alpha AB + \beta B^2 + \gamma CB \quad \text{și} \quad B = \alpha BA + \beta B^2 + \gamma BC.$$

Scăzând membru cu membru aceste egalități obținem $\alpha C = O_2$, de unde $C = O_2$, contradicție. Analog se obține o contradicție și când $\beta \neq 0$. Pe de altă parte, dacă $\alpha = \beta = 0$, atunci $I_2 = \gamma C$. Dar atunci am avea $2 = \operatorname{tr} I_2 = \gamma \operatorname{tr} C = 0$, ceea ce este absurd.

$\diamond$ $C = \alpha A + \beta B + \gamma I_2$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Dacă $\alpha \neq 0$, atunci înmulțind această egalitate de la dreapta și apoi de la stânga cu B, obținem

$$CB = \alpha AB + \beta B^2 + \gamma B \quad \text{și} \quad BC = \alpha BA + \beta B^2 + \gamma B.$$

Scăzând membru cu membru aceste egalități obținem $\alpha C = O_2$, de unde $C = O_2$, contradicție. Analog se obține o contradicție și când $\beta \neq 0$. Pe de altă parte, dacă $\alpha = \beta = 0$, atunci $C = \gamma I_2$. Dar atunci am avea $0 = \operatorname{tr} C = \gamma \operatorname{tr} I_2 = 2\gamma$, adică $\gamma = 0$, deci $C = O_2$, contradicție.

$\diamond$ $A = \alpha I_2 + \beta B + \gamma C$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Înmulțind această egalitate de la dreapta și apoi de la stânga cu B, obținem

$$AB = \alpha B + \beta B^2 + \gamma CB \quad \text{și} \quad BA = \alpha B + \beta B^2 + \gamma BC.$$

Scăzând membru cu membru aceste egalități obținem $C = O_2$, contradicție.

$\diamond$ $B = \alpha A + \beta I_2 + \gamma C$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Procedând ca în cazul anterior, se obține o contradicție și în această situație.

Contradicțiile obținute în fiecare dintre cele patru situații arată că nu există matrici $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea din enunț.

Rezolvarea 3. (Tötös György) Vom folosi următoarea

Lemă. *Fiind date matricile $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem $AB = BA$ dacă și numai dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, nu toate nule, astfel încât $\alpha A + \beta B + \gamma I_2 = O_2$.*

Demonstrația lemei. Necesitatea. Presupunem, prin absurd, că $AB = BA$, dar nu există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ nu toate nule astfel încât $\alpha A + \beta B + \gamma I_2 = O_2$. Atunci sistemul (A, B, I_2) este liniar independent, deci $A \neq \lambda I_2$ oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm aplicația liniară $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, definită prin $\varphi(X) := AX - XA$. Deoarece $A, B, I_2 \in \ker \varphi$, deducem că

$$\operatorname{lin}\{A, B, I_2\} \subseteq \ker \varphi,$$

deci $\dim_{\mathbb{C}} \ker \varphi \geq 3$. Dacă $\dim_{\mathbb{C}} \ker \varphi = 4$, atunci $\ker \varphi = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, adică $AX = XA$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dar atunci trebuie ca $A = \lambda I_2$ cu $\lambda \in \mathbb{C}$, contradicție. Drept urmare, avem $\dim_{\mathbb{C}} \ker \varphi = 3$. Din formula dimensiunilor rezultă atunci că $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \varphi = 1$. După o eventuală schimbare de bază, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că fie $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ cu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ numere complexe, fie $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ cu $\lambda \in \mathbb{C}$. În primul caz avem

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar în cel de-al doilea caz avem

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

În ambele situații avem $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \varphi \geq 2$, ceea ce este absurd.

Suficiența. Presupunem acum că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ nu toate nule așa încât $\alpha A + \beta B + \gamma I_2 = O_2$. Evident, nu putem avea $\alpha = \beta = 0$. Dacă $\alpha \neq 0$, atunci din egalitățile $\alpha AB + \beta B^2 + \gamma B = O_2$ și $\alpha BA + \beta B^2 + \gamma B = O_2$ rezultă că $\alpha(AB - BA) = O_2$, deci $AB = BA$. Analog se arată că $AB = BA$ și în cazul $\beta \neq 0$. □

Rezolvarea problemei. Presupunem, prin absurd, că există două matrici $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $C := AB - BA \neq O_2$, $CA = AC$ și $CB = BC$. Conform lemei, există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ nu toate nule așa încât $\alpha A + \beta C + \gamma I_2 = O_2$. Dacă $\alpha \neq 0$, atunci din egalitățile

$$\alpha AB + \beta CB + \gamma B = O_2 \quad \text{și} \quad \alpha BA + \beta BC + \gamma B = O_2$$

rezultă că $\alpha(AB - BA) = \alpha C = O_2$, deci $C = O_2$, contradicție. Dacă însă $\alpha = 0$, atunci avem $\beta C + \gamma I_2 = O_2$, deci $\beta \neq 0$. Dar atunci $C = -\frac{\gamma}{\beta} I_2$, de unde $0 = \operatorname{tr} C = \operatorname{tr}\left(-\frac{\gamma}{\beta} I_2\right) = -\frac{2\gamma}{\beta}$, deci $\gamma = 0$. Drept urmare, avem $\beta C = O_2$, adică $C = O_2$, contradicție.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Deoarece polinomul $f := X^m - 1$ are rădăcinile simple $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$, rezultă că A este diagonalizabilă. Fie

$$J := \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_1}}_{\alpha_{i_1}}, \underbrace{\varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_2}}_{\alpha_{i_2}}, \ldots, \underbrace{\varepsilon_{i_r}, \ldots, \varepsilon_{i_r}}_{\alpha_{i_r}}\Big),$$

matricea Jordan a lui A și fie $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea inversabilă cu proprietatea că $A = SJS^{-1}$. Pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ avem

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(A - \varepsilon_k I_n) &= \operatorname{rang}\left(S(J - \varepsilon_k I_n)S^{-1}\right) = \operatorname{rang}(J - \varepsilon_k I_n) \\ &= \begin{cases} n & \text{dacă } k \notin \{i_1, \ldots, i_r\} \\ n - \alpha_{i_j} & \text{dacă } k = i_j. \end{cases} \end{aligned}$$

Drept urmare,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{rang}(A - \varepsilon_k I_n) &= \sum_{k \notin \{i_1, \ldots, i_r\}} \operatorname{rang}(A - \varepsilon_k I_n) + \sum_{j=1}^{r} \operatorname{rang}(A - \varepsilon_{i_j} I_n) \\ &= n(m - r) + \sum_{j=1}^{r} (n - \alpha_{i_j}) \\ &= nm - nr + nr - \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i_j} = nm - n = n(m-1). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{12.}}$ ***Rezolvarea 1***. Deoarece $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A^2)$, rezultă că A este singulară, deci admite pe 0 ca și valoare proprie. Fie J matricea Jordan a lui A și fie $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nesingulară astfel încât $A = SJS^{-1}$. Atunci avem $A^2 = SJ^2S^{-1}$ și prin urmare $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(J)$ și $\operatorname{rang}(A^2) = \operatorname{rang}(J^2)$. Se constată imediat că dacă toate blocurile Jordan corespunzătoare valorii proprii 0 ar fi de dimensiune 1, atunci $\operatorname{rang}(J) = \operatorname{rang}(J^2) = n - p$, unde p este numărul blocurilor Jordan corespunzătoare lui 0. Dar atunci am avea $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^2)$, în contradicție cu ipoteza. Drept urmare, există cel puțin un bloc Jordan corespunzător valorii proprii 0, având dimensiunea cel puțin 2. Reținând din acest bloc Jordan doar primele două linii și primele două coloane, rezultă că există $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ așa încât

$$\text{elementele de pe pozițiile } \begin{matrix} (i,i) & (i,i+1) \\ (i+1,i) & (i+1,i+1) \end{matrix} \text{ în } J \text{ să fie } \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}.$$

Fie $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea în care

$$\text{elementele de pe pozițiile } \begin{matrix} (i,i) & (i,i+1) \\ (i+1,i) & (i+1,i+1) \end{matrix} \text{ sunt } \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix},$$

toate celelalte elemente fiind 0 și fie $B = SKS^{-1}$. Atunci avem $B \neq O_n$, $AB = SJKS^{-1}$, $BA = SKJS^{-1}$ și $B^2 = SK^2S^{-1}$. Deoarece

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2,$$

rezultă că $JK = KJ = K^2 = O_n$, deci $AB = BA = B^2 = O_n$.

Rezolvarea 2. Deoarece $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A^2)$, rezultă că A este singulară și că în matricea Jordan a lui A există cel puțin un bloc Jordan corespunzător valorii proprii 0 de dimensiune mai mare sau egală cu 2 (a se vedea prima rezolvare). Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ valorile proprii nenule distincte ale lui A. Atunci polinomul minimal al lui A este de forma

$$m_A(t) = t^k (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_m)^{r_m},$$

unde $k \geq 2$. Atunci matricea $B := A^{k-1}(A - \lambda_1 I_n)^{r_1} \cdots (A - \lambda_m I_n)^{r_m}$ este nenulă (altfel s-ar contrazice minimalitatea gradului lui m_A), satisface evident $AB = BA = m_A(A) = O_n$ și

$$B^2 = A^{k-2}(A - \lambda_1 I_n)^{r_1} \cdots (A - \lambda_m I_n)^{r_m}\, m_A(A) = O_n.$$

Rezolvarea 3. Fie $\varphi_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ aplicația liniară generată de matricea A. Vom dovedi că există o aplicație liniară nenulă $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ în așa fel încât $\varphi_A \circ \psi = \psi \circ \varphi_A = \psi \circ \psi = \theta$, unde $\theta \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ este aplicația liniară nulă. Atunci $B := [\psi]_e$ (matricea lui ψ în baza canonică a lui $\mathbb{C}^n$) satisface cerințele din enunț.

Fie $X := \varphi_A(\mathbb{C}^n)$. Atunci X este subspațiu liniar al lui $\mathbb{C}^n$ și are loc egalitatea $\operatorname{rang}(A) = \dim_{\mathbb{C}} X$. De asemenea

$$\operatorname{rang}(A^2) = \dim_{\mathbb{C}}(\varphi_A \circ \varphi_A)(\mathbb{C}^n) = \dim_{\mathbb{C}} \varphi_A(X).$$

Formula dimensiunilor pentru restricția lui φ_A la X ne dă

$$\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} \varphi_A(X) + \dim_{\mathbb{C}}(X \cap \ker \varphi_A).$$

Cum $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A^2)$, rezultă că $\dim_{\mathbb{C}}(X \cap \ker \varphi_A) \geq 1$, deci există un vector nenul $f_1 \in X \cap \ker \varphi_A$. Fie $k := \operatorname{rang}(A) = \dim_{\mathbb{C}} X$. Atunci avem

$k < n$ (altfel, φ_A ar fi izomorfism și am avea $n = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^2)$, în contradicție cu ipoteza). Completăm vectorul nenul f_1 până la o bază $\{f_1, \ldots, f_k\}$ a lui X, iar apoi completăm această bază la o bază a lui $\mathbb{C}^n$: $\{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$. Fie $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ aplicația liniară care acționează pe această bază în felul următor:

x	f_1	$\ldots$	f_k	f_{k+1}	f_{k+2}	$\ldots$	f_n
$\psi(x)$	0_n	$\ldots$	0_n	f_1	0_n	$\ldots$	0_n.

Vom dovedi că $\varphi_A \circ \psi = \psi \circ \varphi_A = \psi \circ \psi = \theta$. Fie $x \in \mathbb{C}^n$ arbitrar și fie $x = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ reprezentarea lui x în baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Atunci avem $\psi(x) = \alpha_{k+1} f_1$, deci $(\varphi_A \circ \psi)(x) = \alpha_{k+1}\varphi_A(f_1) = 0_n$, deoarece $f_1 \in \ker \varphi_A$. Avem de asemenea $(\psi \circ \psi)(x) = \alpha_{k+1}\psi(f_1) = 0_n$. Pe de altă parte, cum $\varphi_A(x) \in X$, există $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{C}$ așa încât $\varphi_A(x) = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_k f_k$, de unde $(\psi \circ \varphi_A)(x) = \beta_1\psi(f_1) + \cdots + \beta_k\psi(f_k) = 0_n$. Întrucât $x \in \mathbb{C}^n$ a fost arbitrar, urmează că $\varphi_A \circ \psi = \psi \circ \varphi_A = \psi \circ \psi = \theta$.

$\boxed{\textbf{13.}}$ a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă A este inversabilă, atunci la fel sunt și A^n și A^{n+1}, deci $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(A^{n+1}) = n$. Presupunem în continuare că A este neinversabilă. Atunci 0 este valoare proprie pentru A. Fie J matricea Jordan a lui A și fie $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k)$ blocurile Jordan din J. Avem $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(J^n)$ și $\operatorname{rang}(A^{n+1}) = \operatorname{rang}(J^{n+1})$. Avem de asemenea și $J_{n_i}(0)^n = J_{n_i}(0)^{n+1} = O_{n_i}$. Fie r suma dimensiunilor tuturor blocurilor Jordan corespunzătoare valorilor proprii nenule ale lui A. Minorul principal format cu liniile și coloanele acestor blocuri Jordan este nenul (are pe diagonala principală puterile n ale valorilor proprii nenule, iar sub diagonala principală zerouri). Pe de altă parte, orice minor de ordin $r+1$ din J^n conține cel puțin o linie nulă, deci este nul. În concluzie, avem $\operatorname{rang}(J^n) = r$. Același raționament funcționează și în cazul lui J^{n+1}, deci $\operatorname{rang}(J^{n+1}) = r$. Drept urmare, avem $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(A^{n+1}) = r$.

b) Fie $B := J_n(0)$, blocul Jordan de ordin n corespunzător lui $\lambda = 0$. Atunci $B^n = O_n$, deci $\operatorname{rang}(B^n) = 0$, pe când B^{n-1} este matricea în care elementul din colțul NE este egal cu 1, toate celelalte elemente fiind nule, deci $\operatorname{rang}(B^{n-1}) = 1$.

c) Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice cu proprietatea că $\operatorname{rang}(B^{n-1}) \neq \operatorname{rang}(B^n)$. Atunci trebuie ca B să fie neinversabilă. Vom dovedi că $B \sim J_n(0)$. Presupunând contrarul, rezultă că toate blocurile Jordan $J_{n_i}(0)$ din matricea Jordan a lui B au ordinul $n_i \leq n-1$, deci $J_{n_i}(0)^{n-1} = J_{n_i}(0)^n = O_{n_i}$. Pornind de la această observație, un raționament similar cu cel folosit la a) arată că $\operatorname{rang}(B^{n-1}) = \operatorname{rang}(B^n) = r$, unde r reprezintă suma dimensiunilor tuturor blocurilor Jordan corespunzătoare valorilor proprii nenule ale lui B.

Am ajuns astfel la o contradicție, care arată că $B \sim J_n(0)$. Prin urmare, toate matricile $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $\operatorname{rang}(B^{n-1}) \neq \operatorname{rang}(B^n)$ sunt asemenea între ele, fiind asemenea cu blocul Jordan $J_n(0)$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că

$$(1) \qquad \det(A + XY) = \det(A + YX) \quad \text{oricare ar fi } X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Vom dovedi că A este diagonalizabilă și are toate valorile proprii egale, de unde vor rezulta dintr-o dată ambele afirmații din enunț.

Fie J matricea Jordan a lui A și fie $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nesingulară în așa fel încât $A = SJS^{-1}$. Înlocuind în (1) pe X și pe Y cu SXS^{-1} și respectiv SYS^{-1}, deducem că

$$(2) \qquad \det(J + XY) = \det(J + YX) \quad \text{oricare ar fi } X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Demonstrăm mai întâi că J este o matrice diagonală. Presupunând contrarul, rezultă că J conține cel puțin un bloc Jordan de dimensiune mai mare sau egală cu 2. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că acest bloc Jordan se găsește în colțul NV al lui J. Atunci submatricea de tip 2×2 din colțul NV al lui J este de forma $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Punem în (2)

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

și respectiv

$$Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

unde x este un număr complex diferit de toate valorile proprii ale lui A. Dacă $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ sunt celelalte valori proprii (nu neapărat distincte) ale lui A, atunci

$$\begin{aligned} \det(J + XY) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} (\lambda_3 - x) \cdots (\lambda_n - x) \\ &= (\lambda^2 - 1)(\lambda_3 - x) \cdots (\lambda_n - x) \end{aligned}$$

și respectiv

$$\det(J+YX) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} (\lambda_3 - x)\cdots(\lambda_n - x) = \lambda^2(\lambda_3 - x)\cdots(\lambda_n - x).$$

Prin urmare, avem $\det(J+XY) \neq \det(J+YX)$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că matricea Jordan J a lui A este diagonală: $J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Demonstrăm acum că $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$. Presupunem, prin absurd, că A are două valori proprii diferite. Fără a restrânge generalitatea, admitem că $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Punem în (2)

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{pmatrix}$$

și respectiv

$$Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

unde x este un număr complex diferit de toate valorile proprii ale lui A. Atunci avem

$$\begin{aligned} \det(J+XY) &= \begin{vmatrix} \lambda_1+2 & 1 \\ 1 & \lambda_2+1 \end{vmatrix} (\lambda_3 - x)\cdots(\lambda_n - x) \\ &= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + 1)(\lambda_3 - x)\cdots(\lambda_n - x) \end{aligned}$$

și respectiv

$$\begin{aligned} \det(J+YX) &= \begin{vmatrix} \lambda_1+1 & 1 \\ 1 & \lambda_2+2 \end{vmatrix} (\lambda_3 - x)\cdots(\lambda_n - x) \\ &= (\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 + 1)(\lambda_3 - x)\cdots(\lambda_n - x). \end{aligned}$$

Cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deducem că $\det(J+XY) \neq \det(J+YX)$, ceea ce este absurd. Am dovedit astfel că $J = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$, de unde concluzia problemei.