Matrici diagonalizabile

Definiția 1. Două matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numesc *asemenea* dacă există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A = S^{-1}BS$. Faptul că A și B sunt asemenea se notează prin $A \sim B$. Se constată imediat că relația binară " $\sim$ " este o relație de echivalență pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește *diagonalizabilă* dacă ea este asemenea cu o matrice diagonală, adică dacă există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca matricea $S^{-1}AS$ să fie diagonală.

Teorema 2. *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă dacă și numai dacă ea posedă un sistem de n vectori proprii liniar independenți. [În acest caz matricea de similaritate S se poate alege matricea care are cei n vectori proprii pe coloane.]*

Teorema 3. *Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sunt valori proprii distincte două câte două ale unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, iar $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{C}^n$ sunt vectorii proprii asociați, atunci sistemul de vectori $\{x_1, \ldots, x_k\}$ este liniar independent.*

Teorema 4. *Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are n valori proprii distincte, atunci A este diagonalizabilă.*

Teorema 5. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici diagonalizabile. Atunci A și B sunt simultan diagonalizabile dacă și numai dacă $AB = BA$.*

Teorema 6 (teorema spectrală pentru matrici normale)**.** *Fiind dată o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, având valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1° *A este normală.*

2° *A este unitar diagonalizabilă, adică există o matrice unitară U în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

3° *Are loc egalitatea* $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$.

4° *Există o bază ortonormală în $\mathbb{C}^n$, formată din vectori proprii ai matricei A.*

Teorema 7. *Orice matrice simetrică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este ortogonal diagonalizabilă, adică există o matrice ortogonală $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $U^tAU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A. [Se știe că valorile proprii ale unei matrici simetrice sunt reale.]*

Probleme

$\boxed{\textbf{1.}}$ Să se demonstreze că singurele matrici $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care verifică relațiile $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$ și $A + B + C = O_n$ sunt $A = B = C = O_n$.

Concursul liceelor partenere cu UTCN, 2015/2

$\boxed{\textbf{2.}}$ Fie $m, n, p, q \geq 1$ și fie matricile

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ D \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{R})$$

astfel încât

$$A^t = BCD, \quad B^t = CDA, \quad C^t = DAB, \quad D^t = ABC.$$

Să se demonstreze că $(ABCD)^2 = ABCD$.

Concursul Taras Shevchenko 2004

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice astfel ca $A^{2002} = B^{2003} = I_n$ și $AB = BA$. Să se demonstreze că matricea $A + B + I_n$ este inversabilă.

Concursul Vojtěch Jarník, categoria a II-a, 2003/1

$\boxed{\textbf{4.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ și $A^{2018} = B^{2018} = I_{2018}$. Să se demonstreze că dacă $\operatorname{tr}(AB) = 2018$, atunci $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

SEEMOUS 2018/3

$\boxed{\textbf{5.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și fie $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ în așa fel încât să avem $A - A^* = 2aI_n$, unde $A^* = \bar{A}^t$.

a) Să se demonstreze că $|\det A| \geq |a|^n$.

b) Să se demonstreze că dacă $|\det A| = |a|^n$, atunci $A = aI_n$.

V. Pop, SEEMOUS 2014/3

$\boxed{\textbf{6.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $A + A^t = I_n$. Să se demonstreze că $\det A > 0$.

Concursul Vojtěch Jarník, categoria a II-a, 2007/2

$\boxed{\textbf{7.}}$ a) Să se demonstreze că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt matrice unitare, atunci $|\det(A + B)| \leq 2^n$.

b) Fie $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astel încât matricile $C + I_n$, $C^2 + I_n$ și $C^3 + I_n$ sunt toate unitare. Să se demonstreze că $C = O_n$.

Concursul Traian Lalescu, UTCN, profil electric, anul I, 2011

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și fie $A^* = \bar{A}^t$ (adică matricea având elementele $a^*_{jk} = \bar{a}_{kj}$). Demonstrați că dacă $AA^* = A^2$, atunci $A = A^*$.

K. R. Laberteaux, Amer. Math. Monthly, pb. 10377 [1994, p. 362]

$\boxed{\mathbf{9.}}$ a) Fie $n \geq 2$ un număr natural și fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $A^*AB = O_n$. Să se demonstreze că $AB = O_n$.

b) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = A^*$ și există $k \geq 1$ pentru care $A^{k+1} = A^k$. Să se demonstreze că $A^2 = A$.

V. Pop, Concursul Gr. Moisil, 2010/2

Rezolvări

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Valorile proprii ale matricilor A, B și C pot fi doar 0 sau 1. Fie n_A, n_B și n_C numărul valorilor proprii egale cu 1 ale lui A, B și respectiv C. Cum $A + B + C = O_n$, rezultă că $0 = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B + \operatorname{tr} C = n_A + n_B + n_C$, deci $n_A = n_B = n_C = 0$. Prin urmare, toate valorile proprii ale celor trei matrici sunt nule. Pe de altă parte, cele trei matrici sunt diagonalizabile (ele anulează polinomul cu rădăcini simple $f = X^2 - X$). Ținând seama de aceste observații, deducem că $A = B = C = O_n$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ ***Rezolvarea 1***. Notând $M := ABCD$, avem

$$M^t = D^tC^tB^tA^t = (ABC)(DAB)(CDA)(BCD) = M^3.$$

Pe de altă parte, avem și $M = AA^t = M^t$, deci $M^3 = M$. Cum M anulează polinomul $f = X^3 - X$ care are doar rădăcini simple, rezultă că M este diagonalizabilă. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui M și fie matricea $T := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ în așa fel încât $M = STS^{-1}$. Atunci avem $M^2 = ST^2S^{-1}$. Cum $\lambda_k \in \{-1, 0, 1\}$ și $T^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_m^2)$, egalitatea $M^2 = M$ va fi dovedită de îndată ce vom arăta că -1 nu poate fi valoare proprie pentru M. Presupunând contrarul, ar exista un vector propriu $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$ în așa fel încât $Mx = -x$, adică $AA^tx + x = 0_m$. Înmulțind la stânga cu x^t, obținem $\|A^tx\|^2 + \|x\|^2 = 0$, de unde $x = 0_m$ – contradicție.

Rezolvarea 2. Ca în prima rezolvare, se constată că $M^3 = M$, deci $(M^2 - M)(M + I_m) = O_m$. Pentru a dovedi că $M^2 = M$, este suficient să arătăm că $M + I_m = AA^t + I_m$ este inversabilă. Presupunând contrarul, ar rezulta că 0 este valoare proprie pentru $AA^t + I_m$. Există atunci un vector propriu $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$ în așa fel încât $AA^t x + x = 0_m$. Înmulțind la stânga cu x^t, obținem $\|A^t x\|^2 + \|x\|^2 = 0$, de unde $x = 0_m$ – contradicție.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Matricea A anulează polinomul $f := X^{2002} - 1$, iar matricea B anulează polinomul $g := X^{2003} - 1$. Deoarece polinoamele f și g au doar rădăcini simple, rezultă că matricile A și B sunt diagonalizabile. Cum $AB = BA$, în baza teoremei 5 rezultă că A și B sunt simultan diagonalizabile. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A, fie $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui B și fie matricile $D_1 := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $D_2 := \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Există atunci o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în așa fel încât $A = SD_1S^{-1}$ și $B = SD_2S^{-1}$. Avem

$$A + B + I_n = S(D_1 + D_2 + I_n)S^{-1}.$$

Pentru a dovedi că $A + B + I_n$ este inversabilă, este suficient să arătăm că dacă λ este o valoare proprie a lui A, iar μ este o valoare proprie a lui B, atunci $\lambda + \mu + 1 \neq 0$.

Presupunem, prin absurd, că există o valoare proprie λ a lui A precum și o valoare proprie μ a lui B astfel ca $\lambda + \mu + 1 = 0$. Avem $\lambda^{2002} = \mu^{2003} = 1$, deci există două numere întregi k și m astfel încât

$$\lambda = \cos\frac{2k\pi}{2002} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{2002} \quad \text{și} \quad \mu = \cos\frac{2m\pi}{2003} + \mathrm{i}\sin\frac{2m\pi}{2003}.$$

Condiția $\lambda + \mu + 1 = 0$ este echivalentă cu

$$\cos\frac{2k\pi}{2002} + \cos\frac{2m\pi}{2003} = -1 \quad \text{și} \quad \sin\frac{2k\pi}{2002} + \sin\frac{2m\pi}{2003} = 0.$$

Ridicând cele două egalități la pătrat și apoi adunându-le membru cu membru, obținem

$$\cos\left(2\pi\left(\frac{k}{2002} - \frac{m}{2003}\right)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Drept urmare, există un număr întreg n astfel ca

$$2\pi\left(\frac{k}{2002} - \frac{m}{2003}\right) = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{2002} - \frac{m}{2003} = \frac{3n \pm 1}{3}.$$

Ultima egalitate conduce la $3(2003k - 2002m) = 2002 \cdot 2003(3n \pm 1)$, care nu poate avea loc, întrucât membrul stâng se divide cu 3, pe când cel drept nu. Contradicția obținută arată că matricea $A + B + I_n$ este inversabilă.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Notăm $n := 2018$. Polinomul $f := X^n - 1$ are numai rădăcini simple și $f(A) = f(B) = O_n$, deci A și B sunt diagonalizabile. Cum, în plus, avem și $AB = BA$, rezultă că A și B sunt simultan diagonalizabile. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A, fie $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui B și fie matricile $D_1 := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $D_2 := \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Există atunci o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în așa fel încât $A = SD_1S^{-1}$ și $B = SD_2S^{-1}$. Atunci $AB = SD_1D_2S^{-1}$, de unde

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(D_1D_2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k.$$

Deoarece $\lambda_k^n = \mu_k^n = 1$, deducem că $|\lambda_k| = |\mu_k| = 1$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$, deci

$$n = \operatorname{tr}(AB) = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, |\mu_k| = n.$$

Prin urmare, inegalitatea de mai sus trebuie să aibă loc cu egalitate. Aceasta se întâmplă dacă și numai dacă $\lambda_k \mu_k = \lambda_1 \mu_1$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$. Avem atunci $n = n\lambda_1\mu_1$, de unde $\lambda_1\mu_1 = 1$. Am dovedit astfel că $\lambda_k\mu_k = 1$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$. Deducem de aici că $\mu_k = 1/\lambda_k = \bar{\lambda}_k$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$. Drept urmare, avem

$$\operatorname{tr} B = \sum_{k=1}^{n} \bar{\lambda}_k = \overline{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \overline{\operatorname{tr} A},$$

deci $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$, deoarece $\operatorname{tr} A \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ a) Înmulțind egalitatea $A - A^* = 2aI_n$ mai întâi de la stânga cu A, iar apoi de la dreapta cu A, deducem că $AA^* = A^2 - 2aA = A^*A$. Prin urmare, A este matrice normală, deci unitar diagonalizabilă. Fie $\lambda_k := a_k + \mathrm{i}b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$ valorile proprii ale lui A și fie $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Există atunci o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ așa încât $A = UDU^*$. Întrucât avem $A^* = UD^*U^*$, egalitatea $A - A^* = 2aI_n$ este echivalentă cu

$$U(D - D^*)U^* = 2aI_n \qquad \Leftrightarrow \qquad D - D^* = 2aI_n,$$

de unde $\lambda_k - \bar{\lambda}_k = 2\mathrm{i}b_k = 2a$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$. Prin urmare, există un $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = \mathrm{i}b$ și $\lambda_k = a_k + \mathrm{i}b$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$. Avem

$$|\det A| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b^2} \geq |b|^n = |a|^n.$$

b) Din inegalitatea anterioară este evident că egalitatea $|\det A| = |a|^n$ are loc dacă și numai dacă $a_k = 0$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$. În acest caz avem $\lambda_k = \mathrm{i}b$ oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$, deci $D = \mathrm{i}bI_n$. Drept urmare, avem $A = UDU^* = \mathrm{i}bI_n = aI_n$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Înmulțind egalitatea $A + A^t = I_n$ mai întâi de la stânga cu A, iar apoi de la dreapta cu A, deducem că $AA^t = A - A^2 = A^tA$. Cum $A^t = A^*$, rezultă de aici că A este normală, deci unitar diagonalizabilă. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A și fie $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Există atunci o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ așa încât $A = UDU^*$. Întrucât $A^t = A^* = UD^*U^*$, egalitatea $A + A^t = I_n$ este echivalentă cu

$$U(D + D^*)U^* = I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad D + D^* = I_n,$$

de unde $\operatorname{Re}\lambda_k = 1/2$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$. În consecință, singura valoare proprie reală a lui A este $1/2$. Valorile proprii complexe nereale apar în pereche cu conjugatele lor, iar $\lambda_k\bar{\lambda}_k = |\lambda_k|^2$. Ținând seama de aceste observații, precum și de faptul că $\det A$ este egal cu produsul tuturor valorilor proprii ale lui A, conchidem că $\det A > 0$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ a) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie oarecare a matricei $A + B$ și fie $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$ un vector propriu asociat lui λ. Atunci avem $(A+B)x = \lambda x$. Trecând la norma euclidiană și ținând seama că $\|Ax\| = \|Bx\| = \|x\|$ (întrucât A și B sunt unitare), deducem că

$$|\lambda|\,\|x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| = 2\|x\|,$$

deci $|\lambda| \leq 2$.

Fie acum $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui $A + B$. Conform celor demonstrate mai sus, avem $|\lambda_1| \leq 2, \ \ldots, \ |\lambda_n| \leq 2$, deci

$$|\det(A + B)| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| \leq 2^n.$$

b) Întrucât matricea $C + I_n$ este unitară, avem $(C + I_n)(C^* + I_n) = I_n$. Rezultă de aici că matricea $C^* + I_n$ este inversa matricei $C + I_n$, deci are loc și egalitatea $(C^* + I_n)(C + I_n) = I_n$. Din

$$(C + I_n)(C^* + I_n) = (C^* + I_n)(C + I_n),$$

rezultă că $CC^* = C^*C$. Prin urmare, C este matrice normală, deci unitar diagonalizabilă. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui C și fie matricea

$D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Există atunci o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ așa încât $C = UDU^*$.

Condiția ca matricile $C + I_n$, $C^2 + I_n$ și $C^3 + I_n$ să fie toate unitare este echivalentă cu următoarele egalități:

$$CC^* + C + C^* = O_n, \quad C^2(C^*)^2 + C^2 + (C^*)^2 = O_n$$

și respectiv

$$C^3(C^*)^3 + C^3 + (C^*)^3 = O_n.$$

Având în vedere că $C^* = UD^*U^*$, aceste egalități sunt echivalente cu

$$DD^* + D + D^* = O_n, \quad D^2(D^*)^2 + D^2 + (D^*)^2 = O_n$$

și respectiv

$$D^3(D^*)^3 + D^3 + (D^*)^3 = O_n.$$

Fie $\lambda_k = a_k + \mathrm{i}b_k$, $k = 1, \ldots, n$. Din egalitățile de mai sus rezultă imediat că pentru orice $k = 1, \ldots, n$ avem

$$\begin{cases} a_k^2 + b_k^2 + 2a_k = 0 \\ (a_k^2 + b_k)^2 + 2(a_k^2 - b_k^2) = 0 \\ (a_k^2 + b_k)^3 + 2(a_k^3 - 3a_k b_k^2) = 0. \end{cases}$$

Un calcul elementar arată că singurele soluții $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ale acestui sistem sunt $a_k = b_k = 0$. În consecință avem $\lambda_k = 0$ oricare ar fi $k = 1, \ldots, n$, deci $D = O_n$, de unde $C = UDU^* = O_n$.

$\boxed{8.}$ ***Rezolvarea 1***. Considerăm matricea $B := A - A^*$. Cum $B^* = -B$, urmează că B este normală (fiind strâmb hermitiană), deci unitar diagonalizabilă. Vom dovedi că toate valorile proprii ale lui B sunt nule, de unde va rezulta că $B = O_n$, adică $A = A^*$.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie arbitrară a lui B și fie $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$ un vector propriu asociat. Presupunem, prin absurd, că $\lambda \neq 0$. Observăm că $AB = O_n$ și

$$B^2 = (A - A^*)(A - A^*) = A^2 - AA^* - A^*A + (A^*)^2 = A^*(A^* - A).$$

Din egalitatea $Bx = \lambda x$ rezultă $\lambda Ax = ABx = 0_n$, deci $Ax = 0_n$ (deoarece $\lambda \neq 0$). Drept urmare, avem $x^*A^* = 0_n^t$. Ținând seama de această egalitate, deducem că

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|^2 &= \|Bx\|^2 = (Bx)^*(Bx) = x^*B^*Bx = -x^*B^2x \\ &= -x^*A^*(A^* - A)x = 0, \end{aligned}$$

deci $\lambda x = 0_n$. Dar această egalitate nu poate avea loc, întrucât $\lambda \neq 0$ și $x \neq 0_n$.

Rezolvarea 2. (Moldovan Bogdan) Ca în prima rezolvare, vom dovedi că toate valorile proprii ale matricei diagonalizabile $B := A - A^*$ sunt nule. Relația $AA^* = A^2$ din enunț implică $AA^* = (A^*)^2$. Drept urmare, avem $AB = BA^* = O_n$.

Avem $\mathrm{tr}\,(B^2) = \mathrm{tr}\,(B(A - A^*)) = \mathrm{tr}\,(BA) = \mathrm{tr}\,(AB) = 0$ și pentru orice număr întreg $k \geq 3$

$$\mathrm{tr}\,(B^k) = \mathrm{tr}\,(B(A - A^*)B \cdot B^{k-3}) = 0$$

deoarece $B(A-A^*)B = B(AB) - (BA^*)B = O_n$. În consecință, $\mathrm{tr}\,(B^k) = 0$ oricare ar fi $k \geq 2$. În particular, avem

$$\mathrm{tr}\,(B^2) = \mathrm{tr}\,(B^4) = \cdots = \mathrm{tr}\,(B^{2n}) = 0.$$

Vom folosi acum următorul rezultat cunoscut: dacă $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice astfel încât $\mathrm{tr}\,(C) = \mathrm{tr}\,(C^2) = \cdots = \mathrm{tr}\,(C^n) = 0$, atunci $C^n = O_n$. Acest rezultat aplicat matricei $C = B^2$ implică $B^{2n} = O_n$. Rezultă de aici că toate valorile proprii ale lui B sunt nule (dacă o matrice anulează un polinom, atunci toate valorile ei proprii anulează (sunt rădăcini pentru) acel polinom).

Rezolvarea 3. (folosind teorema de triangularizare unitară a lui Schur) Conform teoremei de triangularizare unitară a lui Schur, există o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în așa fel încât matricea $T := U^*AU$ să fie superior triangulară. Atunci avem $A = UTU^*$ și condiția $AA^* = A^2$ din ipoteză implică $UTU^*UT^*U^* = UT^2U^*$, adică $TT^* = T^2$. Fie t_{ij} elementul de pe linia i și coloana j în T. Cum T este superior triangulară, elementul de pe poziția (i,i) în matricea TT^* este egal cu $|t_{ii}|^2 + |t_{i,i+1}|^2 + \cdots + |t_{in}|^2$, iar elementul de pe poziția (i,i) în matricea T^2 este egal cu t_{ii}^2. Din egalitatea

$$t_{ii}^2 = |t_{ii}|^2 + |t_{i,i+1}|^2 + \cdots + |t_{in}|^2$$

rezultă că t_{ii}^2 este un număr real nenegativ. Drept urmare, avem $t_{ii} \in \mathbb{R}$ și $t_{i,i+1} = \cdots = t_{in} = 0$ oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Cu alte cuvinte, matricea T este diagonală, iar elementele de pe diagonala sa principală sunt numere reale. Deducem de aici că $T^* = T$, deci $A^* = UT^*U^* = UTU^* = A$.

Rezolvarea 4. Vom folosi faptul că funcția $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}\,(Y^*X) \quad \text{oricare ar fi } X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

este un produs scalar. Norma pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ generată de acest produs scalar este dată de

$$\|X\| = \sqrt{\operatorname{tr}(X^*X)} \quad \text{oricare ar fi } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

A demonstra că $A = A^*$ este echivalent cu a demonstra că

$$\begin{aligned}
\|A - A^*\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}\big((A - A^*)^*(A - A^*)\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}\big((A^* - A)(A - A^*)\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}\big(A^*A - A^2 - (A^*)^2 + AA^*\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}\big(A^*A\big) - \operatorname{tr}\big((A^*)^2\big) = 0.
\end{aligned}$$

Ultima egalitate are loc deoarece $AA^* = A^2$ implică $AA^* = (A^*)^2$, deci $\operatorname{tr}\big((A^*)^2\big) = \operatorname{tr}\big(AA^*\big) = \operatorname{tr}\big(A^*A\big)$.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ a) Înmulțind egalitatea $A^*AB = O_n$ la stânga cu B^*, deducem că $(AB)^*AB = O_n$. Notând $C := AB$, avem atunci $C^*C = O_n$. Pentru orice $x \in C^n$ avem $\|Cx\|^2 = (Cx)^*(Cx) = x^*C^*Cx = 0$, de unde $Cx = 0_n$. Drept urmare, are loc egalitatea $C = O_n$.

b) Cum matricea A este hermitiană, ea este unitar diagonalizabilă. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A și fie $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Fie apoi $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice unitară cu proprietatea că $A = UDU^*$. Deoarece $A^{k+1} = A^k$, rezultă că avem $\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k$, de unde $\lambda_j \in \{0, 1\}$ oricare ar fi $j = 1, \ldots, n$. Deducem de aici că $D^2 = D$, deci $A^2 = UD^2U^* = UDU^* = A$.