Valori proprii. Polinomul caracteristic

Teorema lui Cayley-Hamilton

Definiția 1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Polinomul $p_A \in \mathbb{C}[X]$, definit prin

$$p_A(t) := \det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n),$$

se numește *polinomul caracteristic* al matricei A. Explicit, avem

$$p_A(t) = t^n - E_1(A)t^{n-1} + E_2(A)t^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}E_{n-1}(A)t + (-1)^n E_n(A),$$

unde $E_k(A)$ este suma minorilor principali de ordinul k ai lui A, adică suma celor $\binom{n}{k}$ determinanți de ordin k formați cu liniile și coloanele de aceiași indici din A. În particular, $E_1(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A$,

$$E_2(A) = \sum_{1 \le i < j \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix},$$

$E_{n-1}(A) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A))$ (unde $\operatorname{adj}(A)$ reprezintă adjuncta clasică a lui A), iar $E_n(A) = \det A$.

Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A. Întrucât $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic p_A, în baza relațiilor lui Viète, avem

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = E_1(A) = \operatorname{tr} A, \\
&\sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j = E_2(A) = \sum_{1 \le i < j \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \\
&\qquad \vdots \\
&\lambda_1 \cdots \lambda_n = E_n(A) = \det A.
\end{aligned}$$

Teorema 2 (teorema lui Arthur Cayley și William Rowan Hamilton)**.** *Pentru orice corp K și orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ are loc egalitatea $p_A(A) = O_n$.*

Teorema 3. *Fiind date o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1° *Dacă $f(A) = O_n$, atunci orice valoare proprie a lui A este rădăcină a lui f (Dacă matricea A anulează polinomul f, atunci orice valoare proprie a lui A îl anulează pe f).*

2° *Dacă* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ *sunt valorile proprii distincte ale lui* A, *cu ordinele de multiplicitate* $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$, *atunci valorile proprii ale matricei* $f(A)$ *sunt* $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_m)$, *cu exact aceleași ordine de multiplicitate,* $s_1, \ldots, s_m$.

Teorema 4. *Pentru orice corp* K *și orice matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *există un unic polinom monic* $m_A \in K[X]$, *de grad minim (mai mic sau cel mult egal cu* n*) și cu proprietatea că* $m_A(A) = O_n$.

Definiția 5. Unicul polinom m_A din teorema precedentă se numește *polinomul minimal* al matricei A. În baza teoremei împărțirii cu rest, rezultă imediat că dacă $f \in K[X]$ și $f(A) = O_n$, atunci $m_A \mid f$. În particular, avem $m_A \mid p_A$ (adică polinomul minimal divide polinomul caracteristic).

Teorema 6 (Ferdinand Georg Frobenius)**.** *Fiind date un corp* K *și o matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$, *polinomul minimal* m_A *și polinomul caracteristic* p_A *au aceiași factori ireductibili în* $K[X]$.

Definiția 7. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea $A^* := \bar{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, având elementele $a^*_{jk} = \bar{a}_{kj}$, se numește *adjuncta* (*hermitiană*) a lui A. Se constată ușor că pentru orice matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și respectiv $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ au loc următoarele egalități:

$$(AB)^* = B^*A^* \qquad \text{și} \qquad (A^*)^* = A.$$

Definiția 8. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește *hermitiană*, dacă $A = A^*$. Se spune că matricea A este *strâmb hermitiană* (sau *antihermitiană*), dacă $A = -A^*$.

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește *simetrică* (respectiv *antisimetrică*), dacă $A = A^t$ (respectiv $A = -A^t$).

Definiția 9. O matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește *unitară*, dacă $UU^* = I_n$. Evident, dacă U este unitară, atunci avem și $U^*U = I_n$.

O matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește *ortogonală*, dacă $UU^t = I_n$. Evident, dacă U este ortogonală, atunci avem și $U^tU = I_n$.

Se constată imediat că $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este unitară dacă și numai dacă liniile (respectiv coloanele) lui U formează un sistem ortonormal în raport cu produsul scalar definit pe $\mathbb{C}^n$ prin

$$\langle x, y \rangle := y^*x = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

oricare ar fi $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Definiţia 10. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte *normală*, dacă ea comută cu adjuncta sa, adică $AA^* = A^*A$. Evident, orice matrice hermitiană, orice matrice strâmb hermitiană şi orice matrice unitară este normală. De asemenea, orice matrice simetrică, orice matrice antisimetrică şi orice matrice ortogonală este normală.

Probleme

$\boxed{\textbf{1.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că $A^2 \neq O_2$ și fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1° Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci

$$A^n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A - \frac{\lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} I_2 \quad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

2° Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci

$$A^n = n\lambda_1^{n-1} A - (n-1)\lambda_1^n I_2 \quad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Fie $n \geq 2$ un număr întreg și fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB \neq BA$ și $(AB)^n = (BA)^n$. Să se demonstreze că există un număr complex a în așa fel încât $(AB)^n = aI_2$.

M. Andronache, Olimpiada locală București, 1996/2

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și fie $k \geq 2$ un număr natural.

a) Să se arate că dacă $(AB)^k = O_2$, atunci $(BA)^k = O_2$.

b) Să se arate că dacă $(AB)^k = I_2$, atunci $(BA)^k = I_2$.

c) Dacă $AB \neq BA$, să se afle toate matricile $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $(AB)^k = C$ implică $(BA)^k = C$.

D. Miheț, Concursul Gr. Moisil, 2003/3

$\boxed{\textbf{4.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det A \geq 1$ și fie (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) șiruri cu proprietatea că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ oricare ar fi $n \geq 1$. Să se demonstreze că dacă toate cele patru șiruri sunt convergente, atunci $A = I_2$.

M. Andronache, Olimpiada locală București, 2001/4

$\boxed{\textbf{5.}}$ Fie $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$ notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Demonstrați că dacă unul dintre șirurile (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) este o progresie aritmetică, atunci și celelalte trei sunt progresii aritmetice.

C. Cocea, problema C:237, GM 8/1982

$\boxed{\textbf{6.}}$ Fie S mulțimea tuturor matricilor $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că a, b, c, d formează (în această ordine) o progresie aritmetică. Să se determine toate matricile $M \in S$ pentru care există un număr întreg $k > 1$ astfel încât $M^k \in S$.

Concursul William Lowell Putnam 2015, problema B3

$\boxed{\textbf{7.}}$ Considerăm mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; ab = cd \right\}$.

a) Dați exemplu de matrice $A \in M$ astfel încât $A^{2017} \in M$, $A^{2019} \in M$, dar $A^{2018} \notin M$.

b) Demonstrați că dacă $A \in M$ și există un număr întreg $k \geq 1$ așa încât matricile A^k, A^{k+1} și A^{k+2} să aparțină lui M, atunci $A^n \in M$ oricare ar fi $n \geq 1$.

Olimpiada județeană, 2018/2

$\boxed{\textbf{8.}}$ a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrici care nu comută. Demonstrați că dacă $A^3 = B^3$, atunci A^n și B^n au aceeași urmă pentru orice număr natural nenul n.

b) Dați exemplu de matrici $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care nu comută, astfel încât pentru orice număr natural nenul matricile A^n și B^n să fie diferite, dar să aibă aceeași urmă.

N. Papacu, Olimpiada județeană, 2017/3

$\boxed{\textbf{9.}}$ Fie $t \in (0, \pi)$ și fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine soluțiile $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale ecuației matriciale $X^n = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

V. Pop, Concursul Al. Papiu-Ilarian, 2010/1

$\boxed{\textbf{10.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ și $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(B^2)$. Să se demonstreze că pentru orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ are loc egalitatea $\det f(A) = \det f(B)$.

I. Savu, Olimpiada locală București, 1993/3

$\boxed{\textbf{11.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $AB - BA = B^2$. Să se demonstreze că $AB = BA$.

Concursul Vojtěch Jarník, categoria I, 2010/2

$\boxed{\textbf{12.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $A^2 + B^2 = 2AB$.

a) Demonstrați că $AB = BA$.

b) Demonstrați că $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

N. Bourbăcuț, Olimpiada națională, 2011/4

$\boxed{\textbf{13.}}$ Fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq O_2$, să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° Ecuația matricială $X^2 = A$ are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2° $A^2 \neq O_2$.

L. Panaitopol, Olimpiada județeană București, 1994/1

$\boxed{\textbf{14.}}$ Fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq O_2$, să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° Ecuația matricială $AX + XA = I_2$ are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2° A este inversabilă sau $A^2 = O_2$.

M. Chiriță, M. Piticari, Olimpiada județeană București, 1995/1

$\boxed{\textbf{15.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că ecuația matricială $AX - XA = A$ are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă și numai dacă $A^2 = O_2$.

V. Pop, Concursul Argument, Baia-Mare, 2011/2

$\boxed{\textbf{16.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $\det A = 1$. Să se demonstreze că

$$\det\left(A^2 + A - I_2\right) + \det\left(A^2 + I_2\right) = 5.$$

V. Pop, Concursul Al. Papiu-Ilarian, 2012/2

$\boxed{\textbf{17.}}$ Fie $x > 0$ un număr real și fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice astfel încât

$$\det\left(A^2 + xI_2\right) = 0.$$

Să se demonstreze că $\det\left(A^2 + A + xI_2\right) = x$.

V. Pop, Olimpiada județeană, 2006/1

$\boxed{\textbf{18.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det A = d \neq 0$ și fie A_* adjuncta clasică a lui A. Demonstrați că dacă $\det\left(A + dA_*\right) = 0$, atunci $\det\left(A - dA_*\right) = 4$.

D. Jinga, Olimpiada județeană, 2001/1

$\boxed{\textbf{19.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A^2 + A + I_2) = \det(A^2 - A + I_2) = 3$. Demonstrați că $A^2(A^2 + I_2) = 2I_2$.

Olimpiada județeană, 2016/1

$\boxed{\textbf{20.}}$ Să se demonstreze că pentru orice matrici $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și orice $x \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea

$$\det(A + xB) = \det A + \big(\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB)\big)x + (\det B)x^2.$$

$\boxed{\textbf{21.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că $AB = BA$ și

$$\det(A + B) = \det(A + 2B) = \det(A + 3B) = 1.$$

Să se demonstreze că $B^2 = O_2$.

M. Andronache, I. Savu, Olimpiada județeană București, 2000/2

$\boxed{\textbf{22.}}$ Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Determinați A^n $(n \in \mathbb{N})$.

Gh. Lobonț, Concursul M. Țarină, 2009/2

$\boxed{\textbf{23.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $A^3 = I_3$, atunci $\det(A - I_3) = 0$.

F. Vulpescu-Jalea, Olimpiada locală București, 1991/3

$\boxed{\textbf{24.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă cu proprietatea că $\det A = 1$ și $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}\left(A^{-1}\right) = 0$. Să se demonstreze că $A^3 = I_3$.

Iran 1988

$\boxed{\textbf{25.}}$ Există matrici $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB - BA)^{1993} = I_3$?

Olimpiada națională, 1993/3

$\boxed{\textbf{26.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că există $k \geq 1$ număr întreg astfel ca $A^k = O_n$. Să se demonstreze că $\det(xA + I_n) = 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{C}$.

L. Panaitopol, Olimpiada județeană București, 1991/3

$\boxed{\textbf{27.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$. Să se demonstreze că

$$\det(A + BX) = \det(A + XB) \quad \text{oricare ar fi } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

I. Savu, Olimpiada județeană București, 1997/3

$\boxed{\textbf{28.}}$ Fie $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^n \neq O_n$ și $a_{ij}a_{ji} \le 0$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Demonstrați că A posedă cel puțin două valori proprii complexe nereale.

SEEMOUS 2011/2

$\boxed{\textbf{29.}}$ Să se demonstreze că pentru orice matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $p_{AB} = p_{BA}$ (adică matricile AB și BA au același polinom caracteristic).

$\boxed{\textbf{30.}}$ Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ și fie matricile $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că dacă $m < n$, atunci

$$p_{BA}(t) = t^{n-m} p_{AB}(t) \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{C},$$

iar dacă $m > n$, atunci

$$p_{AB}(t) = t^{m-n} p_{BA}(t) \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{C}.$$

$\boxed{\textbf{31.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $\det(BA)$.

Gh. Eckstein, Olimpiada națională, 1995/3

$\boxed{\textbf{32.}}$ Fie $n \ge 2$ un număr natural și fie $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$ matrici cu proprietatea că există $k \ge 1$ așa încât $(AB)^k = O_n$. Să se demonstreze că:

a) $(AB)^3 = O_n$.

b) Dacă $\operatorname{rang}(AB) \neq 2$, atunci $(AB)^2 = O_n$.

D. Miheț, Concursul Gr. Moisil, 2009/4

$\boxed{\textbf{33.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici inversabile cu proprietatea că există numere complexe α, β, cu $|\alpha| \neq |\beta|$, în așa fel încât $\alpha AB + \beta BA = I_n$. Să se demonstreze că $\det(AB - BA) = 0$.

V. Pop, Olimpiada locală Cluj, 2006/2

$\boxed{\textbf{34.}}$ Fie matricile $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 - B^2 = I_{2n+1}$. Să se demonstreze că $\det(AB - BA) = 0$.

M. Opincariu, problema C.O:4937, GM 4/2008

$\boxed{\textbf{35.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici cu proprietatea că $B^2 = I_n$ și $A^2 = AB + I_n$. Să se demonstreze că $\det A \leq \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

M. Cavachi, Olimpiada județeană, 2007/4

$\boxed{\textbf{36.}}$ Fie numerele naturale $m, n \geq 2$ și fie matricile $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu toate nilpotente. Să se demonstreze că există un număr întreg $k \geq 1$ astfel încât $A_1^k + \cdots + A_m^k \neq O_n$.

Olimpiada națională, 2013/2

$\boxed{\textbf{37.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0$. Să se demonstreze că $A^n = O_n$.

$\boxed{\textbf{38.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $AB - BA = aA$, unde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Să se demonstreze că $A^kB - BA^k = akA^k$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că $A^n = O_n$.

IMC 1994

$\boxed{\textbf{39.}}$ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Să se demonstreze că există un număr natural k așa încât $(AB - BA)^k = O_n$.

IMC 2009

$\boxed{\textbf{40.}}$ Fie matricile $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dintre care A și C sunt inversabile. Să se demonstreze că dacă $A^kB = C^kD$ oricare ar fi $k = 1, 2, 3, \ldots$, atunci $B = D$.

M. Cavachi, Olimpiada națională, 1996/4

$\boxed{\textbf{41.}}$ Pentru orice număr natural nenul n și orice matrice coloană de forma $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, notăm cu $\delta(X)$ cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (care este un număr natural). Fie $n \geq 2$ un număr natural și fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° $|\det A| = 1$;

2° $\delta(AX) = \delta(X)$ oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

Olimpiada națională, 2018/1

$\boxed{\textbf{42.}}$ Fie $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici simetrice. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° $\det\left(A_1^2+\cdots+A_k^2\right)=0$.

2° $\det\left(A_1B_1+\cdots+A_kB_k\right)=0$ oricare ar fi $B_1,\ldots,B_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Olimpiada națională, 2017/2

$\boxed{\textbf{43.}}$ Să se demonstreze că toate valorile proprii ale unei matrice hermitiene $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt reale. În particular, toate valorile proprii ale unei matrice simetrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt reale.

$\boxed{\textbf{44.}}$ Fie $n,k\in\mathbb{N}$ și fie $A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că

$$\det\left(A_1^tA_1+\cdots+A_k^tA_k\right)\geq 0.$$

M. Cavachi, Olimpiada națională, 1995/2

$\boxed{\textbf{45.}}$ a) Fiind dat un număr întreg impar $n\geq 3$, determinați toate matricile simetrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $\operatorname{tr}\left(A^{n-1}\right)=\det A<n^n$.

b) Fie $n\geq 3$ un număr întreg impar și fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică cu proprietatea că $\operatorname{tr}\left(A^{n-1}\right)=\det A=n^n$. Demonstrați că $A^2=n^2I_n$.

c) Fiind dat un număr întreg par $n\geq 4$, demonstrați că există o matrice simetrică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $\operatorname{tr}\left(A^{n-1}\right)=\det A=n^n$ și $A^2\neq n^2I_n$.

Concursul Traian Lalescu, faza națională, secțiunea B, 2018/1

$\boxed{\textbf{46.}}$ Să se demonstreze că toate valorile proprii ale unei matrice strâmb hermitiene $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt fie nule, fie pur imaginare. În particular, toate valorile proprii ale unei matrice antisimetrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt fie nule, fie pur imaginare.

$\boxed{\textbf{47.}}$ Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică. Să se demonstreze că dacă n este impar, atunci $\det A=0$, iar dacă n este par, atunci $\det A\geq 0$.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică. Demonstrați că pentru orice $x,y\in[0,\infty)$ are loc inegalitatea

$$\det(A+xI_n)\det(A+yI_n)\geq\det(A+\sqrt{xy}\,I_n)^2.$$

O. Ganea, Olimpiada națională, 2008/4

$\boxed{\textbf{49.}}$ Să se demonstreze că toate valorile proprii ale unei matrice unitare $U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ au modulul egal cu 1. În particular, toate valorile proprii ale unei matrice ortogonale $U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au modulul egal cu 1.

$\boxed{\textbf{50.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $AA^t = I_n$. Să se demonstreze că:

a) $|\operatorname{tr} A| \leq n$;

b) pentru n impar avem $\det(A^2 - I_n) = 0$.

A. Gălățan, Olimpiada județeană, 2007/2

$\boxed{\textbf{51.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice ortogonală care nu are pe 1 ca valoare proprie și fie B matricea obținută din A prin schimbarea semnelor tuturor elementelor unei linii. Demonstrați că 1 este valoare proprie pentru B.

H. Liebeck, A. Osborne, Amer. Math. Monthly, probl. 10362 [1994]

$\boxed{\textbf{52.}}$ Fie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$x_1 + \cdots + x_n \neq 0 \quad \text{și} \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

și fie matricea $A = I_n - 2xx^t$.

a) Să se demonstreze că A este ortogonală.

b) Să se determine valorile proprii ale lui A, precum și o bază în raport cu care A are forma canonică Jordan.

c) Să se determine x știind că $(1, \ldots, 1)$ este vector propriu pentru A.

Concursul Traian Lalescu, faza națională, secțiunea B, 2017/1

$\boxed{\textbf{53.}}$ a) Să se demonstreze că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $(AB)^n = O_n$, atunci $(BA)^n = O_n$.

b) Să se arate că există $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $(XY)^{n-1} = O_n$ și $(YX)^{n-1} \neq O_n$.

Concursul Traian Lalescu, UTCN, profil electric, anul I, 2012

$\boxed{\textbf{54.}}$ Fie $n \geq 2$ număr întreg și fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $(AB)^3 = O_n$, rezultă oare că $(BA)^3 = O_n$? Justificați răspunsul.

Olimpiada națională, 2017/3

$\boxed{\textbf{55.}}$ Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Vom numi o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ *radicală* dacă există o infinitate de numere naturale k astfel încât ecuația $X^k = A$ să aibă soluții în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

a) Demonstrați că dacă A este o matrice radicală, atunci $\det A \in \{-1, 0, 1\}$ și că există o infinitate de matrici radicale care au determinantul 1.

b) Demonstrați că există o infinitate de matrici care nu sunt radicale și au determinantul 0, precum și o infinitate de matrici care nu sunt radicale și au determinantul 1.

Olimpiada națională, 2005/1

56. Fie matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dintre care cel puțin una este inversabilă. Demonstrați că polinoamele minimale ale matricilor AB și BA sunt egale. Rămâne adevărată această afirmație dacă niciuna dintre matricile A și B nu este inversabilă?

57. Fie $p \geq 3$ un număr întreg și fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice astfel încât

$$A^p = pA - (p-1)I_n \quad \text{și} \quad A^{3p} = 3pA - (3p-1)I_n.$$

Să se demonstreze că egalitatea $A^r = rA - (r-1)I_n$ are loc pentru orice număr întreg $r \geq 1$.

V. Matrosenco, Olimpiada județeană București, 2000/4

58. Fie n un număr întreg pozitiv, fie $p > n+1$ un număr prim cu proprietatea că $p \equiv 3 \pmod 4$ și fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $A \neq I_n$. Să se demonstreze că $A^p + A \neq 2I_n$.

V. Matei, Amer. Math. Monthly, problema 11510 [2010, 558]

59. Fie k un număr natural. Să se demonstreze că numărul natural minim n, pentru care există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel încât $A^{2^k} = -I_n$, este 2^k.

Concursul Traian Lalescu, faza națională, secțiunea A, 2013/3

Rezolvări

1. ***Rezolvarea 1.*** Demonstrăm mai întâi că pentru orice $n \geq 0$ este adevărată propoziția

$$P(n): \text{ ”}\exists\, u_n, v_n \in \mathbb{C} \text{ a.î. } A^n = u_nA + v_nI_2\text{”}$$

cu convenția $A^0 = I_2$. Evident, propozițiile $P(0)$ și $P(1)$ sunt adevărate (alegem $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ și respectiv $u_1 = 1$, $v_1 = 0$). Presupunând $P(n)$ adevărată pentru un $n \geq 0$ oarecare, să arătăm că și $P(n+1)$ este adevărată. Notăm $\alpha := \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ și respectiv $\beta := \det A = \lambda_1\lambda_2$. Atunci avem $p_A(t) = t^2 - \alpha t + \beta$, deci $A^2 = \alpha A - \beta I_2$, conform teoremei lui Cayley-Hamilton. Drept urmare

$$A^{n+1} = AA^n = A(u_nA + v_n)I_2 = u_nA^2 + v_nA = (\alpha u_n + v_n)A - \beta u_n I_2.$$

Rezultă de aici că definind

$$u_{n+1} := \alpha u_n + v_n \quad \text{și respectiv} \quad v_{n+1} := -\beta u_n,$$

avem $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I_2$, deci $P(n+1)$ este adevărată.

Se constată imediat că șirurile $(u_n)_{n\geq 0}$ și $(v_n)_{n\geq 0}$, definite mai sus, verifică ambele recurența de ordinul doi cu coeficienți constanți

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - \beta u_n \quad \text{și respectiv} \quad v_{n+2} = \alpha v_{n+1} - \beta v_n.$$

Ecuația caracteristică asociată celor două recurențe este $z^2 - \alpha z + \beta = 0$, cu rădăcinile λ_1 și λ_2.

1° Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci există $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ în așa fel încât

$$u_n = p\lambda_1^n + q\lambda_2^n \quad \text{și respectiv} \quad v_n = r\lambda_1^n + s\lambda_2^n \text{ oricare ar fi } n \geq 0.$$

Din condițiile inițiale $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ și respectiv $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, se obține

$$u_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \text{respectiv} \quad v_n = -\frac{\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

2° Dacă $\lambda_1 = \lambda_2\,(\neq 0)$ (deoarece, în caz contrar, am avea $A^2 = O_2$), atunci există $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ în așa fel încât

$$u_n = \lambda_1^n(pn + q) \quad \text{și respectiv} \quad v_n = \lambda_1^n(rn + s) \text{ oricare ar fi } n \geq 0.$$

Din condițiile inițiale $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ și respectiv $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, se obține

$$u_n = n\lambda_1^{n-1}, \quad \text{respectiv} \quad v_n = -(n-1)\lambda_1^n.$$

Rezolvarea 2. 1° Aplicând teorema împărțirii cu rest polinoamelor $f = X^n$ și $p_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, rezultă că există $q \in \mathbb{C}[X]$ și există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$X^n = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdot q + aX + b.$$

Obținem de aici sistemul

$$\begin{cases} a\lambda_1 + b = \lambda_1^n \\ a\lambda_2 + b = \lambda_2^n, \end{cases} \quad \text{cu soluțiile} \quad a = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \ b = -\frac{\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Întrucât $(A - \lambda_1 I_2)(A - \lambda_2 I_2) = p_A(A) = O_2$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton), deducem că $A^n = aA + bI_2 = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A - \dfrac{\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} I_2$.

2° Aplicând din nou teorema împărțirii cu rest polinoamelor $f = X^n$ și $p_A = (X - \lambda_1)^2$, rezultă că există $q \in \mathbb{C}[X]$ și există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$X^n = (X - \lambda_1)^2 \cdot q + aX + b.$$

Derivând ambii membri găsim

$$nX^{n-1} = 2(X - \lambda_1) \cdot q + (X - \lambda_1)^2 \cdot q' + a.$$

Din aceste două egalități obținem $a = n\lambda_1^{n-1}$ și $b = \lambda_1^n - a\lambda_1 = -(n-1)\lambda_1^n$. Ca mai sus, avem $(A - \lambda_1 I_2)^2 = p_A(A) = O_2$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton), de unde $A^n = aA + bI_2 = n\lambda_1^{n-1}A - (n-1)\lambda_1^n I_2$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Se aplică rezultatul din problema **1**, ținându-se seama că matricile AB și BA au aceleași valori proprii.

$\boxed{\textbf{3.}}$ a) Dacă $(AB)^k = O_2$, atunci $p_{AB}(t) = t^2$, deci $p_{BA}(t) = t^2$. Teorema lui Cayley-Hamilton implică $(BA)^2 = O_2$, de unde $(BA)^k = O_2$.

b) Egalitatea $(AB)^k = I_2$ garantează că A este inversabilă. Înmulțind această egalitate cu A^{-1} la stânga și cu A la dreapta, obținem $(BA)^k = I_2$.

c) Problema precedentă și cele demonstrate la a) și b) arată că singurele matrici cu proprietatea din enunț sunt cele de forma $C = aI_2$, cu a număr complex arbitrar.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ limitele șirurilor (a_n), (b_n), (c_n), respectiv (d_n). Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \det(A^n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n d_n - b_n c_n) = \alpha\delta - \beta\gamma$, deci există

$$\lim_{n\to\infty} (\det A)^n = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Cum $\det A \geq 1$, rezultă că în mod necesar avem $\det A = 1$, deci $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $ad - bc = \det A = 1$. Trecând la limită în relațiile de recurență

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= aa_n + bc_n, \qquad & c_{n+1} &= ca_n + dc_n \\ b_{n+1} &= ab_n + bd_n, \qquad & d_{n+1} &= cb_n + dd_n, \end{aligned}$$

deducem că $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} (a-1)\alpha & & +b\gamma & & =0 \\ & (a-1)\beta & & +b\delta & =0 \\ c\alpha & & +(d-1)\gamma & & =0 \\ & c\beta & & +(d-1)\delta & =0. \end{cases}$$

Cum $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, rezultă că acest sistem omogen admite o soluție netrivială, deci determinantul său este nul. Un calcul simplu arată că determinantul sistemului este egal cu $\big((a-1)(d-1)-bc\big)^2$. Prin urmare, trebuie să avem $(a-1)(d-1)-bc=0$. Întrucât $ad-bc=1$, deducem de aici că $a+d=2$.

Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A. Cum $\lambda_1+\lambda_2 = a+d = 2$ și $\lambda_1\lambda_2 = \det A = 1$, rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Conform problemei **1**, avem

$$A^n = nA - (n-1)I_2 = \begin{pmatrix} n(a-1)+1 & nb \\ nc & n(d-1)+1 \end{pmatrix},$$

de unde $a_n = n(a-1)+1$, $b_n = nb$, $c_n = nc$, $d_n = n(d-1)+1$. Convergența șirurilor (a_n), (b_n), (c_n) și (d_n) implică atunci $a=d=1$ și $b=c=0$, adică $A = I_2$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Fie $\alpha := \operatorname{tr} A$, $\beta := \det A$ și fie $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ șirurile definite recursiv prin $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ și

$$u_{n+1} = \alpha u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -\beta u_n \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1.$$

Atunci pentru orice $n \geq 1$ avem (a se vedea problema **1**)

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - \beta u_n, \qquad v_{n+2} = \alpha v_{n+1} - \beta v_n,$$

precum și $A^n = u_n A + v_n I_2$. Rezultă de aici că

$$a_n = a_1 u_n + v_n, \quad b_n = b_1 u_n, \quad c_n = c_1 u_n, \quad d_n = d_1 u_n + v_n.$$

Vom dovedi că dacă șirul (a_n) este o progresie aritmetică, atunci și șirurile (b_n), (c_n) și (d_n) sunt progresii aritmetice (celelalte trei posibilități se tratează analog). Avem

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_1 u_{n+2} + v_{n+2} = a_1(\alpha u_{n+1} - \beta u_n) + \alpha v_{n+1} - \beta v_n \\ &= \alpha(a_1 u_{n+1} + v_{n+1}) - \beta(a_1 u_n + v_n), \end{aligned}$$

deci

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} - \beta a_n,$$

precum și $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Scăzând membru cu membru cele două egalități, deducem că

$$(\alpha - 2)a_{n+1} = (\beta - 1)a_n \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1.$$

Cazul I. $\alpha = 2$.

Atunci, cum $a_1 \neq 0$, rezultă că $\beta = 1$. Prin urmare, valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Aplicând rezultatul problemei **1**, găsim

$$A^n = nA - (n-1)I_2 = \begin{pmatrix} 1 + n(a_1 - 1) & nb_1 \\ nc_1 & 1 + n(d_1 - 1) \end{pmatrix},$$

deci șirurile (b_n), (c_n) și (d_n) sunt progresii aritmetice.

Cazul I. $\alpha \neq 2$.

Atunci $a_{n+1} = \dfrac{\beta - 1}{\alpha - 2}\, a_n$ oricare ar fi $n \geq 1$, deci șirul (a_n) este o progresie geometrică. Fiind simultan progresie aritmetică și progresie geometrică, șirul (a_n) trebuie să fie constant. Prin urmare, trebuie să avem $\beta - 1 = \alpha - 2$, adică $\beta = \alpha - 1$. Dar atunci $p_A(t) = t^2 - \alpha t + \alpha - 1$, iar valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = \alpha - 1 \neq \lambda_1$. Conform problemei **1**, avem

$$u_n = \frac{(\alpha - 1)^n - 1}{\alpha - 2} \quad \text{și} \quad v_n = -\frac{(\alpha - 1)^n - (\alpha - 1)}{\alpha - 2},$$

deci

$$a_n = a_1 u_n + v_n = \frac{a_1 - 1}{\alpha - 2}\,(\alpha - 1)^n + \frac{\alpha - 1 - a_1}{\alpha - 2}.$$

Nu putem avea $a_1 = 1$. În adevăr, dacă $a_1 = 1$, atunci $d_1 = \operatorname{tr} A - a_1 = \alpha - 1$, deci $\alpha - 1 = \beta = a_1 d_1 - b_1 c_1 = \alpha - 1 - b_1 c_1$. Dar atunci $b_1 c_1 = 0$, în contradicție cu ipoteza. Cum $\alpha \neq 2$, avem și $\alpha - 1 \neq 1$. Prin urmare, șirul (a_n) fiind constant, trebuie să avem $\alpha - 1 = 0$, adică $\alpha = 1$ și $\beta = \alpha - 1 = 0$. Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem $A^2 = A$, deci $A^n = A$ oricare ar fi $n \geq 1$. Cu alte cuvinte, în acest caz șirurile (a_n), (b_n), (c_n) și (d_n) sunt toate constante și concluzia din enunț are loc.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Fie $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$. Notând $m := (b+c)/2$ și $r := (c-b)/2$, rezultă că $M = \begin{pmatrix} m - 3r & m - r \\ m + r & m + 3r \end{pmatrix}$. Dacă $r = 0$, atunci

$$M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix} \tag{1}$$

și se constată imediat că $M^2 \in S$. Deci orice matrice de forma (1) satisface cerința din enunț.

Presupunem în continuare că $r \neq 0$. Fie λ_1 și λ_2 valorile proprii ale lui M. Acestea sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea $t^2 - 2mt - 8r^2 = 0$, care are discriminantul $\Delta = 4m^2 + 32r^2 > 0$. Cum $\lambda_1\lambda_2 = -8r^2 < 0$, deducem că λ_1 și λ_2 sunt reale, distincte, nenule și de semne contrare. Notăm pentru fiecare $k \geq 0$

$$u_k := \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{și respectiv} \quad v_k := \frac{-\lambda_1^k\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Conform problemei **1**, avem $M^k = u_kM + v_kI_2$ oricare ar fi $k \geq 0$. Se constată imediat că $M^k \in S$ dacă și numai dacă $v_k = 0$, adică dacă și numai dacă $\lambda_1^{k-1} = \lambda_2^{k-1}$.

Dacă există $k > 1$ așa încât $M^k \in S$, atunci trebuie să avem $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Cum $\lambda_1\lambda_2 < 0$, rezultă că $\lambda_2 = -\lambda_1$, deci $2m = \operatorname{tr} M = 0$. Prin urmare, M este de forma

$$M = \begin{pmatrix} -3r & -r \\ r & 3r \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Reciproc, dacă M este de forma (2), atunci avem $\lambda_1 = -\lambda_2 = 2\sqrt{2}|r|$, deci $\lambda_1^{k-1} = \lambda_2^{k-1}$ oricare ar fi k impar. Prin urmare, $M^k \in S$ oricare ar fi $k > 1$ impar.

În concluzie, matricile $M \in S$ cu proprietatea din enunț sunt cele de forma (1) sau (2), cu $m, r \in \mathbb{R}$ arbitrare.

$\boxed{7.}$ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\alpha := \operatorname{tr} A$, $\beta := \det A$ și fie $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ șirurile definite recursiv prin $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ și

$$u_{n+1} = \alpha u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -\beta u_n \quad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

Atunci avem $A^n = u_nA + v_nI_2$ oricare ar fi $n \geq 0$ (a se vedea rezolvarea problemei **1**).

Observăm că dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, atunci avem $ab = cd$, deci

$$A^n \in M \iff (au_n + v_n)bu_n = cu_n(du_n + v_n) \iff (b - c)u_nv_n = 0. \tag{3}$$

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$. Dacă $b = c$, atunci în baza lui (3) deducem că $A^n \in M$ oricare ar fi $n \geq 1$. Presupunem în continuare că $b \neq c$. Deoarece matricile A^k, A^{k+1} și A^{k+2} aparțin lui M, din (3) rezultă că

$$u_kv_k = u_{k+1}v_{k+1} = u_{k+2}v_{k+2} = 0.$$

Dacă $u_k = v_k = 0$, atunci $A^k = O_2$, deci valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ și prin urmare $\alpha = \beta = 0$. Din teorema lui Cayley-Hamilton rezultă că $A^2 = O_2$, deci $A^n = O_2$ oricare ar fi $n \geq 2$. În consecință, avem $A^n \in M$ oricare ar fi $n \geq 1$.

Dacă $u_k = 0$ și $v_k \neq 0$, atunci $u_{k+1} = v_k$, $v_{k+1} = 0$ și $u_{k+2} = \alpha v_k$, $v_{k+2} = -\beta v_k$. Cum $u_{k+2}v_{k+2} = 0$, trebuie să avem $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$. Dacă $\alpha = 0$, atunci $A^2 = \beta I_2$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton). Se demonstrează imediat că

$$A^{2k} = \beta^k I_2 \quad \text{și} \quad A^{2k-1} = \beta^{k-1} A \quad \text{oricare ar fi } k \geq 1.$$

Dacă însă $\beta = 0$, atunci $A^2 = \alpha A$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton). Se demonstrează imediat că

$$A^n = \alpha^{n-1} A \quad \text{oricare ar fi } n \geq 2.$$

Cum $A \in M$, rezultă în ambele situații că $A^n \in M$ oricare ar fi $n \geq 1$.

Cazul $u_k \neq 0$, $v_k = 0$ se tratează similar.

a) Căutăm o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, cu $b \neq c$, care să aibă valori proprii nenule distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Atunci avem (a se vedea rezolvarea problemei **1**)

$$u_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad v_n = -\frac{\lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Condițiile $A^{2017} \in M$, $A^{2019} \in M$, $A^{2018} \notin M$ sunt echivalente (conform lui (3)) cu

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_1^{2017} - \lambda_2^{2017}\right)\left(\lambda_1^{2016} - \lambda_2^{2016}\right) &= 0 \\
\left(\lambda_1^{2019} - \lambda_2^{2019}\right)\left(\lambda_1^{2018} - \lambda_2^{2018}\right) &= 0 \\
\left(\lambda_1^{2018} - \lambda_2^{2018}\right)\left(\lambda_1^{2017} - \lambda_2^{2017}\right) &\neq 0.
\end{aligned}$$

Aceste condiții sunt îndeplinite, de exemplu, dacă $\lambda_1 = \varepsilon$ și $\lambda_2 = \bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$. În adevăr, atunci se constată ușor că au loc următoarele relații: $\lambda_1^{2016} = \lambda_2^{2016} = 1$, $\lambda_1^{2019} = \lambda_2^{2019} = 1$, dar $\lambda_1^{2017} \neq \lambda_2^{2017}$ și $\lambda_1^{2018} \neq \lambda_2^{2018}$.

Prin urmare, este suficient să găsim o matrice $A \in M$ care să aibă valorile proprii ε și ε^2, adică să aibă polinomul caracteristic $p_A(t) = t^2 + t + 1$. Un exemplu de astfel de matrice este $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ a) Din $A^3 = B^3$ rezultă că $(\det A)^3 = (\det B)^3$. Deducem de aici că $\det A = \det B =: \beta$, deoarece $\det A$ și $\det B$ sunt numere reale. Fie $\alpha := \operatorname{tr} A$ și $\gamma := \operatorname{tr} B$. Atunci, în baza teoremei lui Cayley-Hamilton, avem

$$A^2 = \alpha A - \beta I_2 \quad \text{și} \quad B^2 = \gamma B - \beta I_2.$$

Din aceste egalități rezultă că

$$A^3 = (\alpha^2 - \beta)A - \alpha\beta I_2 \quad \text{și} \quad B^3 = (\gamma^2 - \beta)B - \gamma\beta I_2,$$

deci

$$(\alpha^2 - \beta)A - \alpha\beta I_2 = (\gamma^2 - \beta)B - \gamma\beta I_2.$$

Dacă $\alpha^2 - \beta \neq 0$, atunci am avea

$$A = \frac{\gamma^2 - \beta}{\alpha^2 - \beta}\, B + \frac{\beta(\alpha - \gamma)}{\alpha^2 - \beta}\, I_2.$$

Dar atunci am avea $AB = BA$, în contradicție cu ipoteza. Contradicția obținută arată că $\alpha^2 - \beta = 0$. Urmează apoi imediat că $\gamma^2 - \beta = 0$ și că $\alpha\beta = \gamma\beta$. Deducem că $\alpha^2 = \gamma^2$, deci $\gamma = \alpha$ sau $\gamma = -\alpha$.

Dacă $\gamma = \alpha$, atunci A și B au același polinom caracteristic, deci au aceleași valori proprii λ_1 și λ_2 și prin urmare

$$\operatorname{tr}(A^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n = \operatorname{tr}(B^n) \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\gamma = -\alpha \neq \alpha$, atunci $\alpha \neq 0$ și $2\alpha\beta = 0$, deci $\beta = 0$. În acest caz avem $A^3 = \alpha^2 A$ și $B^3 = \gamma^2 B = \alpha^2 B$. Cum $A^3 = B^3$, rezultă că $A = B$, deci $\operatorname{tr}(A^n) = \operatorname{tr}(B^n)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ îndeplinesc cerințele din enunț.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o soluție a ecuației matriciale din enunț. Există atunci $u, v \in \mathbb{R}$ (a se vedea rezolvarea problemei **1**) astfel ca $X^n = uX + vI_2$. Întrucât $\sin t \neq 0$, nu putem avea $u = 0$, deci

$$X = \frac{1}{u}\,(X^n - vI_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{-v + \cos t}{u} & -\dfrac{\sin t}{u} \\[2ex] \dfrac{\sin t}{u} & \dfrac{-v + \cos t}{u} \end{pmatrix}.$$

Drept urmare, orice soluție a ecuației matriciale din enunț este de forma $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Mai mult, deoarece avem

$$1 = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \det X^n = (a^2 + b^2)^n,$$

rezultă că $a^2 + b^2 = 1$. Drept urmare, există un unic $\alpha \in [0, 2\pi)$ în așa fel încât $X = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Dar atunci se știe că

$$X^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Deci X este soluție a ecuației din enunț dacă și numai dacă $\cos n\alpha = \cos t$ și $\sin n\alpha = \sin t$, adică dacă și numai dacă

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n.$$

În concluzie, soluțiile ecuației date sunt toate matricile de forma

$$X = \begin{pmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix},$$

unde $\alpha_k = \frac{t+2k\pi}{n}$, iar $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

10. Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem

$$A^2 - (\mathrm{tr}\, A)A + (\det A)I_2 = O_2 \quad \text{și} \quad B^2 - (\mathrm{tr}\, B)B + (\det B)I_2 = O_2,$$

deci

$$\mathrm{tr}\,(A^2) = (\mathrm{tr}\, A)^2 - 2\det A \quad \text{și} \quad \mathrm{tr}\,(B^2) = (\mathrm{tr}\, B)^2 - 2\det B.$$

Deoarece $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$ și $\mathrm{tr}\,(A^2) = \mathrm{tr}\,(B^2)$, deducem de aici că $\det A = \det B$. Drept urmare, avem $p_A = p_B =: p$ (matricile A și B au același polinom caracteristic). Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ și fie $g, h \in \mathbb{C}[X]$ polinoame cu proprietatea că $f = pg + h$, polinomul h având gradul cel mult 1. Cum $p(A) = p(B) = O_2$, rezultă că $f(A) = h(A)$ și $f(B) = h(B)$. Dacă $h = b \in \mathbb{C}$, atunci avem

$$\det f(A) = \det h(A) = \det(bI_2) = b^2$$

și analog $\det f(B) = b^2$. Dacă $h = aX + b$, cu $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, atunci avem

$$\det f(A) = \det h(A) = \det(aA + bI_2) = a^2 \det\left(A + \frac{b}{a}\, I_2\right) = a^2 p\left(-\frac{b}{a}\right)$$

și analog $\det f(B) = a^2 p\left(-\frac{b}{a}\right)$. În ambele cazuri avem $\det f(A) = \det f(B)$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ ***Rezolvarea 1.*** Fie $\alpha := \operatorname{tr} B$ și $\beta := \det B$. Conform teoremei lui Cayley–Hamilton, avem

$$B^2 = \alpha B - \beta I_2.$$

Înmulțind relația din enunț $AB - BA = B^2$ mai întâi de la stânga cu B, iar apoi de la dreapta cu B, obținem

$$BAB - B^2A = B^3 \qquad \text{și} \quad AB^2 - BAB = B^3.$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, găsim

$$\begin{aligned} 2B^3 &= AB^2 - B^2A = A(\alpha B - \beta I_2) - (\alpha B - \beta I_2)A \\ &= \alpha(AB - BA) = \alpha B^2. \end{aligned}$$

Cum $2B^3 = 2BB^2 = 2B(\alpha B - \beta I_2) = 2\alpha B^2 - 2\beta B$, deducem că

$$\alpha B^2 - 2\beta B = O_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\alpha^2 - 2\beta)B - \alpha\beta I_2 = O_2.$$

Dacă $\alpha^2 - 2\beta \neq 0$, atunci $B = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2 - 2\beta}\, I_2$, deci $AB = BA$. Dacă însă $\alpha^2 - 2\beta = 0$, atunci trebuie să avem și $\alpha\beta = 0$, deci $\alpha = \beta = 0$. Dar atunci $B^2 = O_2$, deci $AB = BA$.

Rezolvarea 2. Înmulțind egalitatea $B^2 = AB - BA$ la dreapta cu B, găsim $B^3 = AB^2 - BAB = AB^2 - B(B^2 + BA) = AB^2 - B^2A - B^3$, de unde $2B^3 = AB^2 - B^2A$. Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui B. Avem

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= \operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0, \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 &= \operatorname{tr}(B^3) = \frac{1}{2}\, \operatorname{tr}(AB^2 - B^2A) = 0. \end{aligned}$$

Se constată ușor că aceste două egalități implică $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, deci polinomul caracteristic al lui B este $p_B(t) = t^2$. Drept urmare, $B^2 = O_2$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton), de unde $AB = BA$.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ Fie $\sigma(A)$ și $\sigma(B)$ mulțimea valorilor proprii ale (spectrul) lui A și respectiv B. Fie apoi $\lambda \in \sigma(B)$ și fie $v \in \mathbb{C}^2$, $v \neq 0_2$ un vector propriu asociat. Avem $Bv = \lambda v$ și $B^2 v = \lambda^2 v$, de unde

$$\begin{aligned} 0_2 &= (A^2 + B^2 - 2AB)v = A^2 v + \lambda^2 v - 2\lambda A v \\ &= (A^2 - 2\lambda A + \lambda^2 I_2)v = (\lambda I_2 - A)^2 v. \end{aligned}$$

Rezultă de aici că matricea $\lambda I_2 - A$ este singulară, deci $\lambda \in \sigma(A)$. Am dovedit astfel că $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Întrucât matricile A și A^t au același polinom caracteristic, are loc egalitatea $\sigma(A) = \sigma(A^t)$. Transpunând egalitatea din enunț, obținem

$$(A^t)^2 + (B^t)^2 = 2B^t A^t.$$

Pornind de la această egalitate, se arată exact ca mai sus că $\sigma(A^t) \subseteq \sigma(B^t)$. În consecință, avem $\sigma(B) \subseteq \sigma(A) = \sigma(A^t) \subseteq \sigma(B^t) = \sigma(B)$, de unde $\sigma(A) = \sigma(B)$ și prin urmare $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ (ultima implicație are loc doar din cauză că A și B sunt de tipul 2×2 !).

Din $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, rezultă că $\operatorname{tr}(A - B) = 0$. Aplicând teorema lui Cayley-Hamilton matricei $A - B$, deducem că

$$(A - B)^2 + \det(A - B) I_2 = O_2. \tag{1}$$

Dar

$$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA, \tag{2}$$

de unde $\operatorname{tr}\left((A - B)^2\right) = 0$. Trecând acum la urme în relația (1), găsim $\det(A - B) = 0$, deci $(A - B)^2 = O_2$. Această egalitate împreună cu (2) implică $AB = BA$.

$\boxed{\mathbf{13.}}$ $\boxed{1^\circ \Rightarrow 2^\circ}$ Presupunem, prin absurd, că există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^2 = A$, dar $A^2 = O_2$. Atunci avem $X^4 = A^2 = O_2$, deci valorile proprii ale lui X sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Prin urmare, polinomul caracteristic al lui X este $p_X(t) = t^2$. Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem $A = X^2 = O_2$, în contradicție cu ipoteza.

$\boxed{2^\circ \Rightarrow 1^\circ}$ Vom da două demonstrații pentru această implicație.

Rezolvarea 1. Fie $\alpha := \operatorname{tr} A$ și $\beta := \det A$. Dacă $\beta = 0$, atunci conform teoremei lui Cayley-Hamilton avem $A^2 = \alpha A$ și $\alpha \neq 0$. Fie $x \in \mathbb{C}$ astfel ca $x^2 = 1/\alpha$. Avem $A = \frac{1}{\alpha} A^2 = (xA)^2$, deci $X := xA$ este soluție a ecuației matriciale $X^2 = A$.

Presupunem în continuare că $\beta \neq 0$. Căutăm o soluție a ecuației $X^2 = A$ de forma $X = xA + yI_2$. Cum $A^2 = \alpha A - \beta I_2$, avem

$$\begin{aligned} X^2 &= x^2A^2 + 2xyA + y^2I_2 = x^2(\alpha A - \beta I_2) + 2xyA + y^2I_2 \\ &= (\alpha x^2 + 2xy)A + (y^2 - \beta x^2)I_2. \end{aligned}$$

Rezolvarea va fi încheiată de îndată ce vom dovedi că există $x, y \in \mathbb{C}$ așa încât $y^2 - \beta x^2 = 0$ și $\alpha x^2 + 2xy = 1$. Fie $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ în așa fel încât $\gamma^2 = \beta$. Alegând $y = \pm\gamma x$, avem $y^2 - \beta x^2 = 0$ și

$$\alpha x^2 + 2xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(\alpha \pm 2\gamma) = 1.$$

Nu putem avea simultan $\alpha + 2\gamma = 0$ și $\alpha - 2\gamma = 0$, deoarece, în caz contrar, am avea $\gamma = 0$. Prin urmare, este suficient să alegem $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ astfel ca $\alpha + 2\varepsilon\gamma \neq 0$, apoi să alegem $x \in \mathbb{C}$ astfel ca $x^2 = 1/(\alpha + 2\varepsilon\gamma)$ și în fine să alegem $y = \varepsilon\gamma x$. Matricea $X = xA + yI_2$ va fi soluție a ecuației $X^2 = A$.

Rezolvarea 2. Fie J matricea Jordan a lui A și fie $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice nesingulară astfel încât $A = SJS^{-1}$.

Dacă $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, atunci alegem $x, y \in \mathbb{C}$ astfel ca $x^2 = \lambda_1$ și $y^2 = \lambda_2$. Matricea $X := S \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} S^{-1}$ satisface $X^2 = A$.

Dacă $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, atunci $\lambda \neq 0$ (altfel am avea $A^2 = O_2$). Matricea $X := S \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} S^{-1}$ este soluție a ecuației matriciale $X^2 = A$ dacă și numai dacă $x^2 = \lambda$ și $2xy = 1$. Or, este simplu de văzut că există numere complexe x și y care să satisfacă simultan aceste două egalități.

$\boxed{\textbf{14.}}$ $\boxed{1^\circ \Rightarrow 2^\circ}$ Presupunem, prin absurd, că există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX + XA = I_2$, dar A nu este inversabilă și $A^2 \neq O_2$. Atunci $\det A = 0$ și $\alpha := \operatorname{tr} A \neq 0$. Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem $A^2 = \alpha A$. Din $AX + XA = I_2$ rezultă $\operatorname{tr}(AX) + \operatorname{tr}(XA) = 2$, deci $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(XA) = 1$. Cum $\det(AX) = \det A \det X = 0$, în baza teoremei lui Cayley-Hamilton deducem că $(AX)^2 = AX$. Înmulțind egalitatea $AX + XA = I_2$ la dreapta cu AX, obținem $(AX)^2 + XA^2X = AX$, deci $AX + \alpha XAX = AX$, de unde $XAX = O_2$. Înmulțind această egalitate la stânga cu A, găsim $(AX)^2 = O_2$, adică $AX = O_2$. Analog se arată că și $XA = O_2$, de unde contradicția $I_2 = AX + XA = O_2 + O_2 = O_2$.

$\boxed{2^\circ \Rightarrow 1^\circ}$ Dacă A este inversabilă, atunci ecuația $AX + XA = I_2$ are, evident, soluția $X = \frac{1}{2} A^{-1}$. Rămâne așadar să arătăm că dacă $A \neq O_2$ și $A^2 = O_2$, atunci există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $AX + XA = I_2$. Vom da două demonstrații pentru această afirmație.

Rezolvarea 1. Deoarece $A^2 = O_2$, rezultă că valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, deci $\operatorname{tr} A = \det A = 0$. Prin urmare, A este de forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, cu $a^2 + bc = 0$. Întrucât $A \neq O_2$, rezultă că sau $b \neq 0$, sau $c \neq 0$. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $b \neq 0$ (cazul $c \neq 0$ se tratează similar). Atunci avem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$. Căutând o soluție de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ a ecuației $AX + XA = I_2$, după efectuarea unor calcule de rutină pe care nu le mai reproducem, se constată că matricea $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}$ este soluție.

Rezolvarea 2. Deoarece $A^2 = O_2$, rezultă că valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Cum $A \neq O_2$, matricea Jordan a lui A este $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Este suficient să dovedim că ecuația $JY + YJ = I_2$ are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. În adevăr, dacă $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este o matrice nesingulară cu proprietatea că $A = SJS^{-1}$, atunci notând $X := SYS^{-1}$, avem

$$AX + XA = SJYS^{-1} + SYJS^{-1} = S(JY + YJ)S^{-1} = I_2.$$

Or, se constată imediat că $Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ verifică $JY + YJ = I_2$.

$\boxed{\mathbf{15.}}$ *Necesitatea.* Admitem că există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $AX - XA = A$. Atunci avem $\operatorname{tr} A = 0$. Notând $\beta := \det A$, din teorema lui Cayley-Hamilton rezultă că $A^2 = \beta I_2$. Ținând seama de aceasta, prin adunarea membru cu membru a egalităților

$$A^2 = AXA - XA^2 \quad \text{și} \quad A^2 = A^2X - AXA,$$

obținem $2A^2 = A^2X - XA^2 = O_2$, de unde $A^2 = O_2$.

Suficiența. Presupunând că $A^2 = O_2$, vom arăta că există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $AX - XA = A$. Dacă $A = O_2$, atunci se poate alege $X = O_2$, sau $X = I_2$, sau $X = A$. Admitem în continuare că $A \neq O_2$. Atunci matricea Jordan a lui A este $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Este suficient să dovedim că ecuația $JY - YJ = J$ are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. În adevăr, dacă $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este o matrice nesingulară cu proprietatea că $A = SJS^{-1}$, atunci notând $X := SYS^{-1}$, avem

$$AX - XA = SJYS^{-1} - SYJS^{-1} = S(JY - YJ)S^{-1} = SJS^{-1} = A.$$

Or, se constată imediat că $Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifică $JY - YJ = J$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Fie $\alpha := \operatorname{tr} A$. Deoarece $\det A = 1$, rezultă că polinomul caracteristic al lui A este de forma $p_A(t) = t^2 - \alpha t + 1$. Fie t_1 și t_2 rădăcinile ecuației $t^2 + t - 1 = 0$. Avem

$$\begin{aligned}
&\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) \\
&\quad = \det\big((t_1 I_2 - A)(t_2 I_2 - A)\big) + \det\big((\mathrm{i} I_2 - A)(-\mathrm{i} I_2 - A)\big) \\
&\quad = p_A(t_1)p_A(t_2) + p_A(\mathrm{i})p_A(-\mathrm{i}) \\
&\quad = (t_1^2 - \alpha t_1 + 1)(t_2^2 - \alpha t_2 + 1) + (-\alpha\,\mathrm{i})(\alpha\,\mathrm{i}).
\end{aligned}$$

Întrucât $t_1^2 = 1 - t_1$, $t_2^2 = 1 - t_2$, $t_1 + t_2 = -1$ și $t_1 t_2 = -1$, deducem că

$$\begin{aligned}
&\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) \\
&\quad = \big(2 - (\alpha+1)t_1\big)\big(2 - (\alpha+1)t_2\big) + \alpha^2 \\
&\quad = 4 - 2(\alpha+1)(t_1 + t_2) + (\alpha+1)^2 t_1 t_2 + \alpha^2 \\
&\quad = 2 + 2(\alpha+1) - (\alpha+1)^2 + \alpha^2 = 5.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{17.}}$ Fie $p_A \in \mathbb{R}[X]$ polinomul caracteristic al lui A, $p_A(t) = \det(tI_2 - A)$. Avem

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A^2 + xI_2) = \det\big((\mathrm{i}\sqrt{x}\, I_2 - A)(-\mathrm{i}\sqrt{x}\, I_2 - A)\big) \\
&= \det(\mathrm{i}\sqrt{x}\, I_2 - A)\det(-\mathrm{i}\sqrt{x}\, I_2 - A) = p_A(\mathrm{i}\sqrt{x})\, p_A(-\mathrm{i}\sqrt{x}),
\end{aligned}$$

deci unul dintre numerele complexe nereale $\mathrm{i}\sqrt{x}$ și $-\mathrm{i}\sqrt{x}$ este rădăcină a lui p_A. Cum $p_A \in \mathbb{R}[X]$, rezultă că ambele numere complexe sunt rădăcini ale lui p_A, deci $p_A(t) = (t - \mathrm{i}\sqrt{x})(t + \mathrm{i}\sqrt{x}) = t^2 + x^2$. Fie

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

rădăcinile ecuației $t^2 + t + x = 0$. Atunci $A^2 + A + xI_2 = (t_1 I_2 - A)(t_2 I_2 - A)$, de unde

$$\begin{aligned}
\det(A^2 + A + xI_2) &= p_A(t_1)p_A(t_2) = (t_1^2 + x)(t_2^2 + x) \\
&= (t_1 t_2)^2 + (t_1^2 + t_2^2)x + x^2 \\
&= x^2 + (1 - 2x)x + x^2 = x.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{18.}}$ Fie $p_A \in \mathbb{R}[X]$ polinomul caracteristic al lui A, $p_A(t) = \det(tI_2 - A)$. Ținând seama că $AA_* = dI_2$, avem

$$\begin{aligned} 0 &= d \det(A + dA_*) = \det A \det(A + dA_*) = \det(A^2 + d^2 I_2) \\ &= \det(\mathrm{i}dI_2 - A) \det(-\mathrm{i}dI_2 - A) = p_A(\mathrm{i}d)\, p_A(-\mathrm{i}d), \end{aligned}$$

deci unul dintre numerele complexe nereale $\mathrm{i}d$ și $-\mathrm{i}d$ este rădăcină a lui p_A. Cum $p_A \in \mathbb{R}[X]$, rezultă că ambele numere complexe sunt rădăcini ale lui p_A. Pe de altă parte, produsul celor două rădăcini ale lui p_A este egal cu $\det A = d$. Drept urmare, avem $d^2 = d$, de unde $d = 1$ și $p_A(t) = t^2 + 1$. Deducem de aici că

$$\begin{aligned} \det(A - dA_*) &= \det(A - A_*) = \det A \det(A - A_*) = \det(A^2 - I_2) \\ &= \det(I_2 - A) \det(-I_2 - A) = p_A(1)\, p_A(-1) = 4. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{19.}}$ Fie $\alpha := \operatorname{tr} A$, $\beta := \det A$ și $p_A(t) := t^2 - \alpha t + \beta = \det(A - tI_2)$ polinomul caracteristic al lui A. Fie apoi $\varepsilon := \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$ și $\omega := \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$. Avem

$$A^2 + A + I_2 = (A - \varepsilon I_2)(A - \bar{\varepsilon} I_2) \text{ și } A^2 - A + I_2 = (A - \omega I_2)(A - \bar{\omega} I_2).$$

Deducem de aici că

$$\begin{aligned} 3 &= \det(A^2 + A + I_2) = p_A(\varepsilon) p_A(\bar{\varepsilon}) = (\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon + \beta)(\bar{\varepsilon}^2 - \alpha\bar{\varepsilon} + \beta) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1, \end{aligned}$$

de unde

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta = 2. \tag{1}$$

Analog, $3 = \det(A^2 - A + I_2) = p_A(\omega) p_A(\bar{\omega}) = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$, de unde

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta = 2. \tag{2}$$

Se constată imediat că sistemul format cu ecuațiile (1) și (2) are doar soluțiile ($\alpha = 0$, $\beta = -1$) și ($\alpha = 0$, $\beta = 2$). În primul caz, avem $A^2 = I_2$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton), de unde $A^4 = I_2$, deci $A^4 + A^2 = 2I_2$. Analog, în cel de-al doilea caz avem $A^2 = -2I_2$, de unde $A^4 = 4I_2$, deci $A^4 + A^2 = 2I_2$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Se verifică prin calcul direct.

$\boxed{\textbf{21.}}$ Fie funcția polinomială definită prin $f(x) := \det(A + xB)$. Conform problemei **20**, avem

$$f(x) = \det A + \big(\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB)\big)x + (\det B)x^2 \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{C}.$$

Conform ipotezei, avem $f(1) = f(2) = f(3) = 1$. Întrucât f este polinom de grad cel mult 2, rezultă că $f(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$, deci $\det A = 1$, $\det B = 0$ și $\operatorname{tr}(AB) = \alpha\beta$, unde $\alpha := \operatorname{tr} A$ și $\beta := \operatorname{tr} B$. Conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem $A^2 = \alpha A - I_2$ și $B^2 = \beta B$. Cum A și B comută, avem $(AB)^2 = A^2B^2$. Teorema lui Cayley-Hamilton aplicată matricei AB implică $A^2B^2 = \alpha\beta AB$, deoarece $\det(AB) = 0$. Drept urmare, avem

$$\alpha\beta AB = A^2B^2 = (\alpha A - I_2)\beta B = \alpha\beta AB - \beta B,$$

de unde $\beta = 0$ sau $B = O_2$. În ambele situații rezultă că $B^2 = O_2$.

$\boxed{\textbf{22.}}$ Un calcul simplu arată că polinomul caracteristic al lui A este dat de $p_A(t) = (t+1)^3$. Aplicând teorema împărțirii cu rest polinoamelor $f = X^n$ și $p_A = (X+1)^3$, rezultă că există $q \in \mathbb{C}[X]$ și există $b, c, d \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$X^n = (X+1)^3 \cdot q + bX^2 + cX + d.$$

Derivând de două ori această egalitate, găsim

$$nX^{n-1} = \Big((X+1)^3 \cdot q\Big)' + 2bX + c$$

și

$$n(n-1)X^{n-2} = \Big((X+1)^3 \cdot q\Big)'' + 2b.$$

Evaluând polinoamele de mai sus pentru $x = -1$ obținem

$$b = \frac{(-1)^n n(n-1)}{2}, \quad c = (-1)^n n(n-2), \quad d = \frac{(-1)^n (n-1)(n-2)}{2}.$$

Întrucât $(A + I_3)^3 = p_A(A) = O_3$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton), deducem că

$$\begin{aligned} A^n &= bA^2 + cA + dI_3 \\ &= (-1)^n \left(\frac{n(n-1)}{2}\, A^2 + n(n-2)A + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\, I_3\right). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{23.}}$ Fie $p_A \in \mathbb{R}[X]$ polinomul caracteristic al lui A. Cum p_A are gradul 3, rezultă că el are cel puțin o rădăcină reală. Pe de altă parte, rădăcinile lui

p_A (adică valorile proprii ale lui A) sunt rădăcini de ordinul 3 ale unității (conform teoremei 3). Întrucât singura rădăcină reală de ordinul 3 a unității este 1, deducem că 1 este rădăcină pentru polinomul p_A. Drept urmare, avem $0 = p_A(1) = \det(I_3 - A)$, de unde concluzia.

$\boxed{\textbf{24.}}$ Deoarece $E_1(A) = \operatorname{tr} A = 0$, $E_3(A) = \det A = 1$ și

$$E_2(A) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)) = \frac{1}{\det A} \operatorname{tr}\left(A^{-1}\right) = 0,$$

rezultă că polinomul caracteristic al lui A are forma $p_A(t) = t^3 - 1$. Aplicând teorema lui Cayley–Hamilton, deducem că $A^3 = I_3$.

$\boxed{\textbf{25.}}$ Răspunsul este NU. Presupunem, prin absurd, că există $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în așa fel încât $(AB - BA)^{1993} = I_3$. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $C := AB - BA$. Conform teoremei 3 a), avem

$$\lambda_1^{1993} = \lambda_2^{1993} = \lambda_3^{1993} = 1,$$

deci $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Pe de altă parte, avem și $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} C = 0$. Drept urmare, λ_1, λ_2 și λ_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, deci polinomul caracteristic al lui C are forma $p_C(t) = t^3 - \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$. Aplicând teorema lui Cayley–Hamilton, deducem că $C^3 = \alpha I_3$, de unde

$$I_3 = C^{1993} = (C^3)^{664} C = \alpha^{664} C,$$

deci $C = \beta I_3$, unde $\beta = 1/\alpha^{664}$. Dar atunci avem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \beta$, ceea ce este absurd.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Deoarece matricea A este nilpotentă, rezultă că toate valorile sale proprii sunt nule, deci polinomul său caracteristic este $p_A(t) = t^n$. Dacă $x = 0$, atunci afirmația din enunț este evidentă, iar dacă $x \neq 0$, atunci avem

$$\det(xA + I_n) = (-x)^n \det\left(-\frac{1}{x} I_n - A\right) = (-x)^n p_A\left(-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

$\boxed{\textbf{27.}}$ Vom rezolva mai întâi problema în ipoteza suplimentară că B este inversabilă. Atunci pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem

$$\begin{aligned} \det(A + BX) &= \det(B^{-1}(A + BX)B) = \det(B^{-1}AB + XB) \\ &= \det(B^{-1}BA + XB) = \det(A + XB). \end{aligned}$$

Renunțăm acum la ipoteza inversabilității lui B. Fie r cel mai mic modul al unei valori proprii nenule a lui B ($r = \infty$ dacă toate valorile proprii ale lui B sunt nule). Atunci pentru orice $\varepsilon \in (0, r)$ avem

$$\det(\varepsilon I_n + B) = (-1)^n \det(-\varepsilon I_n - B) = (-1)^n p_B(-\varepsilon) \neq 0.$$

Prin urmare, matricea perturbată $B_\varepsilon := \varepsilon I_n + B$ este nesingulară pentru orice $\varepsilon \in (0, r)$. Mai mult, avem $AB_\varepsilon = \varepsilon A + AB = \varepsilon A + BA = B_\varepsilon A$. În baza celor demonstrate mai sus, deducem că

$$\det(A + B_\varepsilon X) = \det(A + XB_\varepsilon) \quad \text{oricare ar fi } \varepsilon \in (0, r).$$

Făcând $\varepsilon \searrow 0$ și ținând seama că determinanții din egalitatea precedentă sunt funcții polinomiale de grad cel mult n în variabila ε, rezultă că și în acest caz avem $\det(A + BX) = \det(A + XB)$.

28. Pentru $i = j$, condiția $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ din enunț implică $a_{ii} = 0$ oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Prin urmare, avem $E_1(A) = \operatorname{tr} A = 0$ și

$$E_2(A) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ji} & 0 \end{vmatrix} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}a_{ji} \geq 0.$$

Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A. În baza relațiilor lui Viète, avem

$$\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = E_1(A)^2 - 2E_2(A) \leq 0. \tag{1}$$

Vom dovedi că A are cel puțin o valoare proprie complexă nereală λ_j. Aceasta va încheia demonstrația, deoarece atunci și $\bar{\lambda}_j \neq \lambda_j$ este valoare proprie complexă nereală a lui A.

Presupunem, prin absurd, că toate valorile proprii ale lui A sunt reale. Din (1) rezultă atunci că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dar atunci polinomul caracteristic al lui A are forma $p_A(t) = t^n$ și conform teoremei lui Cayley–Hamilton ar trebui să avem $A^n = O_n$, în contradicție cu ipoteza.

29. Presupunem mai întâi că una dintre matricile A și B, spre exemplu A, este inversabilă. Atunci pentru orice $t \in \mathbb{C}$ avem

$$\begin{aligned} p_{AB}(t) &= \det(tI_n - AB) = \det\left(A^{-1}(tI_n - AB)A\right) = \det(tI_n - BA) \\ &= p_{BA}(t). \end{aligned}$$

Presupunem acum că A și B sunt singulare. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A și fie $r := \min\{|\lambda_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_k \neq 0\}$ (cu convenția

$r = \infty$ dacă A nu are nici o valoare proprie nenulă). Atunci pentru orice $\varepsilon \in (0, r)$ avem $\det(A - \varepsilon I_n) \neq 0$, adică matricea $A - \varepsilon I_n$ este nesingulară. Conform celor demonstrate mai sus, avem

$$\det\big(tI_n - (A - \varepsilon I_n)B\big) = \det\big(tI_n - B(A - \varepsilon I_n)\big)$$

pentru orice $\varepsilon \in (0, r)$ și orice $t \in \mathbb{C}$. Făcând $\varepsilon \searrow 0$, obținem

$$p_{AB}(t) = p_{BA}(t) \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{C}.$$

$\boxed{\mathbf{30.}}$ Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $m < n$ (cazul $m > n$ se tratează analog). Fie $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea obținută prin completarea lui A cu $n-m$ linii nule, iar $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea obținută prin completarea lui B cu $n-m$ coloane nule. Atunci avem

$$CD = \begin{pmatrix} A \\ O_{n-m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & O_{n,n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix}$$

și $DC = BA$, deci $p_{CD}(t) = t^{n-m}p_{AB}(t)$ și $p_{DC}(t) = p_{BA}(t)$ oricare ar fi $t \in \mathbb{C}$. Întrucât $p_{CD} = p_{DC}$ (a se vedea problema **29**), rezultă că pentru orice $t \in \mathbb{C}$ avem $p_{BA}(t) = t^{n-m}p_{AB}(t)$.

$\boxed{\mathbf{31.}}$ Polinomul caracteristic al matricei AB este $p_{AB}(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Conform problemei **30**, avem $p_{AB}(t) = tp_{BA}(t)$ oricare ar fi $t \in \mathbb{C}$, deci $p_{BA}(t) = t^2 - 3t + 2$. Valorile proprii ale lui BA sunt rădăcinile ecuației $p_{BA}(t) = 0$, adică 1 și 2. Drept urmare, avem $\det(BA) = 1 \cdot 2 = 2$.

$\boxed{\mathbf{32.}}$ a) Matricea AB fiind nilpotentă, are toate valorile proprii nule, deci polinomul său caracteristic este $p_{AB}(t) = t^n$. Conform problemei **30**, avem $p_{AB}(t) = t^{n-2}p_{BA}(t)$ oricare ar fi $t \in \mathbb{C}$, deci $p_{BA}(t) = t^2$. Aplicând teorema lui Cayley-Hamilton, deducem că $(BA)^2 = O_2$, de unde

$$(AB)^3 = A(BA)^2B = O_n.$$

b) Avem $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A \leq 2$. Prin urmare, dacă $\operatorname{rang}(AB) \neq 2$, atunci $\operatorname{rang}(AB) \leq 1$. Deducem de aici că $(AB)^2 = \big(\operatorname{tr}(AB)\big)AB = O_n$, deoarece AB are toate valorile proprii nule, deci $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

$\boxed{\mathbf{33.}}$ Vom demonstra afirmația din enunț fără ipoteza că A și B sunt inversabile. Deoarece $|\alpha| \neq |\beta|$, trebuie să avem $\alpha + \beta \neq 0$. Din egalitatea $\alpha AB + \beta BA = I_n$ rezultă

$$\alpha(AB - BA) = I_n - (\alpha + \beta)BA = (\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\, I_n - BA\right),$$

de unde

$$(1) \qquad \alpha^n \det(AB - BA) = (\alpha+\beta)^n p_{BA}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right).$$

Similar, avem

$$-\beta(AB-BA) = I_n - (\alpha+\beta)AB = (\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\, I_n - AB\right),$$

de unde

$$(2) \qquad (-\beta)^n \det(AB - BA) = (\alpha+\beta)^n p_{AB}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right).$$

Întrucât $p_{AB} = p_{BA}$ (a se vedea problema **29**), din (1) și (2) deducem că $\alpha^n \det(AB-BA) = (-\beta)^n \det(AB-BA)$. Dacă $\det(AB-BA) \neq 0$, atunci trebuie să avem $\alpha^n = (-\beta)^n$, de unde $|\alpha| = |\beta|$, în contradicție cu ipoteza. Drept urmare, $\det(AB - BA) = 0$.

$\boxed{\mathbf{34.}}$ Notăm $C := A+B$, $D := A-B$, $X := AB - BA$ și $I := I_{2n+1}$. Avem

$$\begin{aligned} CD &= (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB = I - X, \\ DC &= (A-B)(A+B) = A^2 - B^2 + AB - BA = I + X, \end{aligned}$$

de unde $X = I - CD = DC - I$. Ținând seama că, în baza rezultatului din problema **29** avem $\det(I - CD) = p_{CD}(1) = p_{DC}(1) = \det(I - DC)$, deducem că

$$\det X = \det(I - CD) = \det(I - DC) = (-1)^{2n+1}\det(DC - I) = -\det X.$$

Drept urmare, avem $\det X = 0$.

$\boxed{\mathbf{35.}}$ Dacă $\det A = 0$, atunci nu e nimic de demonstrat. Presupunem în continuare că A are determinantul nenul, deci A este inversabilă. Din egalitatea $A^2 - I_n = AB$ rezultă că $A - A^{-1} = B$, de unde

$$I_n = B^2 = \left(A - A^{-1}\right)^2 = A^2 - 2I_n + \left(A^{-1}\right)^2,$$

adică $A^2 - 3I_n + \left(A^{-1}\right)^2 = O_n$. Înmulțind cu A^2, deducem că

$$A^4 - 3A^2 + I_n = O_n.$$

Prin urmare, matricea A anulează polinomul $f := X^4 - 3X^2 + 1$. Conform teoremei 3, orice valoare proprie λ a lui A este rădăcină a lui f, adică

$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 = 0$, de unde $\lambda^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Prin urmare, toate valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale lui A sunt reale și verifică

$$|\lambda_k| \leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oricare ar fi } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Rezultă atunci că $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n \leq |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| \leq \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$\boxed{\textbf{36.}}$ Vom folosi următoarea

Lemă. Dacă $z_1, \ldots, z_r$ sunt numere complexe cu proprietatea că

$$z_1^k + \cdots + z_r^k = 0 \quad \text{oricare ar fi } k \in \{1, \ldots, r\},$$

atunci $z_1 = \cdots = z_r = 0$.

Demonstrația lemei. Notăm $p_k := z_1^k + \cdots + z_r^k$ $(k \geq 1)$ și

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 + \cdots + z_r, \\ e_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} z_i z_j, \\ &\vdots \\ e_r &= z_1 \cdots z_r, \end{aligned}$$

polinoamele simetrice elementare în variabilele $z_1, \ldots, z_r$. În baza ipotezei și a relațiilor lui Newton (a se vedea rezolvarea problemei următoare), deducem că $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 0$. Prin urmare, $z_1 \ldots, z_r$ sunt rădăcinile ecuației $z^r - e_1 z^{r-1} + e_2 z^{r-2} - \cdots + (-1)^r e_r = 0$, adică ale ecuației $z^r = 0$. Rezultă astfel că $z_1 = \cdots = z_r = 0$. $\square$

Trecând la rezolvarea problemei, să presupunem că $A_1^k + \cdots + A_m^k = O_n$ pentru orice $k \geq 1$. Atunci

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tr}(A_1^k) + \cdots + \operatorname{tr}(A_m^k) = 0 \quad \text{oricare ar fi } k \geq 1.$$

Fie $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in} \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A_i (incluzând multiplicitățile), $i = 1, \ldots, m$. Atunci $\lambda_{i1}^k, \ldots, \lambda_{in}^k$ sunt valorile proprii ale lui A_i^k, deci

$$\operatorname{tr}(A_i^k) = \lambda_{i1}^k + \cdots + \lambda_{in}^k.$$

Ținând seama de (1), rezultă că

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_{i1}^k+\cdots+\lambda_{in}^k\right)=0 \quad \text{oricare ar fi } k\geq 1.$$

În baza lemei, deducem că $\lambda_{i1}=\cdots=\lambda_{in}=0$, deci $A_i^n=O_n$ oricare ar fi $i=1\ldots,m$. Dar această concluzie este în contradicție cu ipoteza că măcar una dintre matricile A_i nu este nilpotentă.

$\boxed{\textbf{37.}}$ Fie $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A (incluzând multiplicitățile). Atunci valorile proprii ale lui A^k sunt $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k$, pentru orice $k\geq 1$, deci $\operatorname{tr}(A^k)=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k$. Pentru fiecare $k\geq 1$ notăm

$$p_k:=\lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k.$$

Notăm de asemenea

$$\begin{aligned} e_1 &= \lambda_1+\cdots+\lambda_n,\\ e_2 &= \sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j,\\ &\ \vdots\\ e_n &= \lambda_1\cdots\lambda_n, \end{aligned}$$

polinoamele simetrice elementare în variabilele $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Ținând seama că $p_1=p_2=\cdots=p_n=0$, în baza identităților lui Newton

$$\begin{aligned} e_1 &= p_1,\\ 2e_2 &= e_1p_1-p_2,\\ 3e_3 &= e_2p_1-e_1p_2+p_3,\\ 4e_4 &= e_3p_1-e_2p_2+e_1p_3-p_4,\\ &\ \vdots\\ ne_n &= e_{n-1}p_1-e_{n-2}p_2+\cdots+(-1)^{n-2}e_1p_{n-1}+(-1)^{n-1}p_n, \end{aligned}$$

deducem că $e_1=e_2=\cdots=e_n=0$. Prin urmare, polinomul caracteristic al lui A este $p_A(t)=t^n-e_1t^{n-1}+e_2t^{n-2}-\cdots+(-1)^ne_n=t^n$. Teorema lui Cayley-Hamilton garantează acum că $A^n=O_n$.

$\boxed{\textbf{38.}}$ a) Procedăm prin inducție după k. Pentru $k=1$ egalitatea din enunț are loc în baza ipotezei. Presupunem că egalitatea $A^kB-BA^k=akA^k$ are loc pentru un număr natural k și dovedim că ea are loc și pentru $k+1$. Înmulțind la stânga cu A, obținem

$$\begin{aligned} akA^{k+1} &= A^{k+1}B - ABA^k = A^{k+1}B - (BA + aA)A^k \\ &= A^{k+1}B - BA^{k+1} - aA^{k+1}, \end{aligned}$$

de unde $A^{k+1}B - BA^{k+1} = a(k+1)A^{k+1}$.

b) Trecând la urme în egalitatea $akA^k = A^kB - BA^k$, deducem că $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ oricare ar fi $k \geq 1$. Conform problemei **37**, rezultă că $A^n = O_n$.

$\boxed{\textbf{39.}}$ Notăm $C := AB - BA$. Se constată imediat că egalitatea din enunț este echivalentă cu $AC = CA$. Pentru orice $r \geq 0$ avem atunci $AC^r = C^rA$, deci $C^{r+1} = C^r(AB - BA) = C^rAB - C^rBA = A(C^rB) - (C^rB)A$. Rezultă de aici că $\operatorname{tr}(C^{r+1}) = 0$ oricare ar fi $r \geq 0$. În particular, avem

$$\operatorname{tr} C = \operatorname{tr}(C^2) = \cdots = \operatorname{tr}(C^n) = 0.$$

În baza rezultatului din problema **37**, deducem că $C^n = O_n$.

$\boxed{\textbf{40.}}$ Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A și fie

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \det(\lambda I_n - A)$$

polinomul caracteristic al lui A. Fie apoi $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui C și fie

$$g(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_n) = \det(\lambda I_n - C)$$

polinomul caracteristic al lui C. Deoarece $\det A \neq 0 \neq \det C$ și determinantul unei matrici este egal cu produsul tuturor valorilor sale proprii, rezultă că $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fie polinomul $h := fg$, fie $\alpha := h(0)$ și fie polinomul $h^*(\lambda) := h(\lambda) - \alpha$. Avem $\alpha = f(0)g(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \mu_1 \cdots \mu_n \neq 0$. De asemenea, deoarece $f(A) = O_n = g(C)$ (conform teoremei lui Cayley-Hamilton) și h se divide atât cu f cât și cu g, rezultă că $h(A) = h(C) = O_n$. Conform ipotezei (în h^* termenul liber este egal cu 0), avem și

$$h^*(A)B = h^*(C)D.$$

Ținând seama de aceste observații, avem

$$\begin{aligned} O_n &= h(A)B = \big(h^*(A) + \alpha I_n\big)B = h^*(A)B + \alpha B \\ &= h^*(C)D + \alpha B = \big(h(C) - \alpha I_n\big)D + \alpha B \\ &= h(C)D + \alpha(B - D) \\ &= \alpha(B - D), \end{aligned}$$

de unde $B = D$, deoarece $\alpha \neq 0$.

$\boxed{\textbf{41.}}$ Vom nota cu 0_n matricea coloană nulă din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. În rezolvare vor fi folosite următoarele afirmații evidente:

A1. Dacă $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ și $d \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $d \mid \delta(X)$, atunci $d \mid \delta(AX)$.

A2. Dacă $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ și $d \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $d \mid \delta(X_1)$, ..., $d \mid \delta(X_k)$, atunci $d \mid \delta(a_1X_1 + \cdots + a_kX_k)$.

$\boxed{1^\circ \Rightarrow 2^\circ}$ Presupunem că $\det A = \pm 1$.

Demonstrăm mai întâi că pentru orice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ cu $\delta(X) = 1$, avem $\delta(AX) = 1$. Presupunem, prin absurd, că există o matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ așa încât $\delta(X) = 1$, dar $\delta(AX) \neq 1$. Nu putem avea $\delta(AX) = 0$, deoarece, în caz contrar, am avea $AX = 0_n$, deci $X = 0_n$ întrucât A este inversabilă. Dar atunci $\delta(X) = 0$, ceea ce ar fi absurd. Prin urmare, $\delta(AX) =: d \geq 2$. Cum $d \mid \delta(AX)$, din **A1** rezultă succesiv $d \mid \delta(A^2X)$, $d \mid \delta(A^3X)$ ș.a.m.d. Fie $p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + (-1)^n \det A$ polinomul caracteristic al lui A. Din teorema lui Cayley-Hamilton rezultă că

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A = (-1)^{n+1}(\det A)I_n = \pm I_n.$$

Înmulțind ambii membri ai egalității precedente la dreapta cu X, obținem

$$A^nX + a_{n-1}A^{n-1}X + \cdots + a_1AX = \pm X.$$

În baza afirmației **A2**, deducem de aici că

$$d \mid \delta(A^nX + a_{n-1}A^{n-1}X + \cdots + a_1AX) = \delta(\pm X) = 1,$$

ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că $\delta(AX) = 1$.

Fie acum $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ arbitrar și fie $d := \delta(X)$. Dacă $d = 0$, atunci $X = 0_n$, de unde $AX = 0_n$, deci $\delta(AX) = 0$. Dacă $d \geq 1$, atunci $X = dY$ cu $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ și $\delta(Y) = 1$. Cum $AX = dAY$ și $\delta(AY) = 1$ (conform celor demonstrate mai sus), deducem că $\delta(AX) = d$.

$\boxed{2^\circ \Rightarrow 1^\circ}$ Admitem acum că $\delta(AX) = \delta(X)$ oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, dar $d := \det A \neq \pm 1$.

Dacă $d = 0$, atunci există $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ nenulă așa încât $AX = 0_n$. Dar atunci am avea $0 = \delta(AX) = \delta(X)$, contradicție (dacă X este nenulă, atunci $\delta(X) > 0$).

Presupunem în continuare că $|d| \geq 2$. Sistemul

$$AX = (d\ 0\ 0\ \ldots\ 0)^t$$

are soluție unică și pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem

$$x_i = \frac{1}{d} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & d & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_{1i},$$

unde A_{1i} este complementul algebric al elementului a_{1i} din matricea A. Așadar, notând $X = (A_{11}\ A_{12}\ \ldots\ A_{1n})^t$, avem $AX = (d\,0\ \ldots\ 0)^t$. Conform ipotezei, avem $d = \delta(AX) = \delta(X)$, deci d divide fiecare dintre numerele $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$. Analog, considerând sistemele

$$AX = (0\ d\ 0\ \ldots\ 0)^t,\ \ldots,\ AX = (0\ 0\ \ldots\ 0\ d)^t,$$

se ajunge la concluzia că $d \mid A_{ij}$ oricare ar fi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Rezultă de aici că $d^n \mid \det(\operatorname{adj}(A))$, unde $\operatorname{adj}(A)$ reprezintă adjuncta clasică a lui A (în adevăr, d divide toate elementele de pe fiecare coloană din $\operatorname{adj}(A)$). Cum $A \cdot \operatorname{adj}(A) = dI_n$, deducem că $d^{n+1} \mid d \cdot \det(\operatorname{adj}(A)) = d^n$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că $d = \det A = \pm 1$.

$\boxed{\textbf{42.}}$ Implicația $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ fiind evidentă, vom dovedi că $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Presupunând că $\det(A_1^2 + \cdots + A_k^2) = 0$, rezultă că 0 este valoare proprie a matricei $A_1^2 + \cdots + A_k^2$, deci există $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_n$ astfel ca $(A_1^2 + \cdots + A_k^2)x = 0_n$. Înmulțind această egalitate la stânga cu x^t, obținem

$$x^t A_1^t A_1 x + \cdots + x^t A_k^t A_k x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|A_1 x\|^2 + \cdots + \|A_k x\|^2 = 0,$$

de unde $A_1 x = \cdots = A_k x = 0_n$.

Fie $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ arbitrar alese. Deoarece

$$(A_1 B_1 + \cdots + A_k B_k)^t x = B_1^t A_1 x + \cdots + B_k^t A_k x = 0_n,$$

rezultă că 0 este valoare proprie pentru $(A_1 B_1 + \cdots + A_k B_k)^t$, cu x vector propriu asociat. Prin urmare, avem $\det(A_1 B_1 + \cdots + A_k B_k)^t = 0$, adică $\det(A_1 B_1 + \cdots + A_k B_k) = 0$ (s-a folosit faptul că determinantul unei matrice este egal cu produsul tuturor valorilor proprii ale acelei matrice).

$\boxed{\textbf{43.}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice hermitiană, fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a lui A și fie $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$ un vector propriu asociat lui λ. Atunci avem

$$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad x^* A x = \lambda x^* x = \lambda \|x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x^* A x}{\|x\|^2}\,.$$

Pe de altă parte, $Ax = \lambda x \;\;\Rightarrow\;\; x^*A^* = \bar{\lambda}x^*$, adică $x^*A = \bar{\lambda}x^*$, întrucât $A^* = A$. Înmulțind la dreapta cu x, găsim $x^*Ax = \bar{\lambda}x^*x = \bar{\lambda}\|x\|^2$, de unde $\bar{\lambda} = \dfrac{x^*Ax}{\|x\|^2}$. Drept urmare, avem $\bar{\lambda} = \lambda$, deci $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{44.}}$ Fie $A := A_1^tA_1 + \cdots + A_k^tA_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci avem $A^t = A$, deci A este matrice simetrică și prin urmare are toate valorile proprii reale (conform problemei **43**). Cum $\det A$ este egal cu produsul tuturor valorilor proprii ale lui A, este suficient să arătăm că toate valorile proprii ale lui A sunt nenegative. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ o valoare proprie oarecare a lui A și fie $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_n$ un vector propriu corespunzător. Din egalitatea $Ax = \lambda x$ deducem că

$$\begin{aligned} \lambda x^tx = x^tAx &= x^t\left(A_1^tA_1 + \cdots + A_k^tA_k\right)x \\ &= x^tA_1^tA_1x + \cdots + x^tA_k^tA_kx \\ &= (A_1x)^t(A_1x) + \cdots + (A_kx)^t(A_kx), \end{aligned}$$

adică

$$\lambda\|x\|^2 = \|A_1x\|^2 + \cdots + \|A_kx\|^2 \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{\|A_1x\|^2 + \cdots + \|A_kx\|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

$\boxed{\textbf{45.}}$ a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică astfel încât

$$\operatorname{tr}\left(A^{n-1}\right) = \det A < n^n. \tag{1}$$

Conform problemei **43**, toate valorile proprii ale lui A sunt reale. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aceste valori proprii. Atunci $\lambda_1^{n-1}, \ldots, \lambda_n^{n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A^{n-1}, iar relația (1) este echivalentă cu

$$\lambda_1^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1} = \lambda_1 \cdots \lambda_n < n^n. \tag{2}$$

Pe de altă parte, n fiind impar, inegalitatea mediilor aplicată numerelor reale nenegative $\lambda_1^{n-1}, \ldots, \lambda_n^{n-1}$ implică

$$\left(\frac{\lambda_1^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1}}{n}\right)^n \geq \lambda_1^{n-1} \cdots \lambda_n^{n-1}. \tag{3}$$

Din (2) și (3) deducem că

$$\frac{\left(\lambda_1^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1}\right)^n}{n^n} \geq (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{n-1} = \left(\lambda_1^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1}\right)^{n-1},$$

de unde

$$\left(\lambda_1^{n-1}+\cdots+\lambda_n^{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{\lambda_1^{n-1}+\cdots+\lambda_n^{n-1}}{n^n}-1\right)\geq 0.$$

Ținând seama că n este impar, în baza relației (2) conchidem că

$$\lambda_1^{n-1}+\cdots+\lambda_n^{n-1}\leq 0,$$

deci $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Cum A este ortogonal diagonalizabilă, rezultă de aici că $A=O_n$. Deci singura matrice simetrică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care satisface (1) este $A=O_n$.

b) Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică astfel încât

$$\operatorname{tr}\left(A^{n-1}\right)=\det A=n^n \tag{4}$$

și fie $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ valorile proprii ale lui A. Atunci avem

$$\lambda_1^{n-1}+\cdots+\lambda_n^{n-1}=\lambda_1\cdots\lambda_n=n^n, \tag{5}$$

deci în inegalitatea mediilor (3) avem egalitate, ambii membri fiind egali cu n^{n^2-n} (conform lui (4)). Ținând seama de această observație, deducem că

$$\lambda_1^{n-1}=\cdots=\lambda_n^{n-1}=n^{n-1},$$

de unde $|\lambda_1|=\cdots=|\lambda_n|=n$, întrucât n este impar.

Fie $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ și fie $U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice ortogonală cu proprietatea că $A=U^tDU$. Atunci avem

$$A^2=U^tD^2U=U^t\cdot n^2I_n\cdot U=n^2I_n.$$

c) Fie $n\geq 4$ un număr întreg par, fie

$$\begin{aligned}\lambda_1&:=n\sqrt[n-1]{2+\sqrt{5}}, &\quad \lambda_3&=\cdots=\lambda_{n-1}=n,\\ \lambda_2&:=n\sqrt[n-1]{2-\sqrt{5}}, &\quad \lambda_n&=-n\end{aligned}$$

și fie $A:=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Atunci A este simetrică și se verifică imediat că relația (5) are loc, deci A satisface (4). Pe de altă parte, este clar că $A^2\neq n^2I_n$.

46. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice strâmb hermitiană, fie $\lambda\in\mathbb{C}$ o valoare proprie a lui A și fie $x\in\mathbb{C}^n$, $x\neq 0_n$ un vector propriu asociat lui λ. Atunci avem

$$Ax=\lambda x\quad\Rightarrow\quad x^*Ax=\lambda x^*x=\lambda\|x\|^2\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{x^*Ax}{\|x\|^2}\,.$$

Pe de altă parte, $Ax = \lambda x \;\Rightarrow\; x^*A^* = \bar{\lambda}x^*$, adică $-x^*A = \bar{\lambda}x^*$, întrucât $A^* = -A$. Înmulțind la dreapta cu x, găsim $-x^*Ax = \bar{\lambda}x^*x = \bar{\lambda}\|x\|^2$, de unde $\bar{\lambda} = -\dfrac{x^*Ax}{\|x\|^2}$. Drept urmare, avem $\bar{\lambda} = -\lambda$, deci fie $\lambda = 0$, fie $\lambda = \mathrm{i}b$, cu $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\boxed{\textbf{47.}}$ Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A, adică rădăcinile polinomului caracteristic $p_A \in \mathbb{R}[X]$ al lui A. Dacă n este impar, atunci p_A are cel puțin o rădăcină reală. Conform problemei precedente, aceasta trebuie să fie 0, deci $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n = 0$. Presupunem în continuare că n este par. Dacă A are valoarea proprie 0, atunci $\det A = 0$ (ca mai sus). Dacă 0 nu este valoare proprie pentru A, atunci valorile proprii sunt toate de forma $\mathrm{i}b$, cu $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cum $p_A \in \mathbb{R}[X]$, orice rădăcină a lui p_A apare în pereche cu conjugata ei. Ținând seama de această observație, precum și de faptul că $\mathrm{i}b(-\mathrm{i}b) = b^2$, deducem că $\det A > 0$.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Fie $p_A \in \mathbb{R}[X]$ polinomul caracteristic al lui A,

$$p_A(t) = t^n - E_1(A)t^{n-1} + E_2(A)t^{n-2} - \cdots + (-1)^n E_n(A),$$

unde $E_k(A)$ este suma minorilor principali de ordinul k ai lui A. Întrucât orice minor principal de ordinul k al lui A este determinantul unei matrice antisimetrice din $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, în baza rezultatului din problema precedentă deducem că $E_k(A) = 0$ pentru k impar și $E_k(A) \geq 0$ pentru k par. Prin urmare, p_A este un polinom cu toți coeficienții nenegativi, de forma

$$p_A(t) = t^n + \alpha_2 t^{n-2} + \alpha_4 t^{n-4} + \cdots,$$

deci sau $p_A(-t) = p_A(t)$ oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, sau $p_A(-t) = -p_A(t)$ oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Ținând seama de această observație, avem

$$\begin{aligned}
&\det(A + xI_n)\det(A + yI_n) \geq \det(A + \sqrt{xy}\, I_n)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (-1)^n p_A(-x)(-1)^n p_A(-y) \geq \Big((-1)^n p_A(-\sqrt{xy})\Big)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & p_A(x)\, p_A(y) \geq p_A^2(\sqrt{xy}).
\end{aligned}$$

Am redus astfel problema la a demonstra că dacă $P \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom cu coeficienți nenegativi, atunci are loc inegalitatea

$$P(x)\, P(y) \geq P^2(\sqrt{xy}) \quad \text{oricare ar fi } x, y \in [0, \infty).$$

Fie $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ și fie $x, y \in [0, \infty)$. Conform inegalității lui Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, avem

$$\begin{aligned} P^2(\sqrt{xy}) &= \left(a_n\sqrt{x^n y^n} + a_{n-1}\sqrt{x^{n-1}y^{n-1}} + \cdots + a_1\sqrt{xy} + a_0\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a_n x^n}\sqrt{a_n y^n} + \cdots + \sqrt{a_1 x}\sqrt{a_1 y} + \sqrt{a_0}\sqrt{a_0}\right)^2 \\ &\le (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)(a_n y^n + \cdots + a_1 y + a_0) \\ &= P(x)\,P(y). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{49.}}$ Fie $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice unitară, fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a lui U și fie $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$ un vector propriu asociat lui λ. Atunci avem $Ux = \lambda x$, deci $x^* U^* = \bar{\lambda} x^*$. Prin înmulțirea celor două egalități, găsim

$$\begin{aligned} (x^*U^*)(Ux) = (\bar{\lambda}x^*)(\lambda x) \;&\Leftrightarrow\; x^*(U^*U)x = |\lambda|^2 x^* x \\ &\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

deci $|\lambda| = 1$, deoarece $\|x\|^2 > 0$.

$\boxed{\textbf{50.}}$ a) Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei A, care este ortogonală. Conform problemei **49**, avem $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$, deci

$$|\mathrm{tr}\, A| = |\lambda_1 + \cdots + \lambda_n| \le |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = n.$$

b) ***Rezolvarea 1***. Dacă n este impar, atunci polinomul $p_A \in \mathbb{R}[X]$, de grad n, are cel puțin o rădăcină reală. Conform problemei **49**, această rădăcină are modulul 1, deci este sau 1 sau -1. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} 0 &= p_A(1)\,p_A(-1) = \det(I_n - A)\,\det(-I_n - A) \\ &= \det\big((I_n - A)(-I_n - A)\big) = \det(A^2 - I_n). \end{aligned}$$

Rezolvarea 2. Avem

$$\begin{aligned} \det(A^2 - I_n) &= \det\big((A - I_n)(A + I_n)\big) = \det(A - I_n)\det(A + I_n) \\ &= \det(A - I_n)\det(A^t + I_n) = \det\big((A - I_n)(A^t + I_n)\big) \\ &= \det(AA^t + A - A^t - I_n) = \det(A - A^t) = 0, \end{aligned}$$

deoarece n este impar, iar matricea $A - A^t$ este antisimetrică.

$\boxed{\textbf{51.}}$ Presupunem, prin absurd, că 1 nu este valoare proprie pentru B. Din problema **49** rezultă că valorile proprii ale lui A sunt -1 și perechi $(\lambda, \bar{\lambda})$, cu $|\lambda| = 1$. Fie ℓ ordinul de multiplicitate al valorii proprii -1. Deoarece valorile proprii complexe nereale apar în pereche cu conjugatele lor, rezultă că ℓ are aceeași paritate ca și n. Ținând seama că $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$ oricare ar fi λ valoare proprie complexă nereală a lui A și că determinantul lui A este egal cu produsul tuturor valorilor proprii ale lui A, deducem că $\det A = (-1)^\ell = (-1)^n$. Întrucât și B este matrice ortogonală care nu are pe 1 ca valoare proprie, raționamentul de mai sus este valabil și pentru B, deci $\det B = (-1)^n = \det A$. Dar această egalitate este în contradicție cu faptul că $\det B = -\det A$.

52. a) Avem

$$AA^t = (I_n - 2xx^t)(I_n - 2xx^t) = I_n - 4xx^t + 4x(x^t x)x^t = I_n,$$

deoarece $x^t x = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Drept urmare, matricea A este ortogonală.

b) Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii ale lui A. Deoarece $A = A^t$, rezultă că toate valorile proprii λ_j sunt reale (conform problemei **43**). Pe de altă parte, matricea A fiind ortogonală, în baza rezultatului din problema **49** rezultă că $|\lambda_j| = 1$, deci $\lambda_j = \pm 1$ oricare ar fi $j = 1, \ldots, n$. Întrucât

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A = (1 - 2x_1^2) + \cdots + (1 - 2x_n^2) = n - 2,$$

deducem că valoarea proprie $+1$ are ordinul de multiplicitate $n - 1$, iar valoarea proprie -1 are ordinul de multiplicitate 1. Cu alte cuvinte, valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$ și $\lambda_n = -1$.

Fiind o matrice simetrică reală, A este otogonal diagonalizabilă (adică există o bază ortonormală în $\mathbb{R}^n$, formată din vectori proprii ai lui A). Vom demonstra că $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $+1$ dacă și numai dacă $y \perp x$, adică $x^t y = 0$. În adevăr, y este vector propriu al lui A corespunzător valorii proprii $+1$ dacă și numai dacă

$$Ay = y \quad \Leftrightarrow \quad y - 2xx^t y = y \quad \Leftrightarrow \quad xx^t y = 0_n.$$

Dacă $x^t y = 0$, atunci ultima egalitate de mai sus este evidentă. Reciproc, dacă $xx^t y = 0_n$, atunci avem

$$0 = y^t 0_n = y^t x x^t y = (x^t y)^t (x^t y) = (x^t y)^2,$$

de unde $x^t y = 0$.

Similar se demonstrează că $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii -1 dacă și numai dacă $y \in \langle x \rangle$. În concluzie, o bază în raport cu care A are forma canonică Jordan, adică $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1)$, este formată din vectorii unei baze ortonormale în $\langle x\rangle^{\perp}$, la care se adaugă vectorul x.

c) Admitem că $y = (1, \ldots, 1)$ este vector propriu al lui A. Conform celor demonstrate mai sus, trebuie să avem fie $y \perp x$, fie $y = \alpha x$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Cum $x^t y = x_1 + \cdots + x_n \neq 0$, nu putem avea $y \perp x$. Rămâne posibilitatea $y = \alpha x$, de unde $x = \frac{1}{\alpha} y$. Cum $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, rezultă că $\alpha = \pm\sqrt{n}$, deci

$$x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$\boxed{\textbf{53.}}$ a) Cum AB anulează polinomul X^n, rezultă că toate valorile proprii ale lui AB sunt rădăcini ale acestui polinom, deci sunt egale cu 0. Prin urmare, polinomul caracteristic al matricei AB este $p_{AB} = X^n$. Conform problemei **29**, avem și $p_{BA} = X^n$, iar conform teoremei lui Cayley-Hamilton $(BA)^n = O_n$.

b) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ și fie $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricile cu proprietatea că aplicațiile liniare $\varphi_X, \varphi_Y \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ asociate lor acționează asupra bazei canonice după cum urmează:

x	e_1	e_2	e_3	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_X(x)$	0_n	e_3	e_4	$\ldots$	e_n	e_1

x	e_1	e_2	e_3	e_4	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_Y(x)$	e_{n-1}	0_n	e_1	e_2	$\ldots$	e_{n-3}	e_{n-2}.

Atunci $\varphi_{XY} = \varphi_X \circ \varphi_Y$ și $\varphi_{YX} = \varphi_Y \circ \varphi_X$ acționează asupra bazei canonice după cum urmează:

x	e_1	e_2	e_3	e_4	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{XY}(x)$	e_n	0_n	0_n	e_3	$\ldots$	e_{n-2}	e_{n-1}

x	e_1	e_2	e_3	e_4	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{YX}(x)$	0_n	e_1	e_2	e_3	$\ldots$	e_{n-2}	e_{n-1}.

De aici rezultă apoi succesiv

x	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{(XY)^2}(x)$	e_{n-1}	0_n	0_n	0_n	e_3	$\ldots$	e_{n-3}	e_{n-2}

x	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{(XY)^3}(x)$	e_{n-2}	0_n	0_n	0_n	0_n	e_3	$\ldots$	e_{n-4}	e_{n-3}

$\vdots$

x	e_1	e_2	e_3	$\dots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{(XY)^{n-2}}(x)$	e_3	0_n	0_n	$\dots$	0_n	e_2

x	e_1	e_2	e_3	$\dots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{(XY)^{n-1}}(x)$	0_n	0_n	0_n	$\dots$	0_n	0_n,

deci $\varphi_{(XY)^{n-1}} = \theta$, adică $(XY)^{n-1} = O_n$. Prodedând analog, se obține

x	e_1	e_2	e_3	$\dots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{(YX)^{n-1}}(x)$	0_n	0_n	0_n	$\dots$	0_n	e_1,

deci $\varphi_{(YX)^{n-1}} \neq \theta$, adică $(YX)^{n-1} \neq O_n$.

$\boxed{\mathbf{54.}}$ Răspunsul este DA pentru $n \in \{2,3\}$ și NU pentru $n \geq 4$.

a) Fie mai întâi $n \in \{2,3\}$. Dacă $(AB)^3 = O_n$, atunci AB este nilpotentă, deci are toate valorile proprii egale cu 0. Prin urmare, polinomul caracteristic al matricei AB este $p_{AB}(t) = t^n$. Dar atunci $p_{BA}(t) = p_{AB}(t) = t^n$ și, conform teoremei lui Cayley-Hamilton, avem $(BA)^n = O_n$.

b) Dăm exemplu de matrici $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ așa încât $(AB)^3 = O_4$, dar $(BA)^3 \neq O_4$. Fie (a se vedea și rezolvarea problemei precedente)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

x	e_1	e_2	e_3	e_4
$\varphi_A(x)$	0_4	e_3	e_4	e_1

și respectiv

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

x	e_1	e_2	e_3	e_4
$\varphi_B(x)$	e_3	0_4	e_1	e_2 .

Atunci avem

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

x	e_1	e_2	e_3	e_4
$\varphi_{AB}(x)$	e_4	0_4	0_4	e_3

și respectiv

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

x	e_1	e_2	e_3	e_4
$\varphi_{BA}(x)$	0_4	e_1	e_2	e_3 .

Se verifică imediat că $(AB)^3 = O_4$, dar $(BA)^3 \neq O_4$.

c) Fie $n > 4$ arbitrar și fie $A_4, B_4 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ matricile de la punctul b). Atunci matricile de blocuri

$$A = \begin{pmatrix} A_4 & O_{4,n-4} \\ O_{n-4,4} & O_{n-4,n-4} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} B_4 & O_{4,n-4} \\ O_{n-4,4} & O_{n-4,n-4} \end{pmatrix}$$

verifică

$$(AB)^3 = \begin{pmatrix} (A_4B_4)^3 & O_{4,n-4} \\ O_{n-4,4} & O_{n-4,n-4} \end{pmatrix} = O_n$$

și

$$(BA)^3 = \begin{pmatrix} (B_4A_4)^3 & O_{4,n-4} \\ O_{n-4,4} & O_{n-4,n-4} \end{pmatrix} \neq O_n.$$

$\boxed{\textbf{55.}}$ a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ este radicală, atunci numărul $d := \det A$ are proprietatea că $\sqrt[k]{d} \in \mathbb{Q}$ pentru o infinitate de numere naturale $k \geq 2$. Or, este evident că acest lucru este posibil doar dacă $d \in \{-1, 0, 1\}$.

Vom demonstra că pentru orice $a \in \mathbb{Q}$ matricea

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

este radicală. În adevăr, matricea

$$X(x) := \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

satisface $X(x)^k = X(kx)$, deci $X(a/k)^k = A$ pentru orice număr natural k.

b) Vom dovedi că pentru orice $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ matricea

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nu este radicală. Se verifică prin calcul că

A^2 = matricea care are a^2 pe diagonala situată cu două unități deasupra diagonalei principale și 0 în rest;

A^3 = matricea care are a^3 pe diagonala situată cu trei unități deasupra diagonalei principale și 0 în rest;

$\vdots$

A^{n-1} = matricea care are a^{n-1} în colțul NE și 0 în rest;

$A^n = O_n$.

Demonstrăm că pentru $k \geq n$ nu există $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel încât $X^k = A$. Presupunând contrarul, ar rezulta că $X^{nk} = A^n = O_n$. Drept urmare, matricea X este nilpotentă, deci are toate valorile proprii egale cu 0 și polinomul caracteristic $p_X(t) = t^n$. Din teorema lui Cayley-Hamilton rezultă că $X^n = O_n$, de unde $X^k = O_n \neq A$, contradicție.

În fine, vom dovedi că pentru orice număr natural prim p, matricea $A := \operatorname{diag}\left(p, \frac{1}{p}, 1, 1, \ldots, 1\right)$ nu este radicală. În acest scop, este suficient să demonstrăm că pentru $k > n$ nu există $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel încât $X^k = A$. Presupunând contrarul, fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui X. Atunci, se știe, valorile proprii ale lui X^k sunt $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$, iar acestea trebuie să coincidă cu valorile proprii ale lui A, care sunt p, $\frac{1}{p}$ și 1 cu multiplicitatea algebrică $n-2$. Rezultă că există $i \in \{1, \ldots, n\}$ așa încât $\lambda_i^k = p$, adică $\lambda_i = \sqrt[k]{p}$. Fie p_X polinomul caracteristic al lui X și fie m polinomul minimal al lui $\sqrt[k]{p}$ peste corpul $\mathbb{Q}$, adică polinomul monic de grad minim din $\mathbb{Q}[t]$ care are pe $\sqrt[k]{p}$ drept rădăcină. Cum $p_X(\sqrt[k]{p}) = 0$, rezultă că $\deg m \leq n$ și m divide orice polinom monic din $\mathbb{Q}[t]$ care are pe $\sqrt[k]{p}$ drept rădăcină. În particular, m divide polinomul $f(t) := t^k - p$. Pe de altă parte, criteriul de ireductibilitate al lui Eisenstein asigură că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[t]$. Contradicția obținută arată că, într-adevăr, matricea A nu este radicală.

56. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că A este inversabilă. Fie

$$m_{AB}(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_{k-1} t + a_k$$

polinomul minimal al lui AB. Înmulțind egalitatea

$$(AB)^k + a_1 (AB)^{k-1} + \cdots + a_{k-1} AB + a_k I_n = O_n$$

la dreapta cu A, deducem că

$$A\big((BA)^k + a_1(BA)^{k-1} + \cdots + a_{k-1}BA + a_kI_n\big) = O_n.$$

Înmulțind această egalitate la stânga cu A^{-1}, găsim $m_{AB}(BA) = O_n$. Cu alte cuvinte, matricea BA anulează polinomul m_{AB}. Rezultă de aici că $m_{BA} \mid m_{AB}$.

Fie acum $m_{BA}(t) = t^q + b_1t^{q-1} + \cdots + b_{q-1}t + b_q$ polinomul minimal al lui BA. Înmulțind egalitatea

$$(BA)^q + b_1(BA)^{q-1} + \cdots + b_{q-1}BA + b_qI_n = O_n$$

la stânga cu A, deducem că

$$\big((AB)^q + b_1(AB)^{q-1} + \cdots + b_{q-1}AB + b_qI_n\big)A = O_n.$$

Înmulțind această egalitate la dreapta cu A^{-1}, găsim $m_{BA}(AB) = O_n$. Ca mai sus, urmează de aici că $m_{AB} \mid m_{BA}$. Întrucât m_{AB} și m_{BA} sunt polinoame monice și fiecare se divide cu celălalt, rezultă că ele sunt egale.

Egalitatea $m_{AB} = m_{BA}$ nu rămâne adevărată dacă niciuna dintre matricile A și B nu este inversabilă, după cum arată următorul contraexemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $AB = O_n$, deci $m_{AB}(t) = t$, pe când $BA \neq O_n$ și $(BA)^2 = O_n$, de unde $m_{BA}(t) = t^2$.

57. Fie $m_A \in \mathbb{C}[X]$ polinomul minimal al matricei A și fie polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^p - pX + (p-1)$ și respectiv $g = X^{3p} - 3pX + (3p-1)$. Atunci m_A divide pe f și pe g, deci orice rădăcină a lui m_A este rădăcină atât pentru f cât și pentru g. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o rădăcină arbitrară a lui m_A. Atunci avem

$$\lambda^p = p(\lambda - 1) + 1 \quad \text{și} \quad \lambda^{3p} = 3p(\lambda - 1) + 1.$$

Ridicând prima egalitate la cub și ținând seama de cea de-a doua, găsim

$$p^3(\lambda-1)^3 + 3p^2(\lambda-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2(\lambda-1)^2(p\lambda - p + 3) = 0,$$

de unde $\lambda = 1$ sau $\lambda = \frac{p-3}{p}$. Dacă $\lambda = \frac{p-3}{p}$, atunci am obține

$$-2 = p(\lambda - 1) + 1 = \lambda^p = \left(\frac{p-3}{p}\right)^p,$$

ceea ce ar fi absurd, întrucât $p \geq 3$. Prin urmare, singura rădăcină complexă a lui m_A este 1. Cum f și g admit pe 1 ca rădăcină cu ordinul de multiplicitate 2, deducem că $m_A = X - 1$, sau $m_A = (X-1)^2$.

Fie acum $r \geq 1$ un număr întreg și fie polinomul $h = X^r - rX + (r-1)$. Dacă $r = 1$, atunci nu avem ce demonstra, iar dacă $r \geq 2$, atunci h admite pe 1 ca rădăcină cu ordinul de multiplicitate 2. Urmează de aici că m_A divide pe h, deci $h(A) = O_n$.

$\boxed{\textbf{58.}}$ Vom demonstra că dacă p este un număr întreg arbitrar (nu neapărat prim), cu proprietatea că $p > n+1$, iar $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $A \neq I_n$, atunci avem $A^p + A \neq 2I_n$.

Presupunem, prin absurd, că există o matrice $A \neq I_n$ din $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, astfel ca $A^p + A = 2I_n$. Fie polinomul $\phi := X^p + X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ și fie $m_A \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul minimal al lui A. Cum $\phi(A) = O_n$, rezultă că m_A divide pe ϕ. Avem

$$\phi = (X-1)(X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 2).$$

Vom demonstra că polinomul $f := X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 2$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Cum $A \neq I_n$, nu putem avea $m_A = X - 1$. Atunci ireductibilitatea lui f implică $m_A = f$ sau $m_A = \phi$. Întrucât m_A divide polinomul caracteristic al lui A, am avea atunci

$$n \geq \operatorname{grad} m_A \geq p - 1 > n,$$

ceea ce ar fi absurd.

Rămâne așadar să dovedim ireductibilitatea lui f în $\mathbb{Q}[X]$. Conform lemei lui Gauss, aceasta este echivalentă cu ireductibilitatea lui f în $\mathbb{Z}[X]$.

Demonstrăm mai întâi că dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este o rădăcină a lui f, atunci $|\alpha| > 1$. În adevăr, dacă α este o rădăcină a lui f, atunci avem

$$\alpha^p + \alpha - 2 = \phi(\alpha) = 0.$$

Presupunem că $|\alpha| \leq 1$. Atunci avem

$$1 \geq |\alpha^p| = |2 - \alpha| \geq 2 - |\alpha| \geq 1,$$

deci cele trei inegalități de mai sus trebuie să aibă loc cu egalitate. Dar acest lucru este posibil doar dacă $\alpha = 1$, iar 1 nu este rădăcină a lui f. Contradicția obținută arată că toate rădăcinile lui f au modulul strict mai mic decât 1.

Presupunem, prin absurd, că există polinoame neconstante $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ în așa fel încât $f = gh$. Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui g și respectiv $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui h. Conform celor demonstrate mai sus, avem $|\alpha_j| > 1$ oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, k\}$ și $|\beta_j| > 1$ oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, m\}$. Deoarece

$$g = \prod_{j=1}^{k}(X - \alpha_j) \quad \text{și} \quad h = \prod_{j=1}^{m}(X - \beta_j),$$

rezultă că $|g(0)| = \prod_{j=1}^{k} |\alpha_j| > 1$ și $|h(0)| = \prod_{j=1}^{k} |\beta_j| > 1$. Pe de altă parte, $|g(0)|$ și $|h(0)|$ sunt numere întregi pozitive cu proprietatea că $|g(0)| \cdot |h(0)| = |f(0)| = 2$, deci unul dintre ele este egal cu 1. Contradicția obținută arată că f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

$\boxed{\textbf{59.}}$ Fie n un număr natural cu proprietatea că există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel încât $A^{2^k} + I_n = O_n$. Fie $f := X^{2^k} + 1$, fie $p_A \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul caracteristic al lui A și fie $m_A \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul minimal al lui A. Deoarece $f(A) = O_n$, rezultă că m_A divide f. Pe de altă parte, polinomul f este ireductibil în inelul $\mathbb{Q}[X]$ (aceasta fiind o consecință a criteriului de ireductibilitate al lui Eisenstein). Drept urmare, avem $m_A = f$. Conform teoremei lui Frobenius, polinoamele p_A și $m_A = f$ au aceiași factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$, deci există un număr natural r în așa fel încât $p_A = f^r$. Deducem de aici că $n = \operatorname{grad}(p_A) = r \cdot \operatorname{grad}(f) = r \cdot 2^k \geq 2^k$.

Pentru a încheia rezolvarea, rămâne să mai dovedim că pentru $n = 2^k$ există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ așa încât $A^n = -I_n$. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ și fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ matricea cu proprietatea că aplicația liniară $\varphi_A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ asociată ei acționează asupra bazei canonice după cum urmează:

x	e_1	e_2	e_3	$\ldots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_A(x)$	e_2	e_3	e_4	$\ldots$	e_n	$-e_1$.

De aici rezultă apoi succesiv

x	e_1	e_2	e_3	$\ldots$	e_{n-2}	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{A^2}(x)$	e_3	e_4	e_5	$\ldots$	e_n	$-e_1$	$-e_2$

x	e_1	e_2	e_3	$\ldots$	e_{n-3}	e_{n-2}	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{A^3}(x)$	e_4	e_5	e_6	$\ldots$	e_n	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$

$$\vdots$$

x	e_1	e_2	e_3	$\dots$	e_{n-1}	e_n
$\varphi_{A^n}(x)$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	$\dots$	$-e_{n-1}$	$-e_n$,

deci $A^n = -I_n$.