Formula lui Taylor și aplicații

O cărămidă importantă a analizei numerice

Radu T. Trîmbițaș

UBB

Polinomul lui Taylor I

- Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$, $a \in int(I)$. Dorim să găsim un polinom P de grad minim care să verifice condițiile

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \ldots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1}$$

- Căutăm P sub forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + ... + a_n(x - a)^n \tag{2}$$

Polinomul lui Taylor II

- Din (1) și (2) obținem

$$
\begin{aligned}
P(a) &= a_0 = f(a)\\
P'(a) &= a_1 = f'(a)\\
&\vdots\\
P^{(k)}(a) &= k!a_k = f^{(k)}(a)\\
&\vdots\\
P^{(n)}(a) &= n!a_n = f^{(n)}(a),
\end{aligned}
$$

de unde rezultă

$$
a_0 = f(a), a_1 = f'(a), \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{3}
$$

Polinomul lui Taylor III

- **Unicitatea**: presupunem că există $Q \neq P$ care verifică (1). Notăm $H := P - Q$. Obținem
$$H(a) = 0, H'(a) = 0, \ldots, H^{(n)}(a) = 0,$$
adică $H \equiv 0$ (H identic nul)
- De ce se pune condiția P de grad minim?
- P se va numi polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul a și se va nota cu $(T_n f)(x)$

Formula lui Taylor

- I interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul a:

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- Restul de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

- formula lui Taylor de ordinul n pentru funcția f în vecinătatea punctului a:

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ + (R_n f)(x) \end{aligned}$$

Expresii ale restului

- Are loc
$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x), \text{ cu } \lim_{x\to a}\omega(x) = 0.$$
- Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists\theta \in (0,1)$ astfel încât
$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{(n+1)!}$$

(restul în forma Lagrange)

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{n!}$$

(restul în forma Cauchy)

$$(R_n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t$$

(restul în formă integrală)

- Pornim de la expresia restului și o integrăm prin părți de n ori

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t = f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Bigg|_a^x + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}\,t$$

$$= -f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Bigg|_a^x + \int_a^x f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}\,t$$

$$\vdots$$

$$= -f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots - f'(a)\frac{x-a}{1!} + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}\,t$$

$$= -f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots - f'(a)\frac{x-a}{1!} + f(x) - f(a)$$

Demonstrația expresiei restului II

- de aici se obține

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}\, t}_{(R_n f)(x)}$$

- Pentru a obține forma Lagrange a restului folosim teorema a doua de medie a calculului integral: fie $u, v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, u, v continue și v are semn constant pe $[\alpha, \beta]$. Atunci există $\xi \in [\alpha, \beta]$ astfel încât

$$\int_\alpha^\beta u(t) v(t) \mathrm{d}\, t = v(\xi) \int_\alpha^\beta u(t) v \mathrm{d}\, t$$

Demonstrația expresiei restului III

- Alegând $\alpha = a$, $\beta = x$, $u(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$ vom obține

$$(R_n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}$$
$$= f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right] \Bigg|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

O formă utilă

Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, dezvoltând $f(x+h)$ în jurul lui x,

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + (R_n f)(x),$$

iar o formă pentru rest este

$$(R_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

unde ξ este între x și $x+h$.

Formula lui Maclaurin

- Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obține formula lui Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \theta \in (0,1).$$

- Exemple de dezvoltări uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \tag{4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \tag{5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \tag{6}$$

Alte dezvoltari uzuale

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + R_{n+1}(x); \tag{7}$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^n + R_n(x), \tag{8}$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

Brook Taylor (1685-1731)

Colin Maclaurin (1698-1768)

Aplicații I

Problema 1

Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcția $f : [-a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluție. Scriem $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; se obține

$$f(x) = \sqrt{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3}\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!2^n}\left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x)\right].$$

■

Aplicații II

Problema 2

Să se determine numărul natural n astfel ca pentru $a = 0$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $T_n f$ să aproximeze f în $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

Soluție. Impunem condiția $|(R_n f)(x)| = \left|\frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < 10^{-3}$.Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obținem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!}\right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Aplicații III

Problema 3

Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.

Soluție. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (8) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left|\binom{\frac{1}{3}}{n} 10^{-3n}\right|.$$

Pentru $n = 4$, avem
$|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243}10^{-12} = \frac{1}{24300000000000} = 4.1152 \times 10^{-14}$. ∎

Formula lui Taylor bidimensională

- Pentru o funcție $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o expresie a formulei lui Taylor este

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(a,b) + R_n(h,k) \\ R_n(h,k) &= \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k), \end{aligned} \tag{9}$$

cu $\theta \in (0,1)$. Semnificația termenilor diferențiali este

$$\begin{aligned} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(a,b) &= f(a,b) \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(a,b) &= \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a,b) \\ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) &= \left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(a,b). \end{aligned}$$

Formula lui Taylor bidimensională

Teorema următoare precizează condițiile de aplicabilitate ale formulei (9).

Teorema 4

Dacă toate derivatele parțiale de ordinul $n+1$ ale lui f sunt continue în dreptunghiul definit de $|x-a| \leq |h|$ și $|y-b| \leq k$, atunci există $\theta \in (0,1)$ pentru care are loc (9).

Problema 5

Scrieți dezvoltarea Taylor a lui $f(x,y) = \cos xy$, pentru $n = 1$.

Soluție. Aplicând formula (9) se obține

$$\cos[(a+h)(b+k)] = \cos ab - (hb + ak)\sin ab + R_1(h,k),$$

unde R_1 este suma a trei termeni

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}h^2(b+\theta k)^2\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right] \\
&-hk\left\{(a+\theta h)(b+\theta k)\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right] + \sin\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right]\right\} \\
&-\frac{1}{2}k^2(a+\theta h)^2\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right].
\end{aligned}
$$

■

Exemple

- Exemple Maple `exempletaylor.html`
- Exemplu Maple Taylor 2D `taylor2d.html`
- Exemple MuPAD `mupadtaylor.html`

Bibliografie I

- W. Cheney, David Kinkaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 6th edition, Brooks/Cole, 2008
- J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.
- C. Ueberhuber, *Numerical Computation. Methods, Software and Analysis*, vol. I, II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.