

Culegere de probleme de Analiză numerică cu soluții în MATLAB și MuPAD

Radu Tiberiu Trîmbițaș

Lloyd N. Trefethen a propus următoarea definiție a Analizei numerice:

Analiza numerică este studiul algoritmilor pentru rezolvarea problemelor matematicii continue.

Cuvântul cheie este acela de *algoritmi*. Deși foarte multe lucrări *nu* evidențiază acest lucru, în centrul atenției Analizei numerice stă proiectarea și analiza algoritmilor de rezolvare a unei anumite clase de probleme.

Problemele sunt cele din *matematica continuă*. „Continuă” înseamnă aici faptul că variabilele ce intervin aici sunt reale sau complexe; opusul lui continuu este discret. Pe scurt, am putea spune că Analiza numerică este Algoritmica continuă, în contrast cu Algoritmica clasică, care este Algoritmica discretă.

Este clar că deoarece numerele reale și complexe nu pot fi reprezentate exact în calculator, ele trebuie să fie approximate printr-o reprezentare finită. Din acest moment intervin erorile de rotunjire și iar este clar că studiul lor este unul din obiectivele importante ale Analizei numerice. Au existat și mai există încă opinii care susțin că acesta este cel mai important obiectiv. Un argument în sprijinul acestei idei, în afară de omniprezența erorilor, este dat de metodele exacte de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, cum ar fi eliminarea gaussiană.

Dar, cele mai multe probleme ale matematicii continue nu pot fi rezolvate prin algoritmi așa-zisi finiți, chiar presupunând prin absurd că am lucra în aritmetică cu precizie exactă. Un prim exemplu care se poate da aici este problema rezolvării unei ecuații polinomiale. Acest lucru se evidențiază la problemele de valori și vectori proprii, dar apar în orice problemă ce presupune termeni neliniari sau derivate – determinarea zerourilor, cuadraturi, ecuații diferențiale și integrale, optimizare ș.a.m.d.

Chiar dacă erorile de rotunjire ar dispărea, Analiza numerică ar rămâne. Aproximarea numerelor, obiectivul aritmeticii în virgulă flotantă, este un subiect dificil și obositor. Un obiectiv mai profund al Analizei numerice este aproximarea necunoscutei, nu a cantităților cunoscute. Scopul este convergența rapidă a aproximațiilor și mândria specialiștilor din acest domeniu este aceea că, pentru multe probleme s-au inventat algoritmi care converg extrem de

rapid. Dezvoltarea pachetelor de calcul simbolic a micșorat importanța erorilor de rotunjire, fără a micșora importanța vitezei de convergență a algoritmilor.

Definiția de mai sus nu surprinde câteva aspecte importante : că acești algoritmi sunt implementați pe calculatoare, a căror arhitectură poate fi o parte importantă a problemei; că fiabilitatea și eficiența sunt obiective supreme; că anumiți specialiști în analiza numerică scriu programe și alții demonstrează teoreme¹; și lucrul cel mai important, că toată munca este *aplicată*, aplicată cu succes la mii de aplicații, pe milioane de computere din toată lumea. „Problemele matematicii continue” sunt problemele pe care știința și ingineria sunt construite; fără metode numerice, știința și ingineria, așa cum sunt ele practicate astăzi ar ajunge repede în impas. Ele sunt de asemenea problemele care au preocupat cei mai mulți matematicieni de la Newton până azi. La fel ca și cei ce se ocupă de matematica pură, specialiștii în Analiza numerică sunt moștenitorii marii tradiții a lui Euler, Lagrange, Gauss și a altor mari matematicieni.

Din motivele amintite mai sus am încercat să realizez o lucrare în care să existe un echilibru între teorie, aspectele algoritmice și implementările practice. S-a optat pentru MATLAB 7. Mulțumesc doamnei Courtney Esposito de la Mathworks Inc. pentru amabilitatea de a-mi pune la dispoziție documentația și kit-ul de instalare.

Pentru a descărca sursele din această carte și soluțiile problemelor trimitem cititorul la pagina de web a autorului: <http://www.math.ubbcluj.ro/~tradu>.

Radu Tiberiu Trîmbițaș
Cluj-Napoca, februarie 2005

¹ există mulți specialiști foarte buni care le fac pe amândouă

Cuprins

| | |
|--|------------|
| 1. Teoria erorilor și aritmetică în virgulă flotantă | 1 |
| 1.1. Probleme teoretice | 1 |
| 1.2. Probleme practice | 2 |
| 1.3. Probleme suplimentare | 11 |
| 2. Rezolvarea numerică a sistemelor algebrice liniare | 17 |
| 2.1. Probleme teoretice | 17 |
| 2.2. Probleme practice | 22 |
| 2.3. Probleme suplimentare | 30 |
| 3. Aproximarea funcțiilor | 35 |
| 3.1. Probleme teoretice | 35 |
| 3.2. Probleme practice | 44 |
| 3.3. Probleme suplimentare | 52 |
| 4. Derivare și integrare numerică | 55 |
| 4.1. Probleme teoretice | 55 |
| 4.2. Probleme practice | 67 |
| 5. Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare | 81 |
| 5.1. Probleme teoretice | 81 |
| 5.2. Probleme practice | 87 |
| Bibliografie | 105 |

Lista surselor MATLAB

| | | |
|-----|-------------------------------------|----|
| 4.1 | Cuadratură Gauss-Legendre | 75 |
|-----|-------------------------------------|----|

Lista surselor MuPAD

Teoria erorilor și aritmetică în virgulă flotantă

1.1. Probleme teoretice

Problema 1.1. Considerăm ecuația algebrică

$$x^n + ax - 1 = 0, \quad a > 0, \quad n \geq 2.$$

- (a) Arătați că ecuația are exact o rădăcină pozitivă $\xi(a)$.
- (b) Obțineți o formulă pentru $(\text{cond } \xi)(a)$.
- (c) Obțineți margini superioare și inferioare pentru $(\text{cond } \xi)(a)$.

Problema 1.2. (a) Se consideră funcția compusă $h(t) = g(f(t))$. Să se exprime condiționarea lui h în funcție de condiționarea lui g și f . Atenție la formulare — precizați în care puncte se vor evalua numerele de condiționare.

- (b) Ilustrați (a) pentru $h(t) = \frac{1+\sin t}{1-\sin t}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Problema 1.3. Se consideră ecuația lui Lambert $xe^x = a$ pentru valori reale ale lui x și a .

- (a) Arătați grafic că ecuația are exact o rădăcină $\xi(a) \geq 0$ dacă $a \geq 0$, exact două rădăcini $\xi_2(a) < \xi_1(a) < 0$ dacă $-1/e < a < 0$, o rădăcină dublă -1 dacă $a = -1/e$ și nici o rădăcină dacă $a < -1/e$.
- (b) Discutați condiționarea lui $\xi(a)$, $\xi_1(a)$, $\xi_2(a)$ când a variază în intervalele respective.

Problema 1.4. Dându-se numărul natural n , fie $\xi = \xi(a)$ rădăcina pozitivă unică a ecuației $x^n = ae^{-x}$ ($a > 0$). Determinați condiționarea în funcție de a ; simplificați rezultatul cât mai mult posibil. În particular, arătați că $(\text{cond } \xi)(a) < 1/n$.

Problema 1.5. Să se compare următoarele două metode pentru calculul lui $x^2 - y^2$:

$$x \otimes x \ominus y \otimes y,$$

$$(x \oplus y) \otimes (x \ominus y).$$

Problema 1.6 (Conversia binar zecimal (scriere și apoi citire)). Pentru precizie simplă avem $p = 24$ și $2^{24} < 10^8$ deci 8 cifre par suficiente pentru a recupera numărul original (totuși nu este așa!). Când un număr binar IEEE simplă precizie este convertit la cel mai apropiat număr zecimal de 8 cifre, nu este întotdeauna posibil să recuperăm unic numărul binar din cel zecimal. Dacă se utilizează nouă cifre, totuși, conversia numărul zecimal în binar va recupera numărul flotant original.

Problema 1.7. În multe probleme, cum ar fi integrarea numerică și rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale, este nevoie să se însumeze mai mulți termeni. Deoarece fiecare adunare poate introduce o eroare $\approx 1/2ulp$, o sumă cu mii de termeni poate introduce o eroare de rotunjire foarte mare. Să se arate că un mod simplu de a micșora eroarea este de a efectua sumarea în dublă precizie și celelalte calcule în simplă precizie.

Problema 1.8. Dacă $b^2 \approx 4ac$, eroarea de rotunjire poate contamina jumătate din cifrele rădăcinii calculate cu formula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($\beta = 2$).

Problema 1.9. Aria triunghiului ABC este dată de $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (vezi figura 1.1). Discuțați condiționarea numerică a lui S .

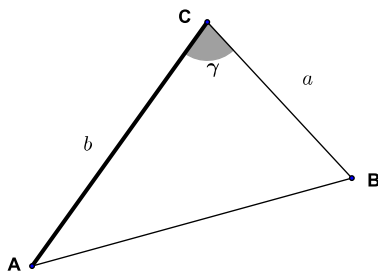


Figura 1.1: Problema 1.9

1.2. Probleme practice

Problema 1.10. Să se studieze teoretic și experimental condiționarea problemei determinării rădăcinilor ecuației polinomiale

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (1.2.1)$$

cunoscându-se coeficienții. Se va scrie o rutină pentru calculul numărului de condiționare al fiecărei rădăcini și se va studia grafic efectul perturbării fiecărui coeficient cu o variabilă aleatoare normală cu media 0 și dispersia 10^{-10} . Aplicație pentru ecuațiile

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n)=0$$

și (1.2.1) pentru rădăcinile $x_k = 2^{-k}$. Se va lua ca exemplu practic pentru testare $n = 20$. Ce se întâmplă dacă perturbăția urmează legea uniformă?

Problema 1.11. Funcțiile Bessel J_n se definesc prin

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

Arătați că $|J_n(x)| \leq 1$.

- (a) Se știe că $J_{n+1}(x) = 2nx^{-1}J_n(x) - J_{n-1}(x)$. Utilizați această relație pentru a calcula $J_0(1), J_1(1), \dots, J_{20}(1)$, pornind de la valorile cunoscute $J_0(1) \approx 0.7651976865$ și $J_1(1) \approx 0.4400505857$. Țineți cont de faptul că inegalitatea $|J_n(x)| \leq 1$ este încălcată.
- (b) O altă relație de recurență este $J_{n-1}(x) = 2nx^{-1}J_n(x) - J_{n+1}(x)$. Pornind de la valorile cunoscute $J_{20}(1) \approx 3.873503009 \times 10^{-25}$ și $J_{19}(1) \approx 1.548478441 \times 10^{-23}$, utilizați această relație pentru a calcula $J_{18}(1), J_{17}(1), \dots, J_1(1), J_0(1)$. Analizați rezultatele.

Problema 1.12. Să se studieze condiționarea unei rădăcini multiple a unei ecuații algebrice. Scrieți o rutină MATLAB pentru calculul numerelor de condiționare dacă se dau ecuația (coeficienții), rădăcinile și multiplicitățile lor. Repetați experimentul aleator de la problema 1.10 pentru ecuația

$$(x-1)^2(x-2)^2\dots(x-n)^2=0$$

Problema 1.13 (tangenta). Scrieți o rutină ce calculează tangenta lui x în radiani, utilizând algoritmul de mai jos. Testați rutina obținută pentru mai multe valori ale lui x . Întâi, argumentul x se reduce la $|x| \leq \pi/2$ adăugând sau scăzând multipli de π . Dacă $0 \leq |x| \leq 1.7 \times 10^{-9}$, punem $\tan x \approx x$. Dacă $|x| > \pi/4$, facem $u = \pi/2 - x$; altfel, setăm $u = x$. Calculăm acum aproximația

$$\tan u \approx u \left(\frac{135135 - 17336.106u^2 + 379.23564u^4 - 1.0118625u^6}{135135 - 62381.106u^2 + 3154.9377u^4 + 28.17694u^6} \right)$$

În final, dacă $|x| > \pi/4$, punem $\tan x \approx 1/\tan u$; dacă $|x| \leq \pi/4$, facem $\tan x \approx \tan u$. Notă: Acest algoritm se obține din „raționale telescopate” și fracții continue gaussiene pentru funcția tangentă.

Problema 1.14 (algoritmul Moler-Morrison). [30] Calculul unei aproximații a lui $\sqrt{x^2 + y^2}$ se poate realiza cu algoritmul Moler-Morrison (algoritmul 1.1)

- (a) Implementați algoritmul în MATLAB și testați-l.

Algoritmul 1.1 Algoritmul Moler-Morrison pentru calculul lui $\sqrt{x^2 + y^2}$

```

function  $f(x, y)$ 
 $f \leftarrow \max(|x|, |y|)$ ;
 $a \leftarrow \min(|x|, |y|)$ ;
for  $n = 1$  to 3 do
     $b \leftarrow (a/f)^2$ ;
     $c \leftarrow b/(4 + b)$ ;
     $f \leftarrow f + 2cf$ ;
     $a \leftarrow ca$ ;
end for
return  $f$ 
end function

```

- (b) De ce nu s-a preferat o implementare „directă”? Justificați răspunsul cu exemple în MATLAB.
- (c) De ce se fac numai trei iterații? (Indicație: am putea itera până când $2cf$ este suficient de mic și f nu se mai modifică.)
- (d) Folosiți rutina pentru calculul normei unui vector de dimensiune oarecare.

Problema 1.15 (sinus). Scrieți o rutină ce calculează $\sin x$ pentru x în radiani, după algoritmul următor. Întâi, utilizând proprietățile funcției sinus, reduceți rangul astfel încât $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Apoi, dacă $|x| < 10^{-8}$, punem $\sin x \approx x$; dacă $|x| > \pi/6$, punem $u = x/3$, calculăm $\sin u$ după formula (1.2.2) de mai jos și apoi punem $\sin x \approx (3 - 4\sin^2 u) \sin u$; dacă $|x| \leq \pi/6$, punem $u = x$ și calculăm $\sin u$ după cum urmează:

$$\sin u \approx u \left[\frac{-\frac{479249}{11511339840} u^6 + \frac{34911}{7613320} u^4 - \frac{29593}{207636} u^2 + 1}{1 + \frac{1671}{69212} u^2 + \frac{97}{351384} u^4 + \frac{2623}{1644477120} u^6} \right]. \quad (1.2.2)$$

Testați rutina dumneavoastră. *Notă:* Aceasta este aproximarea rațională Padé pentru sinus.

Problema 1.16 (exponențiala). (a) Scrieți o rutină ce calculează e^x însumând n termeni ai seriei Taylor până când al $(n+1)$ -lea termen t verifică $|t| < \varepsilon$, ε dat. Utilizați $1/e^x$ pentru valori negative ale lui x . Testați pentru valorile: 0, +1, -1, 0.5, -0.123, -25.5, -1776, 3.14159. Calculați eroarea absolută, eroarea relativă și n pentru fiecare caz, utilizând funcția exponențială din sistem pentru valoarea exactă. Nu însumați mai mult de 25 de termeni.

- (b) Calculul lui e^x se poate reduce la calculul lui e^u pentru $|u| < (\ln 2)/2$. Acest algoritm înlătură puterile lui 2 și calculează e^u într-un domeniu în care seria converge foarte repede. Se scrie

$$e^x = 2^m e^u,$$

unde m și u se calculează prin

$$\begin{aligned} z &\leftarrow x/\ln 2; & m &\leftarrow \text{integer}\left(z \pm \frac{1}{2}\right) \\ w &\leftarrow z - m; & u &\leftarrow w \ln 2 \end{aligned}$$

Aici semnul minus se utilizează dacă $x < 0$ deoarece $z < 0$. Încorporați tehnica de reducere în cod.

- (c) Scrieți o rutină care utilizează reducerea de rang $e^x = 2^m e^u$ și calculează e^u din partea pară a fracției continue gaussiene, adică,

$$e^u = \frac{s+u}{s-u} \text{ unde } s = 2 + u^2 \left(\frac{2520 + 28u^2}{15120 + 420u^2 + u^4} \right).$$

Testați pe datele date la punctul (a).

Problema 1.17 (arcsinus). Scrieți o rutină ce calculează $\arcsin x$, bazată pe algoritmul de mai jos, ce utilizează raționale telescopate pentru arcsinus. Dacă $|x| < 10^{-8}$, setați $\arcsin x \approx x$. Altfel, dacă $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, punem $u = x$, $a = 0$ și $b = 1$; dacă $\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ puneți $u = 2x^2 - 1$, $a = \pi/4$, și $b = 1/2$; dacă $\frac{1}{2}\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ setați $u = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $a = 3\pi/8$, și $b = 1/4$; dacă $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} < x \leq 1$, setați $u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}$, $a = \pi/2$, și $b = -2$. Apoi calculați aproximanta

$$\begin{aligned} \arcsin u \approx u & \left(1.0 + \frac{1}{6}u^2 + 0.075u^4 + 0.04464286u^6 + 0.03038182u^8 \right. \\ & + 0.022375u^{10} + 0.01731276u^{12} + 0.01433124u^{14} \\ & + 0.009342806u^{16} + 0.01835667u^{18} - 0.01186224u^{20} \\ & \left. + 0.03162712u^{22} \right) \end{aligned}$$

În final, se pune $\arcsin x \approx a + b \arcsin u$. Testați rutina pentru diverse valori ale lui x .

Problema 1.18 (arctangenta). Scrieți o rutină care calculează $\arctan x$ pentru x în radiani după cum urmează. Dacă $0 \leq x \leq 1.7 \times 10^{-9}$, punem $\arctan x \approx x$. Dacă $1.7 \times 10^{-9} < x \leq 2 \times 10^{-2}$, se utilizează seria trunchiată

$$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7.$$

Altfel, se pune $y = x$, $a = 0$ și $b = 1$ dacă $0 \leq x \leq 1$; se pune $y = 1/x$, $a = \pi/2$ și $b = -1$ dacă $1 < x$. Apoi punem $c = \pi/16$ și $d = \tan c$ dacă $0 \leq y \leq \sqrt{2} - 1$ și $c = 3\pi/16$ și $d = \tan c$ dacă $\sqrt{2} - 1 < y \leq 1$. Calculăm $u = (y - d)/(1 + dy)$ și aproximarea

$$\arctan u \approx u \left(\frac{135135 + 171962.46u^2 + 52490.4832u^4 + 2218.1u^6}{135135 + 217007.46u^2 + 97799.3033u^4 + 10721.3745u^6} \right)$$

În final, punem $\arctan x \approx a + b(c + \arctan u)$. Notă: Acest algoritm utilizează „raționale telescopate” și fracții continue gaussiene.

Problema 1.19 (logaritm natural). Scrieți o rutină pentru calculul lui $\ln x$ cu ajutorul algoritmului descris în continuare și bazat pe „raționale telescopate” și fracții continue gaussiene și testați pentru câteva valori ale lui x . Verificați dacă $x = 1$ și returnați zero în caz

afirmativ. Reduceți rangul lui x determinând n și r astfel încât $x = r \times 2^n$ cu $\frac{1}{2} \leq r < 1$. Apoi, puneți $u = (r - \sqrt{2}/2)/(r + \sqrt{2}/2)$ și calculați $\ln[(1+u)/(1-u)]$ cu aproximarea

$$\ln \frac{1+u}{1-u} \approx u \left(\frac{20790 - 21545.27u^2 + 4223.9187u^4}{10395 - 14237.635u^2 + 4778.8377u^4 - 230.41913u^6} \right)$$

valabilă pentru $|u| < 3 - 2\sqrt{2}$. În final, se pune

$$\ln x \approx \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \frac{1+u}{1-u}.$$

Problema 1.20. Fie $x = 1 + \frac{\pi}{10^6}$. Calculați puterea a n -a a lui x pentru $n = 100000, 200000, \dots, 1000000$ în simplă precizie și apoi în dublă precizie în MATLAB. Notăm rezultatele cu p_n și dp_n . Utilizați ultimul pentru a determina eroarea relativă r_n a primului. Afișați $n, p_n, dp_n, r_n, r_n/(\text{neps0})$, unde eps0 este eps (epsilon-ul mașinii) în simplă precizie. Cât ar fi x^n , aproximativ, când $n = 1000000$? Comentați rezultatul.

Problema 1.21. Calculați derivata dy/dx a funcției exponențiale $y = e^x$ at $x = 0$ cu ajutorul diferenței divizate $d(h) = (e^h - 1)/h$ pentru h descrescător. Utilizați

$$(a) \quad h = h_1 = 2^{-i}, \quad i = 5 : 5 : 50;$$

$$(2) \quad h = h_2 = (2.2)^{-i}, \quad i = 5 : 5 : 50.$$

Afișați $i, h_1, h_2, d_1 = d(h_1), d_2 = d(h_2)$, ultimele două cu un descriptor de format cu f, iar celelalte cu e. Explicați ce se observă.

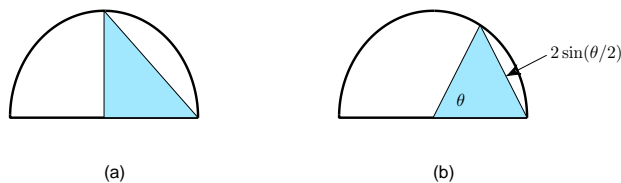
Problema 1.22 (Calculul lui π). Lungimea semicercului unitate este π . Putem aproxima π utilizând triunghiuri și matematică elementară. Considerăm semicercul cu arcul înjumătățit ca în figura 1.2(a). Ipotenuza triunghiului dreptunghic este $\sqrt{2}$. Deci, o aproximare grosieră a lui π este $2\sqrt{2} \approx 2.8284$. În figura 1.2(b), considerăm un unghi θ care este $1/k$ din semicerc. Coarda din figură are lungimea $2\sin(\theta/2)$, deci $2k\sin(\theta/2)$ este o aproximare a lui π . Folosind formule trigonometrice obținem

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{2} = \frac{\sin^2 \theta}{2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

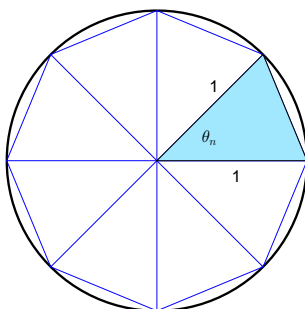
Fie θ_n unghiul rezultat din divizarea arcului semicircular în 2^{n-1} părți. Fie $S_n = \sin^2 \theta_n$ și $P_n = 2^n \sqrt{S_{n+1}}$. Arătați că $S_{n+1} = S_n / (2 + 2\sqrt{1 - S_n})$ și P_n este o aproximare a lui π . Pornind cu $S_2 = 1$ și $P_1 = 2$, calculați S_{n+1} și P_n recursiv pentru $2 \leq n \leq 20$.

Problema 1.23 (Calculul lui π). Numărul irațional π poate fi calculat aproximând aria cercului unitate ca limită a șirului p_1, p_2, \dots dat în continuare. Împărțim cercul unitate în 2^n sectoare. (Figura 1.3 ilustrează cazul $n = 3$.) Aproximați aria sectorului prin aria triunghiului isoscel. Unghiul θ_n este $2\pi/2^n$. Aria triunghiului este $1/2 \sin \theta_n$. (Verificați.) Cea de-a n -a aproximare a lui π este $p_n = 2^{n-1} \sin \theta_n$. Arătați că

$$\sin \theta_n = \frac{\sin \theta_{n-1}}{\left[2 \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{n-1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Figura 1.2: Calculul lui π (problema 1.22)

folosind formule trigonometrice cunoscute. Utilizați aceste relații de recurență pentru a genera șirurile $\sin \theta_n$ și p_n ($3 \leq n \leq 20$) începând cu $\sin \theta_2 = 1$. Comparați cu calculul lui $4.0 \arctan(1.0)$.

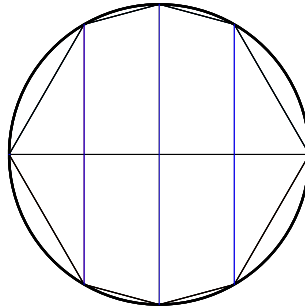
Figura 1.3: Calculul lui π (problema 1.23)

Problema 1.24 (Calculul lui π). Calculați π cu o metodă similară celei din problema precedentă, aproximând de această dată aria cercului unitate printr-un șir de arii de trapeze, așa cum se arată în figura 1.4.

Problema 1.25. Scrieți o rutină în precizie dublă sau extinsă pentru a implementa algoritmul 1.2 pentru calculul lui π . Cine converge mai repede, f ori g ? Cât de precise sunt valorile finale? Comparați cu calculul în precizie dublă sau extinsă al lui $4.0 \arctan(1.0)$. *Indicație:* Valoarea lui π cu 36 de cifre corecte este

3.14159265358979323846264338327950288

Notă: La începutul anilor 70 s-a descoperit o nouă formulă pentru calculul lui π . Acest algoritm se bazează pe acea formulă, care este o consecință directă a metodei dezvoltate de

Figura 1.4: Calculul lui π (problema 1.24)**Algoritmul 1.2** Calculul lui π

```

integer  $k$ ; real  $a, b, c, d, e, f, g$ ;
 $a \leftarrow 0$ ;
 $b \leftarrow 1$ ;
 $c \leftarrow 1/\sqrt{2}$ ;
 $d \leftarrow 0.25$ ;
 $e \leftarrow 1$ ;
for  $k = 1$  to  $5$  do
     $a \leftarrow b$ ;
     $b \leftarrow (b + c)/2$ ;
     $c \leftarrow \sqrt{ca}$ ;
     $d \leftarrow d - e(b - a)^2$ ;
     $e \leftarrow 2e$ ;
     $f \leftarrow b^2/d$ ;
     $g \leftarrow (b + c)^2/(4d)$ ;
    output  $k, f, |f - \pi|, g, |g - \pi|$ ;
end for

```

Gauss pentru calculul integralelor eliptice și a relației integrale eliptice a lui Legendre, ambele cunoscute de peste 150 de ani! Analiza erorilor ne arată că apare o convergență rapidă la calculul lui π și că numărul de cifre semnificative se dublează la fiecare pas. (Cititorul interesat poate consulta [23], [21] și [116].)

Problema 1.26. O altă schemă cu convergență pătratică pentru calculul lui π , descoperită de Borwein și Borwein în 1984 [20], este dată în algoritmul 1.3

Algoritmul 1.3 Calculul lui π

```

integer  $k$ ; real  $a, b, t, x$ ;
 $a \leftarrow \sqrt{2}$ ;
 $b \leftarrow 0$ ;
 $x \leftarrow 2 + \sqrt{2}$ ;
for  $k = 1$  to 5 do
     $t \leftarrow \sqrt{a}$ ;
     $b \leftarrow t(1 + b)/(a + b)$ ;
     $a \leftarrow \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$ ;
     $x \leftarrow xb(1 + a)/(1 + b)$ ;
    output  $k, x, |x - \pi|$ ;
end for

```

Verificați numeric că $|x - \pi| \leq 10^{-2k}$.

Notă: Ludolf van Ceulen (1540–1610) a calculat π cu 36 de cifre. Pachetele matematice moderne ca MATLAB, Maple și Mathematica pot calcula π cu zeci de mii de cifre în câteva secunde!

Problema 1.27. Scrieți un program MATLAB care calculează numărul de condiționare al matricei Hilbert H_n în norma euclidiană în următorul mod: avem

$$\text{cond}_2 H_n = \lambda_{\max}(H_n) \lambda_{\max}(H_n^{-1}),$$

unde $\lambda_{\max}(A)$ desemnează cea mai mare valoare proprie a matricei simetrice și pozitiv definite A . Valorile proprii ale lui H_n și H_n^{-1} se calculează ușor cu funcția MATLAB `eig`, iar inversa lui H_n se calculează direct cu formulele cunoscute (vezi mai jos), nu prin inversare (în MATLAB cu funcția `invhilb`).

(a) Inversa matricei Hilbert H_n are elementele

$$(H_n^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} (i+j-1) \binom{n+i-1}{n-j} \binom{n+j-1}{n-i} \binom{i+j-2}{i-1}^2.$$

Simplificați expresia pentru a evita factorialele de numere mari. (*Indicație:* exprimați coeficienții binomiali cu factoriale și simplificați.)

(b) Implementați în MATLAB formula obținută la (a) și reproduceți tabela din notele de curs.

Problema 1.28. Calculați integrala $\int_0^1 e^x dx$ cu ajutorul unei sume Riemann cu n subintervale echidistante, evaluând integrandul la mijlocul fiecărui interval. Afișați sumele Riemann pentru $n = 5000 : 5000 : 100000$ (cu 15 cifre zecimale după marca zecimală), împreună cu erorile absolute. Comentați rezultatul.

Problema 1.29. Fie $y_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- Utilizați integrarea prin părți pentru a obține o relație de recurență între y_k și y_{k-1} , pentru $k = 1, 2, 3, \dots$, și determinați valoarea de pornire y_0 .
- Scrieți un program MATLAB care generează y_0, y_1, \dots, y_{20} , utilizând recurența de la (a), și afișați rezultatul cu 15 cifre zecimale după marca zecimală. Explicați detaliat ce se întâmplă.
- Utilizați recurența de la (a) în ordine inversă, pornind cu valoarea (arbitrară) $y_N = 0$. Plasați în cinci coloane consecutive ale unei matrice de (21×5) Y valorile $y_0^{(N)}, y_1^{(N)}, \dots, y_{20}^{(N)}$ astfel obținute pentru $N = 22, 24, 26, 28, 30$. Determinați cât de mult diferă una de alta coloanele consecutive ale lui Y afișând

$$e_i = \max |(Y(:, i+1) - Y(:, i)) / Y(:, i+1)|, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Tipăriți ultima coloană $Y(:, 5)$ a lui Y și explicați de ce ea reprezintă precis cantitățile y_0, y_1, \dots, y_{20} .

Problema 1.30. Știm de la Analiză matematică că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Care este “limita în aritmetica mașinii”? Explicați.

Problema 1.31. Fie $f(x) = (n+1)x - 1$. Iterația

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad x_0 = 1/n,$$

converge în aritmetica exactă către punctul fix $1/n$ într-un pas. (De ce?) Ce se întâmplă în aritmetica în virgulă flotantă? Rulați un program cu $n = 1 : 5$ și $K = 10 : 10 : 50$ și explicați cantitativ ce se observă.

Problema 1.32. Care este cea mai mare valoare pentru care exponențiala din MATLAB `exp` nu dă depășire? Care este cea mai mică valoare pozitivă pentru care exponențiala din MATLAB `exp` dă depășire superioară?

Problema 1.33. Fie

$$f(x) = e^x - \cos(x) - x.$$

- Reprezentați grafic f pe o vecinătate a lui 0, utilizând metodele Analizei matematice.
- Reprezentați grafic f pentru $|x| < 5 \times 10^{-8}$, utilizând aritmetica în virgulă flotantă, în simplă și dublă precizie.

- (c) Cum s-ar putea obține un grafic mai realist?

Problema 1.34. [P]John Machin (1680-1752) a descoperit următoarea expresie pentru π :

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}. \quad (1.2.3)$$

- (a) Scrieți seria Maclaurin și polinomul lui Taylor T_n de grad n pentru $\arctan x$ în jurul lui $x = 0$.
- (b) Aproximați π utilizând T_n și (1.2.3). Mai concret, utilizați aproximarea

$$\pi \approx P_n = 16T_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4T_n\left(\frac{1}{239}\right).$$

- (c) Care este eroarea relativă în aproximarea de mai sus? Calculați π cu precizia eps (în MATLAB). Câte zecimale corecte se obțin pentru $n = 9$?

1.3. Probleme suplimentare

Problema 1.35. Calculați parametri care definesc aritmetica de precizie finită în MATLAB. Comparați rezultatele cu constantele din standardul IEEE. Scrieți funcții MATLAB care calculează:

- (a) epsilon-ul mașinii eps. *Indicație:* Utilizați faptul că eps este cel mai mic număr în virgulă flotantă pozitiv pentru careare loc $1 + \text{eps} > 1$ (numeric). Comparați rezultatul obținut cu constanta MATLAB eps.
- (b) cel mai mic număr în virgulă flotantă normalizat α . Comparați rezultatul dumneavoastră cu realmin.
- (c) cel mai mic număr în virgulă flotantă denormalizat. Cum poate fi calculat acest număr cu ajutorul constantelor IEEE?
- (d) cel mai mare număr în virgulă flotantă γ . O aproximație inițială este dată de $1/\alpha$. Comparați această valoare cu constanta MATLAB realmax.

Problema 1.36. Faceți același lucru, dar pentru aritmetica cu precizie finită din Maple. Utilizați valoarea implicită pentru precizie `Digits:=10`.

1. Explicați de ce următorul program Maple pentru calcularea preciziei mașinii

```
eps:=1.0;
for i from 1 while 1.0+eps > 1.0 do
  eps:=eps/2.0;
end do;
```

nu funcționează. Modificați programul și faceți-l să funcționeze! Reamintim că Maple utilizează aritmetica zecimală.

2. *Indicație:* Pentru a găsi realmin din Maple utilizați în instrucțiunea de ciclare

```
realmin:=realmin/1.0e100000000;
```

sau chiar o putere mai mare a lui 10, altfel veți aștepta prea mult! Rafinați apoi aproximarea împărțind cu factori mai mici. Convingeți-vă printr-un experiment că nu există numere denormalizate în Maple.

3. Verificați că $\text{realmax} = 1/\text{realmin} = 1.10^{9223372036854775806}$.

Problema 1.37. [Monotonie] Presupunem că avem o aritmetică cu precizie finită în baza 10 cu două cifre semnificative în semnificant. Fie \mathbb{M} mulțimea numerelor mașină. Arătați că funcția $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ definită prin $f(x) = x^2$ nu este strict monotonă, găsind două numere pozitive $a, b \in \mathbb{M}$, astfel încât $a \neq b$, dar $a \otimes a = b \otimes b$. Faceți același lucru pentru standardul 754 dublă precizie.

Problema 1.38. Scrieți o funcție MATLAB $[r, \phi] = \text{topolar}(x, y)$ care convertește coordonatele carteziane ale unui punct (x, y) în coordonate polare (r, ϕ) . Cu alte cuvinte, funcția rezolvă ecuațiile

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

în raport cu r și ϕ . *Indicație:* studiați funcția MATLAB atan2 și evitați depășirea inferioară și superioară.

Problema 1.39. Scrieți un rezolvitor MATLAB pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

unde a, b și c sunt numere în virgulă flotantă arbitrară. Programul trebuie să calculeze soluțiile x_1 și x_2 dacă ele sunt în plaja reprezentabilă. *Indicații:* se pornește de la formula cunoscută

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dacă $|b|$ este mare se poate obține anulare la ridicarea lui la pătrat (la fel și pentru $b^2 - 4ac$). Mai mult, apare anulare dacă $|b|^2 \gg |4ac|$ la calculul lui x_1 sau x_2 , în funcție de semnul lui b . Evitați depășirea rescriind adecvat formulele. Evitați anularea folosind relația $x_1 x_2 = c/a$ (formula lui Viète).

Problema 1.40. [Teorema cosinusului] Dându-se un unghi γ și două laturi alăturate a și b ale unui triunghi, latura opusă se poate determina cu teorema cosinusului:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}. \quad (1.3.1)$$

1. Numeric, pot să apară probleme dacă unghiul γ este mic și dacă $a \simeq b \gg c$. Rezultatul c va fi afectat de anulare în acest caz. Modificați formula pentru a evita anularea introducând $-2ab + 2ab$ în rădăcina pătrată și utilizând formula pentru unghiul pe jumătate

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Veți obține expresia mai sigură

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2}}. \quad (1.3.2)$$

2. Simulați o aritmetică zecimală cu precizia de două cifre rotunjind rezultatul după fiecare operație la două cifre zecimale. Utilizați valorile $a = 5.6$, $b = 5.7$ și $\gamma = 5^\circ$ și calculați latura c cu cele două formule pentru teorema cosinusului.

Problema 1.41. Teorema cosinusului se poate utiliza la calculul circumferinței unei elipse.

1. Reprezentați elipsa în coordonate polare

$$r(\phi) = \frac{b}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \phi}}, \quad \epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad a \geq b.$$

2. Considerați partiția $\phi_n = \frac{2\pi}{n}$ și triunghiul cu unghiul ϕ_n și laturile adiacente $r(k\phi_n)$ și $r((k+1)\phi_n)$. Calculați a treia latură a acestui triunghi (coardă a elipsei) utilizând teorema cosinusului (vezi problema 1.40). Adunați lungimile celor n coarde pentru a obține în acest mod o aproximație a circumferinței elipsei.
3. Comparați aproximația dumneavoastră când $n \rightarrow \infty$ cu valoarea „exactă”, care se poate obține integrând numeric integrala eliptică

$$U = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt, \quad \epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad a \geq b.$$

De notat diferența care se obține utilizând formula din cărți (1.3.1) și formula stabilă (1.3.2) pentru teorema cosinusului.

4. Implementați funcția MATLAB

```
function [U,n]=Circumference(a,b)
% CIRCUMF computes the circumference of an ellipse
% [U,n]=circumf(a,b) computes the circumference U of
% the ellipse with semiaxes a and b and returns the
% number n of chords used to approximate the
% circumference.
```

Utilizați formula stabilă și un criteriu elegant de terminare independent de mașină: se începe cu $n = 4$ și se dublează n la fiecare pas. Șirul de aproximate va crește monoton. Opriți iterațiile când monotonia se pierde. Atenție la implementarea eficientă a acestui algoritm — necesită un număr mare de operații. Evitați recalcularea pe cât posibil.

Problema 1.42. Funcția $\ln(1+x)$ se evaluează imprecis pentru $|x|$ mic.

1. Evaluați această funcție în MATLAB pentru $x = 0.1, 0.01, \dots, 10^{-11}$.
2. Verificați valorile obținute în MuPAD utilizând `DIGITS := 20`.
3. Programați în MATLAB și evaluați pentru același argument funcția

$$\ln(1+x) = \begin{cases} x & \text{dacă } 1+x = 1 \text{ numeric,} \\ \frac{x \ln(1+x)}{(1+x)-1} & \text{dacă } 1+x \neq 1 \text{ numeric.} \end{cases}$$

Comentați rezultatele obținute. Puteți explica de ce funcționează? Această transformare este o idee inteligentă a lui W. Kahan.

Problema 1.43. Funcția

$$f(x) = \ln((1+x^4)^2 - 1)$$

se calculează inexact în aritmetica IEEE (rezultatele pot fi complet eronate) pentru valori pozitive mici ale lui x . Deja pentru $x \approx 10^{-3}$, obținem doar cam 8 cifre zecimale corecte. Pentru $x \approx 10^{-4}$ se obține în MATLAB `-Inf`. Scrieți o funcție MATLAB `y=f(x)` care calculează corect valorile funcției pentru orice $realmin \leq x < 10^{-3}$.

Problema 1.44. La evaluarea pe calculator a funcției

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

se observă o eroare relativă mare pentru valori $x \approx 0$.

1. Explicați ce se întâmplă.
2. Găsiți o metodă de calcul a lui f pentru $|x| < 1$ la precizia mașinii și scrieți o funcție MATLAB pentru calculul lui f .

Problema 1.45. La evaluarea pe calculator a funcției

$$f(x) = \frac{x^2}{\cos(\sin(x))^2 - 1}$$

se observă o eroare relativă mare pentru valori $x \approx 0$.

1. Explicați ce se întâmplă.
2. Găsiți o metodă de calcul a lui f pentru $|x| < 1$ la precizia mașinii și scrieți o funcție MATLAB pentru calculul lui f .

Problema 1.46. [Criteriu de oprire pentru metoda aproximațiilor succesive] Presupunem că metoda aproximațiilor succesive $x_{k+1} = F(x_k)$ generează un șir liniar convergent $x_k \rightarrow s$ și că pentru eroarea $e_k = |x_k - s|$, relația $e_{k+1} \leq ce_k$ are loc cu $0 < c < 1$. Investigați pentru ce valori ale lui c putem trage concluzia că dacă are loc $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, atunci și $e_{k+1} < \varepsilon$.

Problema 1.47. Funcția

$$f(x) = \frac{x^2}{1!} + 7\frac{x^4}{2!} + 17\frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 - 1) \frac{x^{2n}}{n!}$$

trebuie evaluată la precizia mașinii pentru x în domeniul $0 < x < 25$. Scrieți o funcție MATLAB pentru aceasta. Acordați o atenție particulară următoarelor aspecte:

- calculați rezultatul la precizia mașinii cu un criteriu elegant de oprire;
- evitați orice depășire potențială.

Problema 1.48. Dorim să calculăm integralele

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$$

pentru $n = 0, 1, 2, \dots, 30$ și $a > 0$.

- Arătați că are loc relația de recurență:

$$y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \quad y_0 = \ln \frac{1+a}{a}. \quad (1.3.3)$$

- Calculați margini superioare și inferioare pentru valorile lui y_n alegând $x = 0$ și respectiv $x = 1$, în numitorul integrandului.
- Calculați termenii șirului $\{y_n\}$ pentru $a = 10$ și $n = 1, \dots, 30$ utilizând (1.3.3) repetat. Obțineți o tabelă cu valorile și marginile lor.
- Rezolvați (1.3.3) în raport cu y_{n-1} și calculați din nou șirul pentru $a = 10$, de această dată n mergând în jos și începând cu $n = 30$. Luați ca valoare de pornire marginea inferioară pentru y_{30} .
- La final, verificați rezultatele dumneavoastră calculând integralele cu funcția MATLAB `quad`.

Problema 1.49. Dându-se un întreg n , dorim să calculăm valorile

$$s_k = \sin(kx), \quad k = 1, \dots, n \text{ pentru } x = \frac{2\pi}{n}.$$

În loc să apelăm funcția sinus de n ori pentru a calcula s_k , putem să calculăm valorile recursiv utilizând identitățile trigonometrice

$$\begin{pmatrix} \cos(k+1)x \\ \sin(k+1)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Realizați câteva experimente pentru a compara timpii de calcul și precizia și apoi proiectați un algoritm „mixt” rapid.

Rezolvarea numerică a sistemelor algebrice liniare

2.1. Probleme teoretice

Problema 2.1. Fie $n \geq 2$. Dându-se matricea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matricea de permutare $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schimbă ordinea liniilor lui A , astfel că $(QA)_{i,j} = a_{n+1-i,j}$. Dacă $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice triunghiulară inferior, care este structura matricei QLQ ? Arătați cum se poate factoriza $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sub forma $A = UL$, unde $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triunghiulară superior cu 1 pe diagonală și $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este triunghiulară inferior. Ce condiții asupra lui A ne asigură existența acestei factorizări? Dați un exemplu de matrice pătratică A care nu poate fi factorizată în acest mod.

Problema 2.2. Fie $n \geq 2$. Considerăm matricea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ale cărei submatrice principale de ordin mai mic decât n sunt nesingulare. Arătați că A poate fi factorizată sub forma $A = LDU$, unde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este triunghiulară inferior cu 1 pe diagonală, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este diagonală și $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este triunghiulară superior cu 1 pe diagonală. Dacă se cunoaște factorizarea $A = LU$, unde L este triunghiulară inferior cu 1 pe diagonală și U este triunghiulară superior, arătați cum se poate factoriza transpusa A^T .

Problema 2.3. Arătați că inversa unei matrice triunghiulară inferior de ordinul n este triunghiulară inferior de ordinul n .

Problema 2.4. Matricea triunghiulară inferior $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, este nesingulară, iar vectorul $b \in \mathbb{R}^n$ este astfel încât $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, cu $1 \leq k \leq n$. Vectorul $y \in \mathbb{R}^n$ este soluția sistemului $Ly = b$. Arătați, prin partiționarea lui L , că $y_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$. Dați astfel o demonstrație alternativă că inversa unei matrice triunghiulare inferior este triunghiulară inferior.

Problema 2.5. Presupunem că matricea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verifică

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq C, \quad j = 1, \dots, n.$$

Arătați că, pentru orice vector $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n |(Ax)_i| \leq C \|x\|_1.$$

Găsiți un vector nenul x pentru care egalitatea are loc și deduceți că

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Problema 2.6. (i) Arătați că, pentru orice vector $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \text{ și } \|v\|_2^2 \leq \|v\|_1 \|v\|_\infty$$

Dați în fiecare caz un exemplu de vector nenul v pentru care are loc egalitatea. Deduceți că $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1$. Arătați că $\|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty$.

(ii) Arătați că, pentru orice matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \text{ și } \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty.$$

Dați în fiecare caz un exemplu de matrice A pentru care egalitatea are loc.

Problema 2.7. Arătați că pentru orice matrice nesingulară $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\text{cond}_2(A) = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{1/2},$$

unde λ_1 este cea mai mică și λ_n este cea mai mare valoare proprie a matricei $A^T A$. Arătați că numărul de condiționare $\text{cond}_2(Q)$ al unei matrice ortogonale Q este egal cu 1. Reciproc, dacă $\text{cond}_2(A) = 1$ pentru matricea A , arătați ca toate valorile proprii ale lui $A^T A$ sunt egale; deduceți că A este un multiplu scalar al unei matrice ortogonale.

Problema 2.8. Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Arătați că dacă λ este o valoare proprie a lui $A^T A$, atunci

$$0 \leq |\lambda| \leq \|A\| \|A^T\|,$$

cu condiția ca atât la A cât și la A^T să se utilizeze aceeași normă matriceală subordonată. Arătați că, pentru orice matrice nesingulară $n \times n$, A ,

$$\text{cond}_2(A) \leq (\text{cond}_1(A) \text{cond}_\infty(A))^{1/2}.$$

Problema 2.9. Se consideră matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Calculați matricea $A^T A$. Arătați că vectorul $x \neq 0$ este un vector propriu al lui $A^T A$ corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$, dacă $x_1 = 0$ și $x_2 + \cdots + x_n = 0$. Arătați că există doi vectori proprii cu $x_2 = \cdots = x_n$ și găsiți valorile proprii corespunzătoare. Deduceți că

$$\text{cond}_2(A) = \frac{1}{2}(n+1) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}} \right).$$

Problema 2.10. Fie $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și I matricea unitate de ordin n . Arătați că dacă matricea $I - B$ este singulară, atunci există un vector nenul $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $(I - B)x = 0$; deduceți că $\|B\| \geq 1$, și deci că, dacă $\|A\| < 1$, atunci matricea $I - A$ este nesingulară. Să presupunem că $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cu $\|A\| < 1$. Arătați că

$$(I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1},$$

și deci că

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq 1 + \|A\| \|(I - A)^{-1}\|.$$

Deduceți că

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Problema 2.11. Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice nesingulară și $b \in \mathbb{R}_*^n$. Presupunem că $Ax = b$ și $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ și că $\|A^{-1}\delta A\| < 1$. Utilizați rezultatul din problema 2.10 pentru a arăta că

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}.$$

Problema 2.12. Presupunem că $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice nesingulară și că $b \in \mathbb{R}_*^n$. Știind că $Ax = b$ și $A(x + \delta x) = b + \delta b$, teoria numărului de condiționare afirmă că

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond} A \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Considerând vectorii proprii ai matricei $A^T A$, arătați cum se pot găsi vectorii b și δb pentru care egalitatea are loc în norma $\|\cdot\|_2$.

Problema 2.13. Verificați că inversa matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

este dată de

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerăm următoarele metode de rezolvare a sistemului $Ax = b$: eliminare gaussiană pentru sisteme tridiagonale și $x = A^{-1}b$. Comparați complexitatea acestor metode.

Problema 2.14. Arătați că suma și produsul de matrice triunghiulare superior sunt de asemenea triunghiulare superior. Demonstrați același rezultat pentru matrice triunghiulare inferior.

Problema 2.15. Factorizarea LU a lui A nu este unică dacă se cere ca L să fie triunghiulară inferior și U triunghiulară superior.

(a) Fiind dată o factorizare LU a lui A , definim

$$L_1 = LD, \quad U_1 = D^{-1}U$$

pentru o anumită matrice nesingulară diagonală D . Arătați că L_1U_1 este o altă factorizare LU a lui A .

(b) Fie $L_1U_1 = L_2U_2 = A$ cu L_1, L_2 triunghiulare inferior, U_1, U_2 triunghiulare superior. Arătați că $L_1 = L_2D, U_1 = D^{-1}U_2$ pentru o anumită matrice diagonală D .

Problema 2.16. Calculați $\text{cond}_\infty(A)$ pentru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad |c| \neq 1.$$

Pentru ce valori ale lui c A este prost condiționată? Ce se poate spune despre sistemul liniar $Ax = b$? Ce relație există între $\text{cond}(A)$ și $\det(A)$?

Problema 2.17. Arătați că $\text{cond}(A) \geq 1$ pentru orice A .

Problema 2.18. Definim matricea A_n de ordinul n prin

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Găsiți inversa lui A_n explicit. (*Indicație:* găsiți inversa pentru $n = 6$ și ghiciți forma lui A_n^{-1}).

(b) Calculați $\text{cond}_\infty(A_n)$.

- (c) Alegând $b = [-n + 2, -n + 3, \dots, -1, 0, 1]^T$, soluția sistemului $A_n x = b$ este $x = [1, \dots, 1]^T$. Perturbați b la $\widehat{b} = b + [0, \dots, 0, \varepsilon]^T$. Rezolvați sistemul $A_n \widehat{x} = \widehat{b}$ în raport cu \widehat{x} . Verificați că

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A_n) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

- (d) Verificați numeric în MATLAB rezultatele de la punctele (a), (b), (c).

Problema 2.19. Considerăm iterația

$$x^{(k+1)} = b + \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x^{(k)}.$$

Găsiți valorile lui α pentru care iterația converge pentru orice alegere a valorii inițiale $x^{(0)}$.

Problema 2.20. Fie A o matrice pătratică diagonal dominantă. Arătați că:

- (a) A este nesingulară.
 (b) metoda lui Jacobi pentru sistemul $Ax = b$ converge pentru orice b .

Problema 2.21 (Factorizare LDL). Arătați că dacă A este simetrică și admite o factorizare LU , atunci A are o factorizare $A = LDL^T$, unde D este diagonală. Este rezultatul valabil pentru o matrice hermitiană? Deduceți de aici existența factorizării Cholesky dacă A este simetrică (hermitiană) și pozitiv definită.

Problema 2.22. Se consideră sistemul

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

Arătați cum se poate rezolva sistemul mai eficient utilizând submatrice în locul sistemului întreg. Dați o estimare a costurilor în ambele abordări (submatrice și global). Dați un exemplu numeric când toate submatricele sunt 2×2 .

Problema 2.23. Fie A o matrice complexă nesingulară. Verificați că

$$\begin{bmatrix} A & A^* \\ -Ai & A^*i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}i \\ A^{*-1} & -A^{*-1}i \end{bmatrix},$$

unde A^* este transpusa conjugată a lui A .

Problema 2.24. Fie X o matrice pătratică de forma

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

unde A și D sunt pătrate și A^{-1} există. Se știe că X^{-1} există dacă și numai dacă $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ există. Verificați că X^{-1} este dată de

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

Ca aplicație, calculați inversele matricelor

$$X = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ [2] \end{bmatrix}$$

2.2. Probleme practice

Problema 2.25. O analiză de tip element finit a sarcinii pe o structură ne conduce la următorul sistem

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \beta & 0 & \gamma & 0 \\ -\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde $\alpha = 482317$, $\beta = 2196.05$ și $\gamma = 6708.43$. Aici x_1, x_2, x_3 reprezintă deplasări laterale, iar x_4, x_5, x_6 reprezintă deplasări rotaționale (tridimensionale) corespunzând forței aplicate (membrul drept).

(a) Determinați x .

(b) Cât de precise sunt calculele? Presupunem întâi date exacte, apoi $\|\Delta A\|/\|A\| = 5 \times 10^{-7}$.

Problema 2.26. Implementați un algoritm $O(n)$ pentru rezolvarea unui sistem tridiagonal prin eliminarea gaussiană.

Problema 2.27. Deduceți formulele de derivare numerică

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + R(h), \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + R(h), \end{aligned}$$

presupunând că f este continuu diferențiabilă de câte ori este necesar.

Problema 2.28. Se consideră problema bilocală

$$y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a, b]$$

cu condițiile pe frontieră $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Presupunem că $q(x) \geq \underline{q} > 0$. Pentru a rezolva problema numeric o vom discretiza, căutând aproximațiile pe grila uniformă $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N-1$, unde $h = (b-a)/(N+1)$. Definim $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$ and $y_i \approx y(x_i)$. Utilizând formulele din problema 2.27 și ținând cont că $y_0 = \alpha$ și $y_{N+1} = \beta$, se obține un sistem liniar tridiagonal.

- Scrieți sistemul obținut prin discretizare și studiați proprietățile lui.
- Scrieți o funcție MATLAB pentru rezolvarea problemei cu valori pe frontieră date, folosind ideea de mai sus și funcția din problema 2.26.

Problema 2.29. Implementați un algoritm $O(n)$ pentru rezolvarea unui sistem tridiagonal cu matrice SPD prin descompunere Cholesky.

Problema 2.30. Implementați descompunerea LUP pentru un sistem tridiagonal

Problema 2.31. Se consideră problema bilocală (ecuația Poisson unidimensională)

$$-\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = f, \quad 0 < x < 1,$$

cu condițiile pe frontieră $v(0) = v(1) = 0$. Pentru a rezolva problema numeric o vom discretiza, căutând aproximațiile pe grila uniformă $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N-1$, unde $h = (b-a)/(N+1)$, $[a, b] = [0, 1]$. Definim $y_i \approx y(x_i)$. Utilizând formulele din problema 2.27 (una din ele) și ținând cont că $y_0 = 0$ și $y_{N+1} = 0$, se obține un sistem liniar tridiagonal.

- Scrieți sistemul obținut prin discretizare și studiați proprietățile lui.
- Scrieți o funcție MATLAB pentru rezolvarea problemei cu valori pe frontieră date, folosind ideea de mai sus și funcția din problema 2.29.

Problema 2.32. Calculați inversa unei matrice date rezolvând un set de sisteme convenabile și utilizând descompunerea LUP.

Problema 2.33. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

și vectorii

$$\begin{aligned} b_1 &= [7 \ 2 \ 13 \ -4]^T \\ b_2 &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \\ b_3 &= [1 \ 2 \ -1 \ 5]^T \\ b_4 &= [3 \ 4 \ 5 \ 6]^T. \end{aligned}$$

Să se rezolve sistemele $Ax = b_i$, $i = \overline{1, 4}$ eficient.

Problema 2.34. Considerăm sistemul liniar cu matricea coeficienților

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Explorați proprietățile metodei lui Jacobi și Gauss-Seidel utilizând MATLAB.

Problema 2.35. Să se rezolve sistemul

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cu metodele Jacobi și Gauss-Seidel. Câți pași sunt necesari? Care este condiția de oprire?

Problema 2.36 (P). Găsiți factorizarea QR a matricei

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

și folosind aceasta găsiți soluția în sensul celor mai mici pătrate a sistemului liniar

$$9x - 6y = 300$$

$$12x - 8y = 600$$

$$20y = 900.$$

Problema 2.37. Grinzile cu zăbrele sunt structuri ușoare capabile să susțină sarcini mari. La proiectarea podurilor, membrii individuali sunt legați prin joncțiuni care se pot roti și care permit forțelor să fie transferate de la un membru al grinzii la altul. Figura 2.1 arată o grindă cu zăbrele ținută staționar în punctul din stânga jos 1, i se permite să se miște orizontal în punctul cel mai din dreapta 4 și are joncțiuni în punctele 1, 2, 3 și 4. O sarcină de 10000 N este plasată în joncțiunea 3, iar forțele rezultate în joncțiuni sunt date de f_1, f_2, f_3, f_4 , and f_5 , așa cum se arată în figură. Când sunt pozitive, forțele indică tensiune asupra elementelor structurii, iar când sunt negative comprimare. Membrul staționar de sprijin poate avea atât o componentă de forță orizontală F_1 cât și una verticală F_2 , dar membrul de sprijin deplasabil are doar o componentă de forță verticală F_3 . Dacă grinda este în echilibru static, rezultanta forțelor în fiecare joncțiune trebuie să fie nulă, deci suma tuturor componentelor orizontale și verticale în fiecare joncțiune trebuie să fie 0. Aceste condiții ne conduc la sistemul de ecuații liniare din tabela 2.1. Matricea 8×8 care descrie sistemul are doar 17 elemente nenule. Rezolvați sistemul cu metoda SOR.

| Joncțiunea | Componenta orizontală | Componenta verticală |
|------------|--|---|
| 1 | $-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$ |
| 2 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$ |
| 3 | $-f_2 + f_5 = 0$ | $f_3 - 10000 = 0$ |
| 4 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$ | $\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$ |

Tabela 2.1: Sistemul din problema 2.37

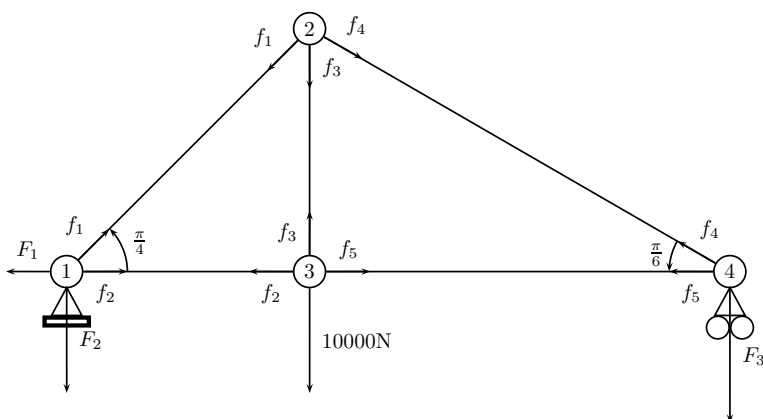


Figura 2.1: O grindă cu zăbrele

Problema 2.38. Figura 2.2 arată o grindă cu zăbrele plană având 21 de membri (liniile numerotate) legate în 12 joncțiuni (cercurile numerotate). Încărcările indicate, în tone, se aplică joncțiunilor 2, 5, 6, 9, și 10 și dorim să determinăm forța rezultantă pe fiecare membru al grinzii.

Pentru ca grinda să fie în echilibru static, rezultantele în fiecare joncțiune trebuie să fie nule. Astfel, putem determina forțele membre egalând forțele orizontale la stânga și la dreapta fiecărei joncțiuni și la fel, forțele verticale deasupra și dedesubtul fiecărei joncțiuni. Pentru cele 12 joncțiuni se obțin 24 de ecuații și 21 de necunoscute. Pentru ca grinda să fie determinată static, adică să existe soluție unică, presupunem că joncțiunea 1 este fixată rigid, atât orizontal cât și vertical și că joncțiunea 12 este fixată vertical. Descompunând forțele membre în componente verticale și orizontale și definind $\alpha = 1/\sqrt{2}$, obținem următorul sistem de ecuații pentru forțele membre f_i :

| | | | |
|----------|------------------------------------|----------|--|
| jonc. 2 | $f_2 = f_6$ $f_3 = 10$ | jonc. 3 | $\alpha f_1 = f_4 + \alpha f_5$ $\alpha f_1 + f_3 + \alpha f_5 = 0$ |
| jonc. 4 | $f_4 = f_8$ $f_7 = 0$ | jonc. 5 | $\alpha f_5 + f_6 = \alpha f_9 + f_{10}$ $\alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 = 15$ |
| jonc. 6 | $f_{10} = f_{14}$ $f_{11} = 20$ | jonc. 7 | $f_8 + \alpha f_9 = f_{12} + \alpha f_{13}$ $\alpha f_9 + f_{11} + \alpha f_{13} = 0$ |
| jonc. 8 | $f_{12} = f_{16}$ $f_{15} = 0$ | jonc. 9 | $\alpha f_{13} + f_{14} = \alpha f_{17} + f_{18}$ $\alpha f_{13} + f_{15} + \alpha f_{17} = 25$ |
| jonc. 10 | $f_{18} = f_{21}$ $f_{19} = 30$ | jonc. 11 | $f_{16} + \alpha f_{17} = f_{20}$ $\alpha f_{17} + f_{19} + \alpha f_{20} = 0$ |
| jonc. 12 | $\alpha f_{20} + f_{21} = 0$ | | |

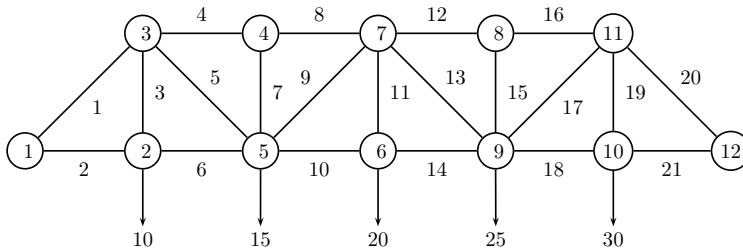


Figura 2.2: Grinda plană

Problema 2.39. Se consideră sistemul rar

$$\begin{bmatrix}
 3 & -1 & & & & & & & & & & \\
 -1 & 3 & -1 & & & & & & & & & \\
 & -1 & 3 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & -1 & 3 & -1 & & & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -1 & 3 & -1 & & & \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & -1 & 3 & -1 & \\
 & & & & & & & & & -1 & 3 & -1 \\
 & & & & & & & & & & -1 & 3 \\
 \frac{1}{2} & & & & & & & & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 x_{n-2} \\
 x_{n-1} \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 2.5 \\
 1.5 \\
 1.5 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 1.5 \\
 1.5 \\
 1.5
 \end{bmatrix}$$

Soluția exactă este $x = [1, 1, \dots, 1, 1]^T$. Utilizați o metodă iterativă pentru a rezolva acest sistem pentru valori crescătoare ale lui n .

Problema 2.40 (P). Un model simplu de grindă supusă îndoirii la solicitări este dat de ecuația diferențială Euler-Bernoulli. Discretizarea cu elemente finite ne conduce la un sistem de ecuații liniare. Pe măsură ce dimensiunea discretizării scade, sistemul devine mai mare și mai prost condiționat.

Pentru o grindă fixată la ambele capete se obține sistemul bandă cu lățimea benzii 5:

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & \frac{4}{3} & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & \frac{4}{3} & 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Membrul drept reprezintă forțele aplicate grinzii. Alegeți-l astfel ca să avem o soluție cunoscută, cum ar fi o încovoiere la mijlocul grinzii. Utilizând o metodă iterativă rezolvați repetat sistemul pentru valori crescătoare ale lui n . Crește eroarea când n crește? Calculați numărul de condiționare al matricei pentru a explica ce se întâmplă.

Problema 2.41. O matrice în forma Hessenberg superioară este o matrice de forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Scrieți o procedură eficientă pentru rezolvarea unui astfel de sistem și testați-o pentru un sistem cu cel puțin 20 de ecuații.

Problema 2.42. [P] Un model simplu de grindă supusă îndoirii la solicitări este dat de ecuația diferențială Euler-Bernoulli. Discretizarea cu elemente finite ne conduce la un sistem de ecuații liniare. Pe măsură ce dimensiunea discretizării scade, sistemul devine mai mare și mai prost condiționat. Sistemul linear pentru un cantilever (grindă în consolă) cu condiții libere la un capăt este

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & \frac{4}{3} & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -\frac{93}{25} & \frac{111}{25} & -\frac{43}{25} \\ & & & & & & \frac{12}{25} & \frac{22}{25} & \frac{12}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Membrul drept reprezintă forțele aplicate grinzii. Alegeți-l astfel ca să avem o soluție cunoscută, cum ar fi o încovoiere la mijlocul grinzii. Utilizând o metodă directă rezolvați repetat sistemul pentru valori crescătoare ale lui n . Crește eroarea când n crește? Calculați numărul de condiționare al matricei pentru a explica ce se întâmplă. Se poate aplica o metodă iterativă staționară?

Problema 2.43. Aproximând derivatele prin diferențe centrate (formulele din problema 2.23) și considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, n, n+1$, să se rezolve problema bilocală

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

prin reducere la un sistem liniar, alegând $n = 10, 100, 1000, 10000$

- (a) cu o metodă directă;
- (b) cu o metodă iterativă.

Problema 2.44. Considerăm rezolvarea iterativă a sistemului $Ax = b$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = [4 \quad -1 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2]^T.$$

Acest sistem apare la rezolvarea EDP

$$\frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial t^2} = f(s, t), \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

- (a) Utilizați metoda lui Jacobi cu $x^{(0)} = 0$. Iterați până când eroarea absolută $\varepsilon_a \leq 0.00005$. Calculați matricea metodei.
- (b) Repetați partea (a) cu metoda Gauss-Seidel. Sugerați o valoare ω pentru care metoda SOR este mai rapidă decât metoda Gauss-Seidel.

Problema 2.45. Se consideră sistemul

$$A_n x = b_n$$

cu A_n dat de (2.2.1) și

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2} [1, \dots, 1]^T.$$

- (a) Utilizați metodele Jacobi și Gauss-Seidel cu $x^{(0)} = 0$. Realizați calculele cu $n = 10, 100, 1000$ și $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$. Câte iterații sunt necesare? Comentați comportarea metodelor.

- (b) Fie $x_i, i = 1, \dots, n$ componentele soluției. Se poate arăta că x_i este apropiat de $t_i(1 - t_i)/2, t_i = i/(n+1), 1 \leq i \leq n$. Pentru orice n și orice ε , notând cu $x^{(k)}$ soluția numerică calculată la (a), reprezentați vectorul eroare

$$e = [e_1, \dots, e_n]^T$$

$$e_i = x_i^{(k)} - \frac{1}{2}t_i(1 - t_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

în raport cu vectorul $t = [t_1, \dots, t_n]^T$. Calculați $\|e\|$ și observați cum scade $\|e\|$ când n crește.

Problema 2.46. (a) Multe sisteme liniare $Ax = b$ se pot scrie direct sub forma $x = b + Mx$, cu $A = I - M$. Analizați convergența iterației

$$x^{(k+1)} = b + Mx^{(k)}, \quad x \geq 0.$$

- (b) Utilizând iterația de la (a), rezolvați sistemul liniar $x = b + Mx$ cu

$$M_{ij} = \frac{1}{2n} \left[\frac{t_i^3}{1 + t_j} + 1 \right], \quad b_i = \frac{1}{4} + t_i - \frac{1}{2}t_i^3$$

și

$$x_i = 1 + t_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

iar $t_i = (2i - 1)/2n, i = 1, \dots, n$. Soluția exactă este

$$x_i = 1 + t_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Rezolvați acest sistem pentru mai multe valori ale lui n , de exemplu $n = 3, 6, 12, 24$ și probabil mai mari. Calculați erorile $\|x - x^{(k)}\|$ și rapoartele cu care ele decresc. În acest mod se rezolvă numeric ecuația integrală

$$x(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{s^3}{1+t} + 1 \right] x(t) dt = \frac{1}{4} + s - \frac{1}{2}s^3, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Problema 2.47. Utilizați metoda SOR pentru a rezolva sistemul liniar $Ax = b$ cu o eroare de 10^{-5} în norma $\|\cdot\|_\infty$, unde elementele lui A sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i, & \text{pentru } j = i \text{ și } i = 1, 2, \dots, 80, \\ 0.5i, & \text{pentru } \begin{cases} j = i + 2 \text{ și } i = 1, 2, \dots, 78, \\ j = i - 2 \text{ și } i = 3, 4, \dots, 80, \end{cases} \\ 0.25i, & \text{pentru } \begin{cases} j = i + 4 \text{ și } i = 1, 2, \dots, 76, \\ j = i - 4 \text{ și } i = 5, 6, \dots, 80, \end{cases} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

iar cele ale lui b sunt date de $b_i = \pi$, pentru $i = 1, 2, \dots, 80$.

Problema 2.48. Consumul de memorie la rezolvarea sistemului $Ax = b$ poate fi minimizat utilizând o schemă diferită de memorare în cazul când A este simetrică. O matrice $n \times n$ simetrică poate fi memorată păstrând doar elementele de pe diagonala principală și dedesubtul diagonalei principale într-un vector de lungime $n(n+1)/2$. Elementele lui A vor fi memorate într-un vector $v = (v_k)$ în ordinea: $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{nn}$. Acest mod se numește mod de memorare simetric și efectul său este economisirea a $n(n-1)/2$ locații de memorie. Verificați că $a_{ij} = v_k$, unde $k = \frac{1}{2}i(i-1) + j$ pentru $i \geq j$. Implementați eliminarea gaussiană pentru o astfel de schemă de memorare. Testați procedura pentru un sistem cu $n = 21$.

Problema 2.49. Implementați o procedură pentru inversarea unei matrice triunghiulare inferioare cu 1 pe diagonala principală. Testați-o pentru matricea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problema 2.50. Scrieți și testați o procedură pentru calculul inversei unei matrice tridiagonale în ipoteza că pivotarea nu este necesară. Testați procedura pe matricea simetrică tridiagonală de ordinul 10:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Notă: Se știe că inversa lui A este

$$(A^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ji} = \frac{-i(n+1-j)}{(n+1)}, \quad i \leq j.$$

2.3. Probleme suplimentare

Problema 2.51 (Sisteme de ecuații liniare prost-condiționate). Pentru a rezolva această problemă va trebui să scrieți un program MATLAB care să aibă în jur de 12 linii, utilizând funcțiile `rand`, `round`, `diag`, `eye`, `size`, `triu`, `tril`, `cond`. Scopul este de a arăta că sisteme aparent inofensive pot fi foarte dificil de rezolvat.

- Generați o matrice B de dimensiune $n \times n$ cu elemente întregi $b_{ij} \in [-10, 10]$. Alegeți, de exemplu, $n = 20$.
- Înlăturați diagonala lui B , salvați partea triunghiulară superioară în U , cea triunghiulară inferioară în L și apoi puneți 1 pe diagonale: $l_{ii} = u_{ii} = 1$.

- (c) Calculați $A = LU$. Cât este valoarea lui $\det(A)$ și de ce? Calculați determinatul cu $\det(A)$ și confirmați predicția dumneavoastră. În cazul în care aveți dubii, calculați separat $\det(L)$ și $\det(U)$.
- (d) Alegeți o soluție exactă, de exemplu, $x_e = \text{ones}(n, 1)$, și calculați membrul drept corespunzător $b = Ax_e$.
- (e) Rezolvați $Ax = b$ în MATLAB și comparați rezultatul cu soluția exactă x_e .
- (f) Explicați rezultatele rezultatele proaste calculând numărul de condiționare a lui A .

Problema 2.52. Calculați coeficienții polinomului $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ astfel încât $P(1) = 17$, $P(-1) = 3$, $P(0.5) = 7.125$ and $P(1.5) = 34.875$. Generați sistemul liniar cu necunoscutele a , b , c și d și rezolvați-l în MATLAB. Cât este numărul de condiționare al sistemului?

Problema 2.53. Iterația inversă este un algoritm pentru calculul celei mai mici valori proprii (în modul) a unei matrice simetrice A :

```
Choose  $x_0$ 
for  $k = 1, 2, \dots, m$  (until convergence) do
    solve  $Ax_{k+1} = x_k$ 
    normalize  $x_{k+1} := x_{k+1} / \|x_{k+1}\|$ 
end for
```

Atunci $\lambda = x_m^T Ax_m / x_m^T x_m$ este o aproximare a celei mai mici valori proprii. O implementare simplă a acestui algoritm este

```
x=rand(n,1)
for k= 1:m
    x=A\x;
    x=x/norm(x);
end
lambda=x'*A*x
```

Pentru matrice mari, putem face economie de operații dacă calculăm descompunerea LU a matricei A o singură dată. Iterația se realizează utilizând factorii L și U . În acest mod, fiecare iterație necesită doar $O(n^2)$ operații, în loc de $O(n^3)$ în programul de mai sus. Utilizați funcțiile dumneavoastră pentru descompunere LUP, substituție directă și inversă pentru a implementa iterația inversă. Experimentați cu câteva matrice și comparați rezultatele dumneavoastră cu cele furnizate de $\text{eig}(A)$.

Problema 2.54. Se consideră sistemul liniar $Ax = b$ cu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & -2 & \alpha \\ -4 & 3 & 9 & 16 \\ 5 & 7 & -6 & 15 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elementul $a_{24} = \alpha$ s-a pierdut. Presupunem, totuși, că înainte, când α era disponibil, MATLAB a furnizat soluția


```
> x=A\b
x =
1.0e+15 *
0.7993
-0.3997
1.1990
-0.3997
```

Puteți determina folosind această informație elementul întreg lipsă $\alpha = a_{24}$?

Problema 2.55. Arătați că dacă al k -lea element de pe diagonala unei matrice triunghiulare superior este zero, atunci primele k coloane sunt linear dependente.

Problema 2.56. Fie L o matrice strict triunghiulară superior sau inferior (adică, triunghiulară cu diagonala principală nulă). Demonstrați că dezvoltările Neumann și Euler pentru $(I - L)^{-1}$ sunt finite. *Notă:* dezvoltarea Euler a lui $(I - L)^{-1}$ este

$$(I - L)^{-1} = (I + L)(I + L^2)(I + L^4) \dots (I + L^{2^k}).$$

Problema 2.57. (a) Arătați că $P = (e_n, \dots, e_2, e_1)$ este o matrice de permutare, că $P = P^T = P^{-1}$ și că Px inversează ordinea elementelor vectorului x .

(b) Presupunem că matricea A are o factorizare LU . Arătați că există o factorizare înrudită $PAP = UL$, unde U este triunghiulară superior și L este triunghiulară inferior.

Problema 2.58. Cum arată M_j^{-1} , dacă M_j este matricea

$$\begin{bmatrix} 1 & & \ell_{ij} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \ell_{j-1,j} & \\ & & & 1 & \\ & & \ell_{j+1,j} & 1 & \ddots \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & \ell_{n,j} & & & & 1 \end{bmatrix}?$$

Problema 2.59. Calculați matricea inversă A^{-1} , unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Rezolvând $AX = I$, prin eliminare gaussiană cu pivotare parțială.

(b) Prin factorizare LU și folosind proprietatea $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

Problema 2.60. Fie matricea simetrică și pozitiv definită A . Arătați că $|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2$.

Problema 2.61. Cum puteți decide dacă o matrice este simetrică (hermitiană) și pozitiv definită în timp $\Theta(n^3)$? Există alternative demne de luat în considerare? Arătați că matricea

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

este pozitiv definită calculând descompunerea ei Cholesky.

Problema 2.62. Matricea Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cu elementele

$$h_{ij} = 1/(i+j-1), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

este simetrică și pozitiv definită pentru orice n . Notăm cu \overline{H}_4 matricea H_4 cu elementele rotunjite la cinci zecimale și calculăm factorul \overline{L} din descompunerea ei Cholesky. Calculați diferența $(\overline{L}\overline{L}^T - H_4)$ și comparați-o cu $(H_4 - \overline{H}_4)$. Explicați.

Problema 2.63. Fie $A + iB$ hermitiană și pozitiv definită, unde $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Arătați că matricea reală

$$C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

este simetrică și pozitiv definită. Cum se poate rezolva sistemul liniar $(A + iB)(x + iy) = b + ic$ utilizând factorizarea Cholesky a lui C ?

Problema 2.64 (Formula Sherman-Morrison-Woodbury). Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice inversabilă și $b, u, v \in \mathbb{R}^n$.

(a) Arătați că dacă $I + uv^T$ este inversabilă, atunci există un σ astfel încât

$$(I + uv^T)^{-1} = I + \sigma uv^T.$$

Care este o condiție suficientă de inversabilitate a lui $I + uv^T$? Arătați că această condiție este și necesară.

(b) Presupunem că cunoaștem descompunerea LU a lui A și soluțiile sistemelor liniare

$$Ay = b \text{ și } Az = u. \quad (2.3.1)$$

Găsiți un algoritm eficient de rezolvare a sistemului

$$(A + uv^T)x = b$$

care utilizează doar soluțiile sistemelor (2.3.1). Găsiți un exemplu numeric.

Problema 2.65. Se consideră sistemul $Ax = b$ și metoda iterativă

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}),$$

unde ω este un număr real. Presupunem că valorile proprii ale lui A sunt reale și satisfac

$$0 < a \leq \lambda_i \leq b, \quad i = 1, \dots, n.$$

Atunci metoda este convergentă pentru orice ω ce satisface $0 < \omega < \frac{2}{b}$. Care este valoarea optimală pentru ω ?

3.1. Probleme teoretice

Problema 3.1. (a) Fie $L_n(f; x)$ polinomul de interpolare de grad $\leq n$ corespunzător funcției $f(x) = e^x$ și punctelor $x_i = i/n$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Deduceți o margine superioară pentru

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - (L_n f)(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |(R_n f)(x)|$$

și determinați cel mai mic n ce garantează o eroare mai mică decât 10^{-6} pe $[0, 1]$.

Indicație. Arătați întâi că pentru orice i , $0 \leq i \leq n$ are loc

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \left(x - \frac{i}{n} \right) \left(x - \frac{n-i}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{4}.$$

(b) Rezolvați problema analoagă pentru polinomul Taylor de grad n

$$(T_n f)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

și comparați rezultatul cu cel de la (a).

Problema 3.2. (a) Pentru un polinom de interpolare de grad II cu noduri echidistante x_0 , $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, deduceți o margine superioară $\|R_2 f\|_\infty$ în funcție de $\|f'''\|_\infty$ și h .

(b) Comparați marginea obținută la (a) cu cea analoagă pentru trei puncte Cebîșev din $[x_0, x_2]$.

Problema 3.3. (a) Presupunem că funcția $f(x) = \ln(2+x)$, $x \in [-1, 1]$ este interpolată printr-un polinom $L_n f$ în punctele Cebîșev $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, $k = \overline{0, n}$. Deduceți o margine a erorii maxime, $\|R_n f\|_\infty$.

(b) Comparați rezultatul de la (a) cu marginea superioară $\|R_n^T f\|_\infty$ a restului polinomului de interpolare Taylor al lui f .

Problema 3.4. Fie $f(t) = \arccos t$, $t \in [-1, 1]$. Determinați aproximația continuă în sensul celor mai mici pătrate $\widehat{\varphi} \in P_n$ a lui f relativ la ponderea $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, adică, găsiți soluția $\varphi = \widehat{\varphi}$ a problemei

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 [f(t) - \varphi(t)]^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} : \varphi \in P_n \right\}.$$

(φ se va exprima în baza formată de polinoamele Cebîșev de speța I, $\pi_j(t) = T_j(t)$.)

Problema 3.5. Dându-se $f \in C^2[0, h]$, $h > 0$ să se determine un polinom de grad minim B astfel încât

$$\begin{cases} B(0) = f(0) \\ B'(h) = f'(h). \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Să se dea expresia restului.

Problema 3.6. Fie f o funcție dată pe $[0, 1]$ ce satisface $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(a) Reduceți problema aproximării lui f pe $[0, 1]$ în sensul celor mai mici pătrate (continuu, cu ponderea $w(t) = 1$) printr-un polinom de grad II p ce satisface $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ la o problemă de aproximare în sensul celor mai mici pătrate fără restricții (pentru o funcție diferită).

(b) Aplicați rezultatul de la (a) lui $f(t) = t^r$, $r > 2$. Reprezentați pe același grafic aproximația și funcția exactă pentru $r = 3$.

Problema 3.7. Fie

$$s_1(x) = 1 + c(x+1)^3, \quad -1 \leq x \leq 0,$$

unde c este un parametru real.

Determinați $s_2(x)$ pe $0 \leq x \leq 1$ astfel încât

$$s(x) := \begin{cases} s_1(x) & \text{if } -1 \leq x \leq 0 \\ s_2(x) & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

să fie un spline cubic natural pe $[-1, 1]$ cu nodurile $-1, 0, 1$. Cât trebuie ales c dacă se dorește ca $s(1) = -1$?

Problema 3.8. Dându-se relația de recurență

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k - \beta_k\pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

pentru polinoame ortogonale (monice) $\{\pi_j(\cdot; d\lambda)\}$ și definind $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\lambda(t)$ arătați că $\|\pi_k\|^2 = \beta_0\beta_1 \dots \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Cum poate fi exploatat acest lucru într-o implementare practică a aproximării în sensul celor mai mici pătrate relativă la un sistem ortogonal?

Problema 3.9. (a) Utilizați interpolarea Hermite pentru a găsi un polinom de grad minim ce satisface

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = p'(1) = 0.$$

Simplificați expresia lui p cât mai mult posibil.

(b) Presupunem că polinomul p de la (a) este utilizat pentru a aproxima funcția $f(x) = [\cos(\pi x/2)]^2$ pe $-1 \leq x \leq 1$.

(b₁) Exprimați eroarea $(Rf)(x) = f(x) - p(x)$ (pentru un $x \in [-1, 1]$ fixat) în funcție de o derivată corespunzătoare a lui f .

(b₂) Găsiți o margine superioară a lui $|(Rf)(x)|$ (pentru un $x \in [-1, 1]$ fixat).

(b₃) Estimați $\max_{-1 \leq x \leq 1} |(Rf)(x)|$.

Problema 3.10. Considerăm problema determinării unui polinom $p \in \mathbb{P}_n$ astfel încât

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_i) = f'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

unde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ sunt noduri distincte. Această interpolare nu este nici Lagrange nici Hermite (de ce?). Arătați că problema are soluție unică și explicați cum se poate obține. Găsiți restul.

Problema 3.11. (a) Determinați un spline pătratic $s_2(x)$ pe $[-1, 1]$ cu un singur nod $x = 0$ astfel ca $s_2(x) = 0$ pe $[-1, 0]$ și $s_2(1) = 1$.

(b) Se consideră funcția $s(x)$ de forma

$$s(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3s_2(x), \quad c_i = \text{const}$$

unde $s_2(x)$ a fost definit la (a). Ce fel de funcție este s ? Determinați s astfel ca

$$s(-1) = f_{-1}, \quad s(0) = f_0, \quad s'(0) = f'_0, \quad s(1) = f_1$$

unde $f_i = f(i), f'_i = f'(i), i = -1, 0, 1$.

(c) Ce formula de cuadratură se obține dacă se aproximează $\int_{-1}^1 f(x)dx$ prin $\int_{-1}^1 s(x)dx$, cu s obținut la (b)?

Problema 3.12. Se consideră datele $f(0) = 5, f(1) = 3, f(3) = 5, f(4) = 12$.

(a) Utilizați forma Newton pentru a obține polinomul de interpolare corespunzător L_3f .

(b) Datele sugerează că f are un minim între $x = 1$ și $x = 3$. Găsiți o valoare aproximativă a punctului de minim x_{\min} .

Problema 3.13. Fie f o funcție definită pe $[0, 3]$ despre care se știe că

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = -1, \quad f(3) = f'(3) = 0.$$

- (a) Estimați $f(2)$ folosind interpolarea Hermite.
- (b) Estimați eroarea maximă posibilă a rezultatului de la (a) dacă se știe, în plus, că $f \in C^5[0, 3]$ și $|f^{(5)}(x)| \leq M$ pe $[0, 3]$. Exprimați răspunsul în funcție de M .

Problema 3.14. Intr-o tabelă cu funcții Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta,$$

unde x este incrementat cu pasul h , cât de mic trebuie să fie ales h pentru ca tabela să fie „interpolabilă liniar” cu o eroare mai mică decât 10^{-6} în modul? (Adică, dacă interpolăm liniar între două noduri consecutive tabelate, modulul erorii să fie mai mic decât valoarea dată.)

Problema 3.15. Să se arate că pentru polinomul de interpolare Hermite cu noduri duble avem

$$(H_{2m+1}f)(x) = \sum_{k=0}^m h_{k0}(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^m h_{k1}(x)f'(x_k),$$

unde

$$\begin{aligned} h_{k0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)]\ell_k^2(x) \\ h_{k1}(x) &= (x - x_k)\ell_k^2(x), \end{aligned}$$

iar ℓ_k sunt polinoamele fundamentale Lagrange.

Problema 3.16. (a) Fie clasa Φ_n de funcții de aproximare cu proprietățile date în continuare. Orice $\varphi \in \Phi_n$ este definită pe un interval $[a, b]$ simetric față de origine (i.e. $a = -b$) și $\varphi(t) \in \Phi_n$ implică $\varphi(-t) \in \Phi_n$. Fie $d\lambda(t) = \omega(t)dt$, cu $\omega(t)$ funcție pară pe $[a, b]$ (i.e. $\omega(-t) = \omega(t)$). Arătați că dacă f este o funcție pară pe $[a, b]$, atunci și aproximanta sa în sensul celor mai mici pătrate $\widehat{\varphi}_n \in \Phi_n$ este pară.

(b) Considerăm ”hat function”

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1] \\ 1 + t, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Determinați aproximația sa în sensul celor mai mici pătrate pe $[-1, 1]$ printr-o funcție quadratică. (Utilizați $d\lambda(t) = dt$). Simplificați calculele utilizând (a). Determinați punctele în care eroarea se anulează.

Problema 3.17. Determinați aproximanta în sensul celor mai mici pătrate

$$\varphi(t) = \frac{c_1}{1+t} + \frac{c_2}{(1+t)^2}, \quad t \in [0, 1]$$

a funcției $f(t) = e^{-t}$, luând $d\lambda(t) = dt$ on $[0, 1]$. Determinați numărul de condiționare $\text{cond}_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ al matricei A a coeficienților ecuațiilor normale. Calculați eroarea $f(t) - \varphi(t)$ în $t = 0$, $t = 1/2$, și $t = 1$.

(Indicație: Integrala

$$\int_1^\infty t^{-m} e^{-xt} dt = E_m(x) = E_i(m, x)$$

se numește a „ m -a integrală exponențială”. Exprimați rezultatul cu ajutorul acestei funcții)

Problema 3.18. Să se determine un polinom de interpolare de grad minim care verifică:

$$\begin{aligned} P'(0) &= f'(0); \\ P(h) &= f(h), \quad h > 0, f \in C^2[0, h]. \end{aligned}$$

Aceasta interpolare nu este nici Lagrange, nici Hermite. De ce? Determinați expresia restului.

Problema 3.19. Se consideră formula de interpolare a lui Lagrange cu restul în forma Peano, pentru $m = 1$:

$$f(x) = (L_1 f)(x) + \int_a^b K_1(x, t) f''(t) dt, \quad f \in C^2[a, b].$$

- (a) Ce devine nucleul lui Peano $K_1(x, t)$ dacă $x \in (x_0, x_1)$? Deduceți existența unui $\xi_x \in (x_0, x_1)$ astfel încât

$$(R_1 f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi_x).$$

- (b) Arătați că soluția unică a problemei cu valori pe frontieră: fiind dat $g \in C[x_0, x_1]$, găsiți $u \in C^2[x_0, x_1]$ astfel încât

$$\begin{aligned} u''(x) &= g(x), & x \in (x_0, x_1) \\ u(x_0) &= 0 \\ u(x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

este dată de

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K_1(x, t) g(t) dt,$$

unde $K_1(x, t)$ este nucleul lui Peano.

Problema 3.20. Valorile funcției $f : x \rightarrow \sin x$ sunt date în punctele $x_i = i\pi/8$, pentru toate valorile întregi ale lui i . Pentru un $x \in \mathbb{R}$, se calculează o aproximare $u(x)$ a lui $f(x)$ definind $k = \left[\frac{8x}{\pi} \right]$ (partea întreagă), astfel încât $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ și apoi evaluând polinomul de interpolare Lagrange de gradul 5 cu nodurile $(x_j, f(x_j))$, $j = k - 2, \dots, k + 3$. Arătați că pentru orice x real

$$|\sin x - u(x)| \leq \frac{225\pi^6}{16^6 \cdot 6!} < 0.00002.$$

Problema 3.21. Se consideră punctele de extrem ale polinomului Cebîșev de speța I T_n , $\eta_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n}$.

(a) Arătați că

$$(f, g)_U = \frac{1}{2}f(\eta_0)g(\eta_0) + f(\eta_1)g(\eta_1) + \cdots + f(\eta_{n-1})g(\eta_{n-1}) + \frac{1}{2}f(\eta_n)g(\eta_n)$$

este un produs scalar discret.

(b) Arătați că polinoamele Cebîșev de speța I sunt ortogonale în raport cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)_U$, adică

$$(T_i, T_j)_U = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{n}{2}, & i = j \neq 0 \\ n, & i = j = 0 \end{cases}.$$

(c) Dați expresia coeficienților polinomului de cea mai bună aproximare în raport cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)_U$.

Problema 3.22 (Polinoamele Cebîșev de speța a treia). (a) Arătați că polinoamele

$$V_n(t) = \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\cos \frac{1}{2}\theta},$$

unde $\theta = \arccos t$, sunt ortogonale pe intervalul $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.

(b) Stabiliți relația de recurență $V_{n+1}(t) = 2tV_n(t) - V_{n-1}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Găsiți o formulă de cuadratură cu două noduri bazată pe aceste polinoame ortogonale.

Problema 3.23 (Polinoamele Cebîșev de speța a patra). (a) Arătați că polinoamele

$$W_n(t) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\sin \frac{1}{2}\theta},$$

unde $\theta = \arccos t$, sunt ortogonale pe intervalul $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

(b) Stabiliți relația de recurență $W_{n+1}(t) = 2tW_n(t) - W_{n-1}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Găsiți o formulă de cuadratură cu două noduri bazată pe aceste polinoame ortogonale.

Problema 3.24 (Polinoamele ortogonale ale lui Charlier). Găsiți polinoamele ortogonale discrete de grad 0, 1 și 2, având ca suport mulțimea numerelor naturale, în raport cu ponderea $w(k) = \frac{e^{-a}a^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Găsiți aproximanta de grad I în sensul celor mai mici pătrate a funcției $f(x) = e^x$ bazată pe aceste polinoame ortogonale.

Problema 3.25 ([Polinoamele Cebîșev discrete]). Găsiți polinoamele ortogonale discrete de grad 0, 1 și 2, având ca suport mulțimea $\{0, 1, \dots, N-1\}$, în raport cu ponderea $w(k) = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Găsiți aproximanta de grad I în sensul celor mai mici pătrate a funcției $f(x) = 2^x$ bazată pe aceste polinoame ortogonale, pentru $N = 5$.

Problema 3.26. Arătați că dacă funcția g interpolatează funcția f în x_0, x_1, \dots, x_{n-1} și h interpolatează f în x_1, x_2, \dots, x_n , atunci

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} [g(x) - h(x)] \quad (3.1.3)$$

interpolează f în $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$. Dați un exemplu de funcții g și h și combinație (3.1.3) cu această proprietate.

Problema 3.27. Fie $f(x) = e^x$.

(a) Arătați că

$$f[t, t+1, \dots, t+n] = \frac{(e-1)^n}{n!} e^t.$$

(b) Din formula de medie pentru diferențe divizate se știe că

$$f[0, 1, \dots, n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (0, n).$$

Utilizați rezultatul de la (a) pentru a determina ξ . Este localizat la stânga sau la dreapta mijlocului $n/2$?

Problema 3.28. [Euler, 1734] Fie $x_k = 10^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ și $f(x) = \log_{10} x$.

(a) Arătați că

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{(-1)^{n-1}}{10^{n(n-1)/2} (10^n - 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(Indicație: demonstrați prin inducție după n rezultatul mai general

$$f[x_r, \dots, x_{r+n}] = \frac{(-1)^{n-1}}{10^{rn+n(n-1)/2} (10^n - 1)}, \quad r \geq 0.)$$

(b) Utilizați formula lui Newton pentru a determina $p_n(x) = (L_n f)(x; x_0, x_1, \dots, x_n)$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$ există, pentru $x \in [1, 10)$. Este limita egală cu $\log_{10}(x)$? Verificați pentru $x = 9$.

Problema 3.29. (a) Deduceți relația de recurență cu trei termeni

$$\sqrt{\beta_{k+1}} \tilde{\pi}_{k+1}(t) = (t - \alpha_k) \tilde{\pi}_k(t) - \sqrt{\beta_k} \tilde{\pi}_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.4)$$

$$\tilde{\pi}_{-1}(t) = 0, \quad \tilde{\pi}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \quad (3.1.5)$$

pentru polinoamele ortonormale $\tilde{\pi}_k(t) = \pi_k(t) / \|\pi_k\|$, $k = 0, 1, 2, \dots$

(b) Utilizați rezultatul de la (a) pentru a deduce formulele *Christoffel–Darboux*

$$\sum_{k=0}^n \tilde{\pi}_k(x) \tilde{\pi}_k(t) = \sqrt{\beta_{n+1}} \frac{\tilde{\pi}_{n+1}(x) \tilde{\pi}_n(t) - \tilde{\pi}_n(x) \tilde{\pi}_{n+1}(t)}{x - t}, \quad (3.1.6)$$

$$\sum_{k=0}^n [\tilde{\pi}_k(t)]^2 = \sqrt{\beta_{n+1}} [\tilde{\pi}'_{n+1}(t) \tilde{\pi}_n(t) - \tilde{\pi}'_n(t) \tilde{\pi}_{n+1}(t)]. \quad (3.1.7)$$

Problema 3.30. Fie $f(x) = (1+a)^x$; $|a| < 1$. Arătați că $(L_n f)(x; 0, 1, \dots, n)$ este trunchierea (suma parțială) a seriei binomiale a lui f la $n+1$ termeni. (Indicație: utilizați forma Newton a polinomului de interpolare.)

Problema 3.31. (a) Utilizați formula $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$ pentru polinoame Cebîșev și arătați că

$$\begin{aligned} \int T_j(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos((j+1) \arccos x)}{j+1} - \frac{\cos((j-1) \arccos x)}{j-1} \right] + C \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1} \right] + C, \quad j = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

unde C este o constantă arbitrară.

(b) Fie $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x)$. Utilizați partea (a) împreună cu relațiile $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ pentru a determina coeficienții A_0, \dots, A_n, A_{n+1} astfel încât $\int p(x) dx = \sum_{j=0}^{n+1} A_j T_j(x)$, adică exprimați A_0, \dots, A_n, A_{n+1} în funcție de a_0, \dots, a_n . (Notă: coeficientul A_0 poate fi arbitrar, pentru a ține cont de constanta arbitrară din integrala nedefinită.)

(c) Fie acum $q(x) = \sum_{j=0}^{n+1} A_j T_j(x)$. Inversând procesul de la punctul (b), determinați coeficienții a_0, \dots, a_n astfel încât $q'(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x)$, adică exprimați a_0, \dots, a_n în funcție de A_0, \dots, A_n, A_{n+1} . *Indicație:* lucrați de la indici mari spre indici mici, exprimând a_n în funcție de A_{n+1} , apoi exprimând a_{n-1} în funcție de A_n , apoi a_{j-1} în funcție de A_j și a_{j+1} , $j = n-1, \dots, 1$.

Problema 3.32. 1. Arătați că dacă $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ și $h = (b-a)/n$, atunci pentru orice $x \in [a, b]$

$$\prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \frac{1}{4} h^{n+1} n!. \quad (3.1.8)$$

2. Dacă $f \in C^{n+1}[a, b]$ și $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pe $[a, b]$ și nodurile sunt echidistante

$$|(R_n f)(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M h^{n+1}. \quad (3.1.9)$$

Problema 3.33. Funcția

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$$

se numește funcția lui Lebesgue pentru interpolarea polinomială și nodurile distincte x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

- (a) Dacă $f_i = f(x_i)$ și $f_i^* = f(x_i) + \varepsilon_i$, unde $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$, arătați că $|(L_n f^*)(x) - (L_n f)(x)| \leq \varepsilon \lambda_n(x)$.
- (b) Arătați că $\lambda_n(x_j) = 1$, $j = 0, 1, \dots, n$.
- (c) Pentru $n = 2$ și trei puncte echidistante, arătați că $\lambda_2(x) \leq 1.25$ pentru orice x situat între aceste puncte.
- (d) Calculați $\lambda_2(x)$ pentru $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = p$, unde $p \gg 1$ și determinați $\max_{1 \leq x \leq p} \lambda_2(x)$. Cum crește acest maxim odată cu p ? *Indicație:* pentru a simplifica calculele, din (b) se obține că $\lambda_2(x)$ trebuie să fie pe intervalul $[1, p]$ de forma $\lambda_2(x) = 1 + c(x-1)(p-x)$, unde c este o constantă.

Problema 3.34. Se consideră intervalul $[a, b] = [-1, 1]$ și subdiviziunea sa $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$ și fie $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$, $x \in [-1, 1]$.

- (a) Determinați spline-ul cubic natural al lui f pe Δ .
- (b) Ilustrați teorema de minimalitate pentru funcții spline naturale, alegând $g(x) = (L_2 f)(x; -1, 0, 1)$ și $g(x) = f(x)$.
- (c) Aceeași problemă pentru interpolantul cubic natural f pe Δ' și alegerile $g(x) = (L_3 f)(x; -1, 0, 1, 1)^1$ și $g(x) = f(x)$.

Problema 3.35. Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a lui $[a, b]$ în $n - 1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale funcției f în punctele x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1$ va fi un spline quadratic (de gradul II) care interpoalează f pe Δ , adică $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

- (a) Explicați de ce este nevoie de o condiție suplimentară pentru a determina s unic.
- (b) Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Determinați $p_i := s|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ în funcție de f_i, f_{i+1} și m_i .
- (c) Presupunem că $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s unic.) Arătați cum pot fi calculate m_2, m_3, \dots, m_{n-1} .

Problema 3.36. Fie

$$\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Considerăm problema următoare: dându-se $n - 1$ numere f_ν și $n - 1$ puncte ξ_k cu $x_\nu < \xi_\nu < x_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n - 1$) determinați o funcție spline $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ cu proprietățile

$$s(\xi_\nu) = f_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n - 1, \quad s(x_1) = s(x_n).$$

Reprezentând s în baza B-splinelor de grad 1, B_1, B_2, \dots, B_n , determinați structura sistemului liniar care dă coeficienții c_j ai lui $s(x) = \sum_{j=1}^n c_j B_j(x)$. Descrieți modul de rezolvare eficientă a sistemului.

¹de fapt este un interpolant Hermite cu nodul dublu 1 și nodurile -1 și 0 simple.

3.2. Probleme practice

Problema 3.37. Să se genereze un spline cubic parametric care să treacă prin punctele date $P_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$. Punctele se vor citi cu `ginput`.

Problema 3.38. (a) Dându-se $f \in C[a, b]$, găsiți $\widehat{s}_1(f; \cdot) \in S_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$\int_a^b [f(x) - \widehat{s}_1(f; x)]^2 dx \rightarrow \min$$

utilizând baza B-splinelor de gradul întâi. Ce puteți spune despre problema analogă discretă?

(b) Implementați soluția de la punctul (a) în MATLAB.

Problema 3.39. Scrieți o funcție MATLAB ce calculează coeficienții unui spline cubic periodic de clasă $C^2[a, b]$. Aceasta înseamnă că datele de intrare verifică $f_n = f_1$ și interpolantul trebuie să fie periodic, de perioadă $x_n - x_1$. Realizarea condițiilor la capete este mai simplu de impus dacă adăugăm două puncte suplimentare $x_0 = x_1 - \Delta x_{n-1}$ și $x_{n+1} = x_n + \Delta x_1$, unde spline-ul are valorile $f_0 = f_{n-1}$ și respectiv $f_{n+1} = f_2$.

Problema 3.40. Să se reprezinte grafic o cubică parametrică care trece prin două puncte date și are în acele puncte tangente date.

Problema 3.41. Pentru o funcție dată f și o mulțime de noduri, x_i , date să se determine un spline cubic $S_3 f$ ce verifică

$$\begin{aligned} (S_3 f)(x_i) &= f(x_i), \\ (S_3 f)'(x_i) &= f'(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Să se reprezinte grafic $S_3 f$ și spline-ul natural $S_3 f_N$ ce verifică $(S_3 f_N)(x_i) = f(x_i)$. (pe același grafic).

Problema 3.42. Scrieți o funcție MATLAB pentru inversarea unei matrice Vandermonde utilizând proprietățile polinoamelor Lagrange fundamentale.

Problema 3.43. În literatura de specialitate (J. Crank, G. Park: Evaluation of the diffusion coefficient for CHCl_3 in polystyrene from simple absorption experiments, *Trans. Faraday Soc.* **45**(1949), pp. 240-249) se dă o metodă de deducere a coeficientului de difuzie a clorofomului în polistiren din măsurătorile de absorbție. Utilizând mai multe ipoteze, autorii ajung la cantitatea

$$\widehat{D}(C_0) = \frac{1}{C_0} \int_0^{C_0} D(C) dC,$$

care poate fi măsurată pentru diverse valori ale lui C_0 . Derivarea în raport cu C_0 ne dă o expresie a lui D în funcție de cantitatea

$$\frac{d}{dC_0} [C_0 \widehat{D}(C_0)].$$

Utilizând datele

| | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|
| C_0 | 5.0 | 7.5 | 9.9 | 12.9 |
| $\widehat{D}(C_0)$ | 0.0240 | 0.0437 | 0.0797 | 0.1710 |
| C_0 | 13.2 | 15.1 | 16.3 | 16.8 |
| $\widehat{D}(C_0)$ | 0.1990 | 0.3260 | 0.8460 | 0.9720 |

aproximați D pentru fiecare valoare a lui C_0 diferențiind spline-ul corespunzător. (Indicație: $\widehat{D}(C_0) + C_0 \frac{\widehat{D}(C_0)}{dC_0} = D(C_0)$).

Problema 3.44. Datele următoare dau absorbția luminii A ca funcție de lungimea de undă λ pentru un obturator vanadyl D-tartrat.

| | | | | | | |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| λ | > 3125 | > 3250 | 3375 | > 3500 | 3625 | > 3750 |
| $A(\lambda)$ | 0.700 | 0.572 | 0.400 | 0.382 | 0.449 | 0.560 |
| λ | 3875 | > 4000 | 4125 | > 4250 | 4375 | |
| $A(\lambda)$ | 0.769 | 0.836 | 0.750 | 0.530 | 0.315 | |
| λ | > 4500 | 4625 | > 4750 | 4875 | > 5000 | |
| $A(\lambda)$ | 0.170 | 0.144 | 0.183 | 0.252 | 0.350 | |

Utilizați un spline cubic pentru a interpola punctele marcate cu (>). Studiați efectele scalării și translației variabilei independente $x = \lambda$ (lungimea de undă) în cazurile:

- (a) se iau datele așa cum sunt;
- (b) se înlocuiește x cu $x/1000$;
- (c) se înlocuiește x cu $(x - 4000)/1000$;

În fiecare caz evaluați spline-ul cubic pentru lungimile de undă nemarcate. Cum sunt valorile aproximative comparativ cu valorile din tabelă? Afectează scalările și translațiile precizia lui S ?

Problema 3.45. Fie forma pătratică $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$. Ecuația se poate normaliza, împărțind cu un coeficient nenul (de exemplu $f \neq 0$). Mulțimile $\{(x, y) : z = 0\}$ se numesc secțiuni conice. Ele se pot vizualiza cu funcția `contour`. Planetele au orbite eliptice. Iată 10 observații ale pozițiilor unei planete

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1.02 | .95 | .87 | .77 | .67 | .56 | .44 | .30 | .16 | .01 |
| y | 0.39 | .32 | .27 | .22 | .18 | .15 | .13 | .12 | .13 | .15 |

- (a) Determinați coeficienții formei pătratice care aproximează aceste date în sensul celor mai mici pătrate luând un coeficient egal cu 1 și rezolvând sistemul supradeterminat 10×5 . Desenați orbita și cele 10 puncte date.
- (b) Această problemă este aproape deficientă de rang. Pentru a vedea efectul perturbați datele ușor adăugând fiecărei coordonate de punct un număr aleator distribuit uniform în intervalul $[-0.005, 0.005]$. Calculați noii coeficienți pentru datele perturbate. Desenați orbita nouă pe același grafic cu cea veche. Comentați pe marginea diferențelor între coeficienți și orbite.

Problema 3.46. Energia potențială a două sau mai multe molecule ce interacționează se numește energie de interacțiune van der Waal. Un calcul teoretic pentru doi atomi de heliu are energiile $V(r)$ pentru diferite valori de distanțe internucleare r date mai jos. Energia se manifestă repulsiv ($V > 0$) pentru r mic și atractiv ($V < 0$) pentru valori mai mari ale lui r .

| | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| r (bohr) | 4.6 | 4.8 | 5.0 | 5.1 | 5.2 |
| $V(r)$ | 32.11 | 9.0 | -3.52 | -7.11 | -9.22 |
| r (bohr) | 5.3 | 5.4 | 5.5 | 5.6 | 5.7 |
| $V(r)$ | -10.74 | -11.57 | -11.95 | -12.00 | -11.73 |
| r (bohr) | 5.8 | 5.9 | 6.0 | 6.5 | 7.0 |
| $V(r)$ | -11.23 | -10.71 | -10.13 | -7.15 | -4.77 |
| r (bohr) | 7.5 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | |
| $V(r)$ | -3.17 | -2.14 | -1.03 | -0.54 | |

Să se aproximeze $S(r)$ utilizând un spline cubic și să se reprezinte grafic. Aproximați derivata de ordinul I a lui V pe întregul domeniu de valori tabelate și $\int_5^9 V(r)dr$.

Problema 3.47. Absorbția sunetului (la 20° , 40% umiditate) ca funcție de frecvența f este dată în tabela:

| | | | | | |
|--------|--------|---------|---------|---------|--------|
| f | > 20 | > 40 | 63 | > 100 | 200 |
| $A(f)$ | 0.008 | 0.030 | 0.070 | 0.151 | 0.359 |
| f | > 400 | 800 | > 1250 | 2000 | > 4000 |
| $A(f)$ | 0.592 | 0.935 | 1.477 | 2.870 | 9.618 |
| f | 10000 | > 16000 | > 40000 | > 80000 | |
| $A(f)$ | 53.478 | 122.278 | 429.310 | 850.536 | |

Utilizați un spline deBoor și punctele marcate cu (>) pentru a interpola în următoarele două moduri.

- se iau datele așa cum sunt;
- $\log f$ în raport cu $\log A(f)$.

Care este mai bun? Reprezentați grafic varianta mai bună. Comparați valorile în punctele nemarcate cu valorile aproximative.

Problema 3.48. Să se calculeze $\sqrt{115}$ cu trei zecimale exacte folosind interpolarea Lagrange.

Problema 3.49. Generați 11 puncte luând $t_k = (k - 1)/10$ și $y_k = \operatorname{erf}(t_k)$, $k = 1, \dots, 11$.

- Aproximați discret datele în sensul celor mai mici pătrate cu polinoame având gradul de la 1 la 10. Comparați aproximantele cu $\operatorname{erf}(t)$ pentru valori ale lui t situate între punctele t_k . Cum depinde eroarea maximă de gradul polinomului?

- (b) Deoarece $\operatorname{erf}(t)$ este o funcție pară în t , este rezonabil să se aproximeze datele printr-o combinație liniară de puteri impare ale lui t ,

$$\operatorname{erf}(t) \approx c_1 t + c_2 t^3 + \dots + c_n t^{2n-1}.$$

Cum depind erorile între punctele t_k de n ?

- (c) Polinoamele nu sunt aproximante bune pentru $\operatorname{erf}(t)$, deoarece sunt nemărginite, pe când $\operatorname{erf}(t)$ tinde către 1 pentru t mare. Utilizând aceleași date, aproximați utilizând un model de forma

$$\operatorname{erf}(t) \approx c_1 + e^{-t^2} (c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + c_5 z^3)$$

unde $z = 1/(1+t)$. Cum sunt erorile în valori ale lui t situate între punctele t_k , comparativ cu modelul polinomial?

Problema 3.50. Fie funcția $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+(1-x)^2}$ și 20 de puncte echidistante pe domeniul de definiție. Să se aproximeze f printr-un polinom de grad 3 prin metoda celor mai mici pătrate și printr-un spline deBoor. Să se reprezinte pe două grafice funcția și fiecare din aproximante (cu subplot).

Problema 3.51. La realizarea titrării potențimetrică se obține o curbă a diferențelor de potențial în funcție de volumul de titrant adăugat. Tabela de mai jos dă măsurătorile pentru titrarea potențimetrică a soluției de Fe^{2+} cu soluția $0.1095N \text{ Ce}^{4+}$ utilizând electrozi de platină și calomel.

| | | | | | | | |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Sol. adăugată (ml) | 1.0 | 5.0 | 10.0 | 15.0 | 20.0 | 21.0 | 22.0 |
| $E(mV)$ | 373 | 415 | 438 | 459 | 491 | 503 | 523 |
| Sol. adăugată (ml) | 22.5 | 22.6 | 22.7 | 22.8 | 22.9 | 23.0 | 23.1 |
| $E(mV)$ | 543 | 550 | 557 | 565 | 575 | 590 | 620 |
| Sol. adăugată (ml) | 23.2 | 23.3 | 23.4 | 23.5 | 24.0 | 26.0 | 30.0 |
| $E(mV)$ | 860 | 915 | 944 | 958 | 986 | 1067 | 1125 |

Calculați un spline cubic pentru aceste date (utilizând cam 15 puncte de interpolare). Reprezentați grafic spline-ul pe intervalul $[0, 24]$. Cât de bine se comportă? Problema fizică are un punct de inflexiune. Este acest lucru adevărat și pentru spline?

Problema 3.52. Presiunea P a vaporilor de apă (în bari) ca funcție de temperatură T (în grade C) este

| | | | | |
|--------|----------|----------|----------|---------|
| T | 0 | 10 | 20 | 30 |
| $P(T)$ | 0.006107 | 0.012277 | 0.023378 | 0.04243 |
| T | 40 | 50 | 60 | 80 |
| $P(T)$ | 0.073774 | 0.12338 | 0.19924 | 0.31166 |
| T | 80 | 90 | 100 | |
| $P(T)$ | 0.47364 | 0.70112 | 1.01325 | |

Interpolați aceste date cu un spline cubic. Se știe că $P(5) = 0.008721$, $P(45) = 0.095848$, and $P(95) = 0.84528$. Cât de bine interpolează S în aceste puncte? Reprezentați grafic S ca o funcție de T . Calculați integrala presiunii de la 0 la 100.

Problema 3.53. Constanta lui Euler $\gamma = 0.57721566490153286 \dots$ se definește ca limita

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n, \text{ unde } \gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Presupunând că $\gamma - \gamma_n \sim cn^{-d}$, $n \rightarrow \infty$, pentru constantele c și d strict pozitive, determinați c și d experimental pe calculator. (Indicație: logaritmați relația $\gamma - \gamma_n \approx cn^{-d}$ și aplicați metoda celor mai mici pătrate).

Problema 3.54. Se consideră funcția $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ și 4 noduri echidistante în intervalul $[0, 5]$. Să se aproximeze $f(\pi)$, $f'(\pi)$ și $f''(\pi)$ prin:

- (a) un spline de tip Hermite;
- (b) un spline de tip deBoor;
- (c) un spline cu derivate secunde;

și să se reprezinte pe același grafic funcția și aproximantele.

Problema 3.55. Studiați comportarea polinomului de interpolare Hermite cu n noduri duble H_{2n+1} pentru funcția $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ și

- (a) n noduri echidistante pe intervalul de definiție
- (b) n noduri Cebîșev $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = \overline{1, n}$.
- (c) n noduri Cebîșev de forma $x_k = \cos \frac{k-1}{n} \pi$, $k = \overline{1, n+1}$.

(Luați $n = 10, 11$)

Problema 3.56. Interpretați rezultatele următoarelor experimente numerice și trageți concluziile care se impun.

- (a) Fie p polinomul de grad 20 ce interpoalează funcția $f(x) = (1 - 6x^2)^{-1}$ în 21 de puncte echidistante din intervalul $[-1, 1]$. Includeți capetele printre noduri. Tabelați $f(x)$, $p(x)$ și $f(x) - p(x)$ în 41 de puncte echidistante din interval.
- (b) Repetați experimentul utilizând noduri Cebîșev date de

$$x_i = \cos \frac{(i-1)\pi}{20}, \quad i = \overline{1, 21}.$$

- (c) Repetați experimentul cu un spline cubic natural și 21 de puncte echidistante.

Problema 3.57. Aproximați arcsin pe intervalul $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ printr-un polinom de interpolare de grad 15. Determinați precizia aproximării teoretic și prin teste numerice. Utilizați noduri echidistante și Cebîșev. Scrieți o funcție pentru arcsin folosind polinomul de la punctul precedent. Utilizați formula

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

dacă $|x| > 1/\sqrt{2}$.

Problema 3.58. Aproximați funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \exp(x) |\operatorname{sech}(\sin 8x)|^{\exp(x)}$$

printr-un polinom de interpolare Lagrange de grad 150 cu noduri Cebîșev de speța a doua (extremele polinoamelor Cebîșev de speța I). Aproximați integrala lui f prin integrala polinomului de interpolare.

Problema 3.59. [P] Considerăm următorul mod de ordonare a echipelor de fotbal american. Presupunem că avem 4 echipe, T1, T2, T3 și T4, iar rezultatul întâlnirilor directe este :
T1 bate T2 cu 4 puncte 21-17

- T3 bate T1 cu 8 puncte 27-18
- T1 bate T4 cu 6 puncte 16-10
- T4 bate T4 cu 3 puncte 10-7
- T2 bate T4 cu 7 puncte 17-10

Pentru a determina punctajul r_1, \dots, r_4 al fiecărei echipe vom rezolva sistemul supradeterminat

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 4, \\ r_3 - r_1 &= 9, \\ r_1 - r_4 &= 6, \\ r_3 - r_4 &= 3, \\ r_2 - r_4 &= 7 \end{aligned}$$

în sensul celor mai mici pătrate. Soluția nu este unică, deoarece dacă $(r_1, \dots, r_4)^T$ este o soluție și dacă îi adunăm un vector constant arbitrar, de exemplu $(1, \dots, 1)^T$ obținem un vector cu același reziduu. Arătați că dacă $(r_1, \dots, r_4)^T$ este o soluție a sistemului în sensul celor mai mici pătrate, atunci și $(r_1 + c, \dots, r_4 + c)^T$ este o soluție, pentru orice constantă c . Pentru a face ca soluția să fie unică, putem limita numărul total de puncte, de exemplu, la 20:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 20.$$

Determinați punctajele și normele reziduurilor, considerând întâi toate ecuațiile și apoi numai primele 5.

Problema 3.60. Tabela de mai jos arată coeficientul de frânare c_D al unei sfere în funcție numărul Reynolds Re . Utilizați un spline cubic natural pentru a determina c_D corespunzând $Re = 5, 50, 500$ și 5000 . Indicație: Utilizați o scară log-log (logaritmați ambele coordonate).

| | | | | | | |
|-------|-----|------|------|-------|-------|-------|
| Re | 0.2 | 2 | 20 | 200 | 2000 | 20000 |
| c_D | 103 | 13.9 | 2.72 | 0.800 | 0.401 | 0.433 |

Aproximați derivata lui c_D în raport cu Re și reprezentați c_D și derivata pe același grafic.

Problema 3.61. Funcția H este definită prin

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ -1, & \text{dacă } x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Construiți cea mai bună aproximație polinomială de grad 0, 1 și 2 în $L_w^2[-1, 1]$, pentru $w(x) \equiv 1$. Comparați cu rezultatul obținut de rutina de la laborator.

Problema 3.62. Literele PostScript și TrueType se generează cu spline parametrice, utilizând doar câteva puncte pentru fiecare literă.

(a) Creați și imprimați litera de mână definită de următoarele date.

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|------|------|---|------|------|------|------|------|---|------|------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| x | 3 | 1.75 | 0.90 | 0 | 0.50 | 1.50 | 3.25 | 4.25 | 4.25 | 3 | 3.75 | 6.00 |
| y | 4 | 1.60 | 0.50 | 0 | 1.00 | 0.50 | 0.50 | 2.25 | 4.00 | 4 | 4.25 | 4.25 |

(b) În același sistem de axe, desenați litera împreună cu litera de dimensiune dublă. (Comanda `2*x` va dubla dimensiunea fontului în direcția x).

(c) Animați desenarea literei utilizând comanda `comet`.

(d) Creați și desenați o altă literă.

Problema 3.63. (a) Determinați matricea $A = [a_{ij}]$ de dimensiune $(m+1) \times (m+1)$, $a_{ij} = (p_{m,i}, p_{m,j})$ a ecuațiilor normale relativ la baza Bernstein

$$p_{m,j}(t) = \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j}, \quad j = \overline{0, m},$$

și funcția pondere $w(t) \equiv 1$ pe $[0, 1]$.

(Indicație: utilizați funcția beta a lui Euler)

(b) Rezolvați sistemul de ecuații normale pentru $m = 3 : 3 : 12$, când funcția care urmează să fie aproximată este $f(t) = 1$. Care este soluția exactă? Afișați, pentru fiecare m , o estimatie a numărului de condiționare, vectorul coeficienților și eroarea asociată (modulul diferenței dintre valoarea calculată și cea exactă). Comentați rezultatul.

Problema 3.64. Presupunem că dorim să aproximăm funcția

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

pe semiaxa pozitivă \mathbb{R}_+ printr-o combinație liniară de exponențiale $\pi_j(t) = e^{-jt}$, $j = 1, 2, \dots, n$, în sensul celor mai mici pătrate (continuu, cu ponderea 1).

(a) Deduceți ecuațiile normale. Ce legătură are matricea cu matricea Hilbert?

(b) Utilizați MATLAB pentru a rezolva ecuațiile normale pentru $n = 1, 2, \dots, 8$. Listati n , numărul de condiționare al matricei în norma euclidiană și soluția. Reprezentați pe același grafic aproximanta și funcția exactă pentru $1 \leq n \leq 4$.

Problema 3.65. Scrieți un program MATLAB de interpolare a unei funcții f cu funcții spline cubice pe un interval $[a, b]$ considerând condiția de spline de Boor în punctul a ($p_1(x) \equiv p_2(x)$) și spline cu derivate secunde în punctul b ($s''(b) = f''(b)$). Aplicație: aproximați $\sin x$ pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Problema 3.66. Iată 25 de observații, y_k , luate în 25 de puncte echidistante t

```
t = 1:25
y = [ 5.0291 6.5099 5.3666 4.1272 4.2948
      6.1261 12.5140 10.0502 9.1614 7.5677
      7.2920 10.0357 11.0708 13.4045 12.8415
      11.9666 11.0765 11.7774 14.5701 17.0440
      17.0398 15.9069 15.4850 15.5112 17.6572]
```

- Neteziți datele cu o dreaptă, $y(t) = \beta_1 + \beta_2 t$ și afișați reziduurile $y(t_k) - y_k$. Se observă că o dată are reziduu mai mare decât altele. Aceasta este o valoare ilegală (outlier).
- Eliminați outlier-ul și refaceți netezirea. Afișați din nou reziduurile. Se observă vreun anumit șablon al reziduurilor?
- Neteziți din nou, cu outlier-ul exclus, cu un model de forma

$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin t.$$

- Evaluati ultima netezire pe o grilă (diviziune) mai fină a intervalului $[0, 26]$. Afișați curba cu stilul de linie '-' și datele cu 'o', Outlier-ul se va marca cu '*'.

Problema 3.67. [P]*Funcția lui Lebesgue* pentru sistemul de noduri $(x_j)_{j=0, \overline{m}}$ din $[a, b]$ se definește prin

$$\lambda(x) = \sum_{j=0}^m |\ell_j(x)|,$$

unde ℓ_j sunt polinoamele fundamentale Lagrange, iar cantitatea

$$\Lambda = \sup_{x \in [a, b]} \lambda(x)$$

se numește *constanta lui Lebesgue*.

- Să se rezezinte grafic $\lambda(x)$ și să se calculeze Λ pentru noduri echidistante în $[-1, 1]$ și $m = 4, 8, 12, 30$.
- Să se rezezinte grafic $\lambda(x)$ și să se calculeze Λ pentru noduri Cebîșev de speța a doua în $[-1, 1]$ și $m = 4, 8, 12, 100$.
- Comentați rezultatele obținute.

Problema 3.68. Să se determine aproximarea lui x^k de grad $k - 1$ în sensul celor mai mici pătrate cu polinoame Cebîșev, pentru $k = 1, \dots, 5$. Să se verifice rezultatele teoretice cu rutinele de la laborator pentru aproximare continuă cu polinoame Cebîșev. Ce se poate spune despre cea mai bună aproximare de grad $k - 1$ a lui x^k în norma Cebîșev $\|\cdot\|_\infty$? Determinați aproximarea pentru un k dat.

Problema 3.69. Să se scrie o funcție MATLAB care calculează polinomul de interpolare Lagrange al unei funcții f în cazul când nodurile sunt rădăcinile polinoamelor ortogonale Legendre. Comparați experimental cu cazul când nodurile sunt puncte Cebîșev de speța a doua. Folosiți metoda baricentrică. Testați pentru o funcție puternic oscilantă și un număr mare de noduri.

Problema 3.70. Să se scrie o funcție MATLAB care calculează polinomul de interpolare Lagrange al unei funcții f în cazul când nodurile sunt rădăcinile polinoamelor ortogonale Jacobi. Comparați experimental cu cazul când nodurile sunt puncte Cebîșev de speța a doua. Folosiți metoda baricentrică. Testați pentru o funcție puternic oscilantă și un număr mare de noduri.

Problema 3.71. Să se scrie o funcție MATLAB care calculează polinomul de interpolare Lagrange al unei funcții f în cazul când nodurile sunt rădăcinile polinoamelor ortogonale ale lui Laguerre. Folosiți metoda baricentrică. Testați pentru o funcție puternic oscilantă și un număr mare de noduri.

Problema 3.72. Să se scrie o funcție MATLAB care calculează polinomul de interpolare Lagrange al unei funcții f în cazul când nodurile sunt rădăcinile polinoamelor ortogonale ale lui Hermite. Folosiți metoda baricentrică. Testați pentru o funcție puternic oscilantă și un număr mare de noduri.

3.3. Probleme suplimentare

Problema 3.73. Scrieți o funcție MATLAB `fitpoly`

```
function [X,Y,n,rr]=fitpoly(x,y,delta)
% FITPOLY computes an approximating polynomial
% [X,Y,k,rr]=fitpoly(x,y,delta) computes an approximating
% polynomial of degree n to the points such that the norm of
% the residual rr <= delta. (X,Y) are interpolated points for
% plotting.
```

care calculează polinomul de cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de cel mai mic grad utilizând o bază de polinoame ortogonale discrete cu suportul $\{x_0, \dots, x_m\}$, astfel încât reziduul $\|r\| \leq \delta$. Testați pentru

```
x=[0:0.2:7]; % generate interpolation points
y=exp(cos(x))+0.1*rand(size(x)); % with some errors
```

Experimentați pentru diverse valori ale lui `delta`. Reprezentați pe același grafic funcția și aproximația. Comparați soluția dumneavoastră cu cea dată de funcția MATLAB `polyfit` utilizând gradul n calculat de `fitpoly`.

Problema 3.74 (Interpolare inversă). Se consideră ecuația neliniară scalară $f(x) = 0$. Pornind cu două valori ale funcției, $f(x_0)$ și $f(x_1)$ (preferabil să izoleze soluția) calculăm următoarea schemă Aitken-Neville pentru valoarea de interpolare $z = 0$:

$$\begin{array}{l|llll} f(x_1) & x_1 & & & \\ f(x_2) & x_2 & x_3 := T_{22} & & \\ f(x_3) & x_3 & T_{32} & x_4 := T_{33} & \\ f(x_4) & x_4 & T_{42} & T_{43} & x_5 := T_{44} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Valoarea extrapolată de pe diagonală $x_{i+1} := T_{ii}$ se scrie ca valoare nouă $T_{i+1,1}$ în prima coloană a schemei. Apoi calculăm valoarea $f(x_{i+1})$ și noua linie, adică elementele $T_{i+1,2}, \dots, T_{i+1,i+1}$. Dacă schema converge (utilizați valori bune de pornire!) atunci elementele de pe diagonală vor converge pătratic către un zero simplu al lui f . Scrieți un program pentru interpolare inversă și rezolvați ecuațiile

$$x - \cos x = 0, \quad x = e^{\sqrt{\sin x}}.$$

Problema 3.75 (Extrapolarea lui π). Vom aproxima circumferința cercului unitate prin poligoane regulate. Circumferința unui poligon regulat cu n vârfuri înscris în cercul unitate este

$$U_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}. \quad (3.3.1)$$

Introducem variabila

$$h = \frac{1}{n}$$

și funcția

$$T(h) = \frac{U_n}{2} = n \sin \frac{\pi}{n} = \frac{\sin(\pi h)}{h}. \quad (3.3.2)$$

Seria Taylor a lui $T(h)$ este

$$T(h) = \pi - \frac{1}{3!}\pi^3 h^2 + \frac{1}{5!}\pi^5 h^4 \mp \dots \quad (3.3.3)$$

Deoarece $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \pi$, putem extrapola π din semicircumferința unor poligoane regulate. Apar doar puterile pare ale lui h , deci putem extrapola cu formula

$$T_{ij} = \frac{h_i^2 T_{i-1,j-1} - h_{i-j}^2 T_{i,j-1}}{h_i^2 - h_{i-j}^2}.$$

Scrieți un program și extrapolați π utilizând tabela următoare care se poate calcula folosind matematică elementară:

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|-----------------|---|-----------------------|-------------|------------------------------------|---|------------------------|-----------------------------|
| $\frac{U_n}{2}$ | 2 | $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $2\sqrt{2}$ | $\frac{5}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ | 3 | $4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ | $\frac{5}{2}(\sqrt{5} - 1)$ |

Problema 3.76. Tabela următoare conține valori în puncte echidistante ale unei funcții $f(x)$ și ale derivatei ei.

| x | h | $2h$ | \dots | nh |
|---------|--------|--------|---------|--------|
| $f(x)$ | y_1 | y_2 | \dots | y_n |
| $f'(x)$ | y'_1 | y'_2 | \dots | y'_n |

Calculați o aproximare a integralei

$$\int_h^{nh} f(x) dx$$

interpolând datele cu o funcție spline cubică și apoi intergrând funcția spline. Ce formulă de cuadratură se obține? Scrieți o funcție MATLAB care calculează spline-ul și integrala. Testați pentru $f(x) = \cos 2x$ și nodurile obținute luând $h = \frac{\pi}{8}$ și $n = 9$.

Problema 3.77 (Gauss). Un asteroid ce orbitează în jurul Soarelui a putut fi observat timp de câteva zile înainte să dispară. Iată 10 observații

| | | | | | |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_{1:5}$ | -1.024940 | -0.949898 | -0.866114 | -0.773392 | -0.671372 |
| $x_{6:10}$ | -0.559524 | -0.437067 | -0.302909 | -0.159493 | -0.007464 |
| $y_{1:5}$ | -0.389269 | -0.322894 | -0.265256 | -0.216557 | -0.177152 |
| $y_{6:10}$ | -0.147582 | -0.128618 | -0.121353 | -0.127348 | -0.148895 |

Se dorește calcularea traiectoriei pe baza acestor observații pentru a putea prevedea situația când orbita va fi din nou vizibilă. Se presupune un model elipsoidal pentru orbită

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + e.$$

El ne conduce la un sistem supradeterminat, care trebuie rezolvat în sensul celor mai mici pătrate pentru a determina parametrii a, b, c, d, e . Realizați o estimare a erorii și un test de încredere în model. Faceți același lucru pentru modelul parabolic

$$x^2 = ay + e.$$

Care este mai probabil?

Derivare și integrare numerică

4.1. Probleme teoretice

Problema 4.1. (a) Scrieți formula de interpolare Hermite pentru $f \in C^4[-1, 1]$ și nodurile $x_0 = -1$ simplu, $x_1 = 0$ dublu și $x_2 = 1$ simplu.

(b) Determinați o formulă de cuadratură de tip interpolator integrând formula precedentă termen cu termen.

(c) Transformați formula precedentă într-o formulă pe $[a, b]$. Este aceasta o formulă cunoscută?

Problema 4.2. Considerăm formula de cuadratură de tipul

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = af(0) + bf(c) + R(f)$$

(a) Determinați a, b, c astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 2$. Puteți identifica formula astfel obținută? (Indicație: $\Gamma(n+1) = n!$).

(b) Fie $p_2(x) = (H_2 f)(x, 0, 2, 2)$ polinomul de interpolare Hermite corespunzător funcției f și nodurilor $x = 0$, simplu și $x = 2$, dublu. Calculați $\int_0^\infty e^{-x} p_2(x) dx$ și comparați cu rezultatul de la punctul (a).

(c) Obțineți restul $R(f)$ sub forma

$$R(f) = \text{const} \cdot f'''(\xi), \quad \xi > 0.$$

Problema 4.3. (a) Determinați forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpo-
lează f în $x = 0$ și $x = 1$ și f' în $x = 0$. Exprimați eroarea cu ajutorul unei derivate de
ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$).

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceți o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinați a_0 , a_1 , b_0 și $R(f)$.

(c) Transformați formula de la (b) într-o formulă cu rest pentru $\int_c^{c+h} y(t)dt$, unde $h > 0$.

Problema 4.4. (a) Se consideră o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)] + R(f). \quad (4.1.1)$$

Să se determine α , β , x_1 astfel încât gradul de exactitate să fie cât mai mare posibil.
Care este gradul de exactitate maxim care se poate atinge?

(b) Utilizați interpolarea și teorema lui Peano pentru a obține o margine a lui $|R(f)|$ în
funcție de $\|f^{(r)}\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(r)}(x)|$, pentru un r adecvat.

(c) Adaptați (4.1.1), inclusiv delimitarea pentru $|R(f)|$, pentru a obține o integrală de
forma $\int_c^{c+h} f(t)dt$, unde c este o constantă și $h > 0$.

(d) Aplicați rezultatul de la (c) pentru a obține o formulă de cuadratură repetată pentru
 $\int_a^b f(t)dt$, subdivizând $[a, b]$ în n subintervale de lungime totală $h = \frac{b-a}{n}$. Găsiți o
margine a erorii totale.

Problema 4.5. (a) Construiți prin metoda coeficienților nedeterminați o formulă de cua-
dratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = -\alpha f'(0) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha f'(1) + R(f)$$

care are grad maxim de exactitate.

(b) Care este gradul exact de exactitate al formulei de la punctul (a)?

(c) Utilizați nucleul lui Peano al funcționalei Q pentru a exprima $R(f)$ în funcție de o
derivată adecvată, folosind rezultatul de la (b).

(d) Transformați formula de la punctul (a) într-una potrivită pentru a evalua $\int_c^{c+h} g(t)dt$ și
apoi obțineți formula repetată corespunzătoare pentru $\int_a^b g(t)dt$, utilizând n subinter-
vale de lungime egală și deduceți restul. Interpretați rezultatul.

Problema 4.6. Fie

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ în n subintervale egale.

(a) Deduceți o formulă de cuadratură elementară pentru integrala $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ (inclusiv restul), aproximând f printr-un polinom de interpolare Hermite $(H_3 f)(x; x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1})$ și apoi integrând pe $[x_k, x_{k+1}]$. Interpretați rezultatul.

(b) Deduceți din formula de la (a) o formulă repetată de cuadratură (cu rest), pentru integrala $\int_a^b f(x)dx$.

Problema 4.7. (a) Găsiți polinomul de cea mai bună aproximare de gradul al doilea pentru funcția $f(x) = \cos x$ în $L_w^2[a, b]$, unde $w(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$.

1. Stabiliți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 4.8. (a) Găsiți polinomul de cea mai bună aproximare de gradul întâi pentru funcția $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ în $L_w^2[a, b]$, unde $w(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$, $b = 1$.

(b) Stabiliți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = A_1 f(x_1) + R(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 4.9. Considerăm formula de cuadratură de tipul

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = a f(0) + b f(c) + R(f)$$

(a) Determinați a, b, c astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 2$. Puteți identifica formula astfel obținută? (Indicație: $\Gamma(n+1) = n!$).

(b) Fie $p_2(x) = (H_2 f)(x, 0, 2, 2)$ polinomul de interpolare Hermite corespunzător funcției f și nodurilor $x = 0$, simplu și $x = 2$, dublu. Calculați $\int_0^\infty e^{-x} p_2(x) dx$ și comparați cu rezultatul de la punctul (a).

(c) Obțineți restul $R(f)$ sub forma

$$R(f) = \text{const} \cdot f'''(\xi), \quad \xi > 0.$$

Problema 4.10. (a) Determinați forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolatează f în $x = 0$ și $x = 1$ și f' în $x = 0$. Exprimați eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$).

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceți o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinați a_0 , a_1 , b_0 și $R(f)$.

(c) Transformați formula de la (b) într-o formulă cu rest pentru $\int_c^{c+h} y(t)dt$, unde $h > 0$.

Problema 4.11. Deduceți o formulă de cuadratură Gauss-Lobatto de forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 f(-1) + w_2 f(x_1) + w_3 f(x_2) + w_4 f(1) + R(f).$$

Ce devine formula pentru un interval oarecare $[a, b]$? Unde utilizează funcția MATLAB `quadl` această formulă?

Problema 4.12. Arătați că integrala polinomului de interpolare Hermite P cu nodurile duble 0 și h este

$$\int_0^h P(s)ds = h \frac{f(h) + f(0)}{2} - h^2 \frac{f'(h) - f'(0)}{12}.$$

Care este eroarea care se comite dacă se aproximează $\int_0^h f(x)dx$ cu integrala polinomului de interpolare Hermite?

Problema 4.13. Deduceți o formulă de cuadratură de tip Gauss-Radau de forma

$$\int_0^1 f(x)dx = A f(0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R(f).$$

Problema 4.14. Deduceți o formulă de cuadratură de tip Gauss-Radau de forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = A f(0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R(f).$$

Problema 4.15. Pentru $f \in C^6[-1, 1]$, găsiți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 |x| f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 4.16. (a) Construiți o formulă Newton-Cotes cu ponderi

$$\int_0^1 f(x)x^\alpha dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f), \quad \alpha > -1.$$

Explicați de ce formula are sens.

(b) Deduceți o expresie a erorii $R(f)$ în funcție de o derivată adecvată a lui f .

(c) Din formulele de la (a) și (b) deduceți o formulă de integrare numerică pentru $\int_0^h g(t)t^\alpha dt$ ($h > 0$ mic) (inclusiv termenul rest).

Problema 4.17. (a) Folosind interpolarea Newton, determinați un polinom de gradul p ce interpolatează f în $x = 0$, $x = 1$ și f' în $x = 1$. Exprimați termenul rest în funcție de o derivată adecvată a lui f (presupusă a fi continuă pe $[0, 1]$).

(b) folosind rezultatul de la (a), deduceți o formulă de integrare numerică de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(1) + R(f)$$

Determinați a_0, a_1, b_0 și $R(f)$.

(c) Transformați rezultatul de la (b) pentru a obține o formulă de integrare numerică (cu rest) pentru $\int_c^{c+h} y(t)dt$, unde $h > 0$.

Problema 4.18. Estimați numărul de subintervale necesar pentru a calcula $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ cu 6 zecimale corecte (eroarea absolută $\leq \frac{1}{2} \times 10^{-6}$)

(a) cu regula trapezelor;

(b) cu formula repetată a lui Simpson.

Problema 4.19. (a) Se consideră o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)] + R(f) \quad (4.1.2)$$

Determinați α, β, x_1 astfel încât gradul de exactitate să fie cât mai mare posibil. Cât este gradul maxim care se poate obține?

(b) Utilizați teoria interpolării și teorema lui Peano pentru a obține o margine superioară a lui $|R(f)|$ în funcție de $\|f^{(r)}\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(r)}(x)|$ pentru un r potrivit.

(c) Adaptați (4.1.2), inclusiv marginea pentru $|R(f)|$, pentru a aproxima o integrală de forma $\int_c^{c+h} f(t)dt$, unde c este o constantă și $h > 0$.

(d) Aplicați rezultatul de la (c) pentru a obține o formulă repetată pentru $\int_a^b f(t)dt$ subdivizând $[a, b]$ în n subintervale de lungime totală $h = \frac{b-a}{n}$. Găsiți o margine superioară a erorii totale.

Problema 4.20. Determinați A, B, C, D astfel încât formula

$$\int_{-h}^h f(t)dt = Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) - hDf'(h) + R(f)$$

să aibă grad de exactitate cât mai mare posibil. Dați expresia restului în acest caz.

Problema 4.21. (a) Utilizați metoda coeficienților nedeterminați pentru a construi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = af(0) + bf(1) + cf''(\gamma) + R(f)$$

cu gradul maxim de exactitate d , nedeterminatele fiind a, b, c și γ .

(b) Arătați că nucleul lui K_d al restului formulei obținute la (a) are semn constant și exprimați restul sub forma

$$R(f) = e_{d+1}f^{(d+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Problema 4.22. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 xf(x)dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + R_2(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 4.23. Să se aproximeze volumul butoiului cu diametrele D și d și înălțime h . Justificați formula utilizată în practică

$$V \approx \frac{\pi h}{12} (d^2 + 2D^2).$$

Indicație: Aproximați conturul butoiului prin arce de parabolă (polinom de interpolare de gradul 2) și folosiți formula pentru volumul de rotație.

Problema 4.24. Se consideră formulele Newton-Cotes închise

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^m A_k f(x_k) + R(f),$$

unde

$$x_k = a + kh, \quad k = \overline{0, m}, \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

(a) Demonstrați următoarele proprietăți ale coeficienților, $k = \overline{0, m}$

$$A_k = (-1)^{m-k} \frac{h}{k!(m-k)!} \int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k} dt,$$

$$A_k = A_{m-k}$$

$$\sum_{k=0}^m A_k = b-a.$$

unde $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$.

- (b) Se consideră afirmația: $A_k > 0$, $k = \overline{0, m}$. Ce se poate spune despre valoarea ei de adevăr? Demonstrați-o dacă este adevărată sau dați un contraexemplu dacă este falsă. (Indicație: calculați cantitățile

$$b_k = (-1)^{m-k} \frac{1}{k!(m-k)!} \int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k} dt,$$

care nu depind de a și b).

Problema 4.25. Fie $f \in C^6[-1, 1]$ și fie $P \in \mathbb{P}_5$ polinomul de interpolare Hermite cu nodurile duble $-1, 0, 1$, adică $P(x_i) = f(x_i)$, $P'(x_i) = f'(x_i)$, $x_i = -1, 0, 1$.

- (a) Arătați că

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \frac{7}{15} f(-1) + \frac{16}{15} f(0) + \frac{7}{15} f(1) + \frac{1}{15} f'(-1) - \frac{1}{15} f'(1).$$

- (b) Folosind punctul (a) deduceți o formula de integrare numerică de forma

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{7}{15} f(-1) + \frac{16}{15} f(0) + \frac{7}{15} f(1) + \frac{1}{15} f'(-1) - \frac{1}{15} f'(1) + R(f).$$

Deduceți expresia restului integrând restul formulei de interpolare Hermite.

- (c) Arătați că nucleul lui Peano își păstrează semnul pe $[-1, 1]$ și deduceți de aici expresia restului.

Problema 4.26. Determinați formule de cuadratură de tip Gauss pentru ponderea $w(t) = -\ln t$, $[a, b] = [0, 1]$ și $n = 1$ și $n = 2$. Pentru funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}/\ln(x)$, determinați polinomul de cea mai bună aproximare de gradul al doilea în $L_w^2[0, 1]$.

Problema 4.27. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Care este eroarea dacă se aplică formula pentru a calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx.$$

Problema 4.28. Găsiți o formula de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 4.29. Notând cu $T(m)$ aproximația din formula repetată a trapezului pentru m subintervale

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)]$$

unde

$$h = \frac{b-a}{m}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, m$$

și cu $S(2m)$ aproximația din formula repetată a lui Simpson pentru m subintervale scrisă sub forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})]$$

unde

$$h = \frac{b-a}{2m}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, 2m,$$

arătați că

$$S(2m) = \frac{4}{3}T(2m) - \frac{1}{3}T(m)$$

și dacă $f \in C^4[a, b]$, atunci

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T(m) - T(2m)}{T(2m) - T(4m)} = 4.$$

Problema 4.30. Să se arate că regula repetată a trapezului cu m subintervale, $T(m)$, este exactă pentru polinoame trigonometrice al căror grad nu este multiplu de m . Ce rezultat dă regula trapezului dacă gradul este multiplu de m ? (Indicație: datorită liniarității este suficient să se verifice exactitatea pe intervalul $[0, 2\pi]$ și funcțiile $f(x) = \cos kx$ și $f(x) = \sin kx$, sau chiar pentru $f(x) = e^{kix} = \cos kx + i \sin kx$).

Problema 4.31. Determinați valorile lui c_j , $j = -1, 0, 1, 2$, astfel încât formula de cuadratură

$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_{-1}f(-1) + c_0f(0) + c_1f(1) + c_2f(2)$$

să fie exactă pentru orice polinom de gradul 3. Arătați că pentru aceste valori ale coeficienților c_j și pentru condiții adecvate asupra lui f ,

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - c_{-1}f(-1) + c_0f(0) + c_1f(1) + c_2f(2) \right| \leq \frac{11}{720} M_4.$$

Impuneți condiții pentru validitatea acestei delimitări și dați o definiție a lui M_4 .

Problema 4.32. Determinați cea mai bună aproximație de grad 2 a lui $f(t) = \frac{1}{t^2}$ din $L_w^2(\mathbb{R})$, pentru $w(t) = |t|^{2\mu} e^{-t^2}$, $\mu > -\frac{1}{2}$. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2\mu} e^{-t^2} f(t) dt = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 4.33. (a) Găsiți o formulă de tipul

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = a_1 f(0) + a_2 \int_0^1 f(x) dx + R(f),$$

unde $f \in C^2[0, 1]$.

(b) Dacă f este doar de clasă $C^1[0, 1]$

b1. Deduceți o reprezentare adecvată de tip Peano a lui $R(f)$.

b2. Obțineți o estimare de forma $|Ef| \leq c_0 \|f'\|_\infty$.

Problema 4.34. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^\infty e^{-t^2} f(t) dt = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Determinați aproximația de grad 2 în medie pătratică pentru ponderea și intervalul de mai sus pentru $f(t) = \sqrt{t}$.

Problema 4.35. (a) Fie $d\lambda$ o măsură simetrică pe $[-a, a]$, $0 < a \leq \infty$ și

$$\pi_{2k}(t; d\lambda) = \pi_k^+(t^2), \quad \pi_{2k+1}(t; d\lambda) = t\pi_k^-(t^2).$$

Arătați că $\{\pi_k^+\}$ și $\{\pi_k^-\}$ sunt polinoame ortogonale monice pe $[0, a^2]$ în raport cu măsurile $d\lambda^+(t) = t^{-1/2}w(t^{1/2})dt$ și respectiv $d\lambda^-(t) = t^{+1/2}w(t^{1/2})dt$.

(b) Aplicați acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0, 1]$ în raport cu ponderile $w(t) = \sqrt{t}$ și $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

(c) Generați formulele de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru aceste ponderi.

Problema 4.36. (a) Construiți formula Newton-Cotes cu ponderi

$$\int_0^1 f(x) x \ln \frac{1}{x} dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f).$$

(b) Găsiți o formulă Newton-Cotes pentru $w(x) = 1$, cu 5 noduri de forma $t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 0..n$ (pe $[-1, 1]$).

Problema 4.37. (a) Fie $w(t)$ o funcție pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătați că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).

(b) Arătați că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t) w(t) dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \quad w_{n+1-\nu} = w_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

(c) Fie w funcția „pălarie”

$$w(t) = \begin{cases} 1+t, & \text{pentru } t \in [-1, 0] \\ 1-t, & \text{pentru } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Obțineți o formulă gaussiană cu două noduri $\int_{-1}^1 f(t)w(t)dt = w_1f(t_1) + w_2f(t_2) + R_2(f)$ pentru ponderea de mai sus. Folosiți (a) și (b) pentru a simplifica calculele.

Problema 4.38. (a) Construiți o formulă de tip trapez

$$\int_0^h f(x)dx = af(0) + bf(h) + R(f)$$

care este exactă pentru $f(x) = \cos x$ și $f(x) = \sin x$. Este formula exactă pentru constante?

(b) Arătați că are loc o formulă similară pentru $\int_c^{c+h} g(t)dt$.

Problema 4.39. Dându-se o subdiviziune Δ cu N subintervale egale a intervalului $[0, 2\pi]$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 2\pi, \quad x_k = kh, \quad h = 2\pi/N$$

și o funcție f 2π -periodică, construiți o formulă de cuadratură pentru al m -lea coeficient Fourier complex al lui f

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx,$$

aproximând f printr-un interpolant spline de gradul I din $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$. Scrieți rezultatul sub forma unei formule a trapezului „modificate”. (Indicație: exprimați interpolantul în baza funcțiilor B-spline de gradul I (pălariile chinezești).)

Problema 4.40. Fie f o funcție arbitrară continuă pe $[0, 1]$ ce satisface

$$f(x) + f(1-x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

(a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(b) Arătați că formula repetată a trapezului pentru a calcula $\int_0^1 f(x)dx$ este exactă.

(c) Arătați, cu cât mai puține calcule, că formula repetată a lui Simpson și formulele simetrice mai generale sunt de asemenea exacte.

Problema 4.41. (a) Utilizând formula lui Taylor deduceți aproximarea

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h} [-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)]$$

și termenul rest.

(b) Deduceți o aproximare pentru $f'(x)$ cu eroarea $O(h^4)$ folosind formula lui Taylor și extrapolarea Richardson.

Problema 4.42. Se consideră aproximarea

$$f''(x) \approx Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h).$$

Determinați coeficienții A , B și C astfel încât gradul de exactitate să fie maxim și determinați eroarea.

Problema 4.43. Presupunem că se dau valorile lui f și f' în punctele $x_0 - h$ și $x_0 + h$ și că dorim să aproximăm $f'(x_0)$. Găsiți coeficienții α și β astfel încât aproximația

$$f'(x_0) \approx \alpha \frac{f'(x_0+h) + f'(x_0-h)}{2} + \beta \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

să aibă precizia $O(h^4)$. *Indicație:* Combinați dezvoltările Taylor ale lui $f(x_0+h)$, $f(x_0-h)$, $f'(x_0+h)$, $f'(x_0-h)$ și eliminați termenul dominant al erorii.

Problema 4.44. Să se stabilească formulele

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

derivând formula de interpolare a lui Lagrange.

Problema 4.45. O formulă de cuadratură mai puțin cunoscută, datorată lui Simpson, este

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] + R(f).$$

- (a) Deduceți coeficienții și termenul rest.
- (b) Explicați de ce formula lui Simpson este preferată acestei formule.
- (c) Deduceți formula compusă corespunzătoare.

Problema 4.46. (a) Deduceți o formulă Newton-Cotes închisă cu cinci noduri echidistante pe $[-1, 1]$. Care este gradul de exactitate?

- (b) Deduceți o formulă cu cinci noduri Cebîșev de speța a doua pe același interval. Comparați resturile.

Problema 4.47. Se consideră o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 x^\alpha f(x)dx \approx Af(0) + B \int_0^1 f(x)dx, \quad \alpha > -1, \alpha \neq 0.$$

- (a) Determinați A și B astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 1$.
- (b) Fie $R(f)$ funcționala de eroare pentru regula determinată la punctul (a). Arătați că nucleul lui Peano $K_1(t) = R_x((x-t)_+)$ este pozitiv definit pentru $\alpha > 0$ și negativ definit pentru $\alpha < 0$.

- (c) Folosind rezultatele de la punctul (b), determinați constanta e_2 din $R(f) = e_2 f''(\xi)$, $0 < \xi < 1$.

Problema 4.48. (a) Dându-se o funcție $g(x, y)$ definită pe $[0, 1] \times [0, 1]$, să se determine un „polinom biliniar” $p(x, y) = a + bx + cy + dxy$ astfel încât p să reproducă valorile lui g pe colțurile pătratului unitate.

- (b) Utilizați (a) pentru a obține o formulă de cubatură pentru $\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy$ în care intervin valorile lui g pe cele patru colțuri ale pătratului. La ce formulă se ajunge dacă g depinde numai de x nu și de y ?

- (c) Utilizați (b) pentru a obține o formulă de cubatură repetată în care intervin valorile $g_{ij} = g(ih, jh)$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, unde $h = 1/n$.

Problema 4.49. Se consideră formula trapezelor „cu valori medii”,

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{1-\varepsilon}^1 f(x) dx \right] + R(f), \quad 0 < \varepsilon < 2.$$

- (a) Determinați gradul de exactitate al formulei.
- (b) Exprimați restul cu teorema lui Peano în ipoteza că $f \in C^2[0, 1]$.
- (c) Arătați că nucleul lui Peano păstrează semn constant și exprimați restul sub forma $R(f) = C f''(\tau)$, $\tau \in (0, 1)$.
- (d) Considerați (și explicați) cazurile limită $\varepsilon \searrow 0$ și $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2}$.

Problema 4.50. Găsiți o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-2}^2 |x| f(x) dx = A f(-1) + B f(0) + C f(1) + R(f).$$

Problema 4.51. Deduceți o formulă de integrare numerică de forma

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx = A f(x_n) + B f'(x_{n-1}) + C f''(x_{n+1}) + R(f)$$

unde punctele x_{n-1}, x_n, x_{n+1} sunt echidistate cu distanța dintre ele h . Formula va avea grad de exactitate cât mai mare posibil. Indicație: Considerați

$$\int_{-h}^h f(x) dx = A f(0) + B f'(-h) + C f''(h) + R(f).$$

Problema 4.52. (a) Determinați un spline quadratic $s_2(x)$ pe $[-1, 1]$ cu un singur nod în $x = 0$ astfel ca $s_2(x) \equiv 0$ pe $[-1, 0]$ și $s_2(1) = 1$.

- (b) Se consideră o funcție de forma

$$s(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 s_2(x),$$

unde c_i sunt constante și $s_2(x)$ este definită la punctul (a). Ce fel de funcție este s ? Determinați s astfel încât

$$s(-1) = f_{-1}, \quad s(0) = f_0, \quad s'(0) = f'_0, \quad s(1) = f_1,$$

unde f este o funcție definită pe $[-1, 1]$, iar $f_{-1} = f(-1)$, $f_0 = f(0)$, $f'_0 = f'(0)$, $f_1 = f(1)$.

- (c) Ce formulă de cuadratură se obține dacă se aproximează $\int_{-1}^1 f(x)dx$ prin $\int_{-1}^1 s(x)dx$, unde s este funcția de la punctul (b).

Problema 4.53. Fie R o funcțională liniară cu $\text{Ker} R = \mathbb{P}_d$. Arătați că nucleul lui Peano $K_r(t)$, $r \leq d$, al lui R se anulează pentru orice $t \notin [a, b]$, unde $[a, b]$ este intervalul pe care sunt definite funcțiile cărora li se aplică R .

Problema 4.54. Arătați că o funcțională liniară ce satisface $Rf = e_{r+1} f^{(r+1)}(\bar{t})$, $\bar{t} \in [a, b]$, $e_{r+1} \neq 0$, pentru orice $f \in C^{r+1}[a, b]$, este în mod necesar definită de ordinul r dacă are nucleul Peano K_r continuu.

Problema 4.55. Fie R o funcțională liniară care se anulează pentru polinoame de grad d . Arătați că nici unul din nucleele Peano K_0, K_1, \dots, K_{d-1} nu poate fi definit (adică, nu poate păstra semn constant).

4.2. Probleme practice

Problema 4.56. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Aplicați formula pentru a calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx.$$

cu o precizie dată.

Problema 4.57. Generați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{10} w_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Folosiți formula pentru a aproxima integralele

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{și} \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Problema 4.58. Evaluați $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ utilizând o cuadratură adaptivă

- (a) rezolvând problema așa cum este enunțată;
- (b) utilizând o tehnică de dezvoltare în serie;
- (c) utilizând o schimbare de variabilă.

Comparați rezultatele.

Problema 4.59. (a) Care este valoarea exactă a lui

$$\int_0^{4\pi} \cos^2 x dx$$

- (b) Ce se întâmplă dacă se calculează cu o cuadratură adaptivă? Ce este greșit?
- (c) Cum evită funcția MATLAB quad această dificultate?
- (d) Calculați integrala folosind o cuadratură gaussiană și metoda lui Romberg.

Problema 4.60. Funcția $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ se numește integrala lui Dawson. Tabelați această funcție pentru $x = 0, 0.1, \dots, 0.5$. Pentru a evita evaluările de funcții necesare, descompuneți integrala într-o sumă de integrale pe subintervale.

Problema 4.61. O populație este guvernată de capacitatea variabilă a mediului de a o susține. Un model simplu este dat de ecuația diferențială

$$P'(t) = kP(t) \left[M \left(1 - r \cos \frac{\pi t}{6} \right) - P(t) \right],$$

unde t este timpul măsurat în luni, $P(t)$ este populația la momentul t , iar ceilalți parametri sunt constante cunoscute. Această ecuație are soluția

$$P(t) = \frac{P(0)F(t)}{1 + kP(0) \int_0^t F(s) ds},$$

unde

$$F(t) = \exp \left[kM \left(t - \frac{6r}{\pi} \sin \frac{\pi t}{6} \right) \right].$$

Presupunând că $k = 0.001$, $M = 1000$, $r = 0.3$, $P(0) = 250$ calculați $P(t)$ pentru $t = 0, 3, 6, 9, \dots, 36$.

Problema 4.62. Fie $f(x) = x^{10} - 10x^8 + 33x^6 - 40x^4 + 16x^2$.

- (a) Utilizați `ezplot` (sau `plot`) pentru a reprezenta $f(x)$ pe $[-2, 2]$.
- (b) Utilizați toolbox-ul Symbolic sau Maple pentru a găsi o expresie analitică a integralei $\int_{-2}^2 f(x) dx$.
- (c) Ce se întâmplă dacă definiți

$$F = \text{inline}('x^{10} - 10 * x^8 + 33 * x^6 - 40 * x^4 + 16 * x^2')$$

și utilizați o cuadratură adaptivă? De ce?

- (d) Cum evitați dificultatea? Justificați?
- (e) Ce se întâmplă dacă calculați cu metoda lui Romberg?

Problema 4.63. Calculați integrala

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{4 + \sin 20x}$$

cu aceeași metodă pe întreg intervalul și pe un interval mai mic, exploatând periodicitatea. Care metodă este mai bună? Considerați următoarele metode:

- (a) o cuadratură adaptivă ;
- (b) metoda lui Romberg.
- (c) o cuadratură gaussiană.

Problema 4.64. Funcția Bessel de ordinul zero $J_0(x)$ se poate calcula cu formula

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Utilizați formula pentru a evalua $J_0(x)$ pentru $x = 1.0, 2.0, 3.0$. comparați rezultatul obținut cu cel furnizat de MATLAB.

Problema 4.65. O sferă de rază R plutește pe jumătate scufundată într-un lichid. Dacă este împinsă în jos până când planul diametral este la distanța p ($0 < p \leq R$) sub suprafața lichidului și apoi este eliberată, perioada vibrației care se produce astfel este

$$T = 8R \sqrt{\frac{R}{g(6R^2 - p^2)}} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

unde $k^2 = p^2 / (6R^2 - p^2)$ și $g = 10m/s^2$. Pentru $R = 1$ și $p = 0.5, 0.75, 1.0$ găsiți T .

Problema 4.66. Evaluați $\int_0^1 \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}} dx$ utilizând o cuadratură adaptivă

- (a) rezolvând problema așa cum este enunțată;
- (b) utilizând o schimbare de variabilă;
- (c) utilizând o tehnică de dezvoltare în serie.

Comparați rezultatele.

Problema 4.67. Utilizați o cuadratură adaptivă cu diverse toleranțe pentru a aproxima π prin

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx.$$

Cum variază precizia și numărul de evaluări de funcție odată cu toleranța?

Problema 4.68. Utilizați Maple sau toolbox-ul Symbolic pentru a găsi valoarea exactă a

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx.$$

- (a) De ce aproximare faimoasă vă amintește această integrală?
- (b) Prezintă evaluarea numerică a acestei integrale cu o cuadratură adaptivă dificultăți?

Problema 4.69. Integrala exponențială

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} e^{-tx} \frac{dx}{x}, \quad t > 0,$$

apare în studiul transferului radiativ și în teoria transportului. Integrala se transformă succesiv

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \int_1^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} + \int_t^1 e^{-x} \frac{dx}{x} \\ &= - \left\{ \int_1^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} - \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} \right\} \\ &\quad + \int_t^1 \frac{dx}{x} + \int_0^t (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Expresia dintre acolade are valoarea aproximativă $\gamma = 0.5772156649015329$ (constanta lui Euler). Al doilea termen se integrează analitic la $-\ln t$. Deci,

$$E_1(t) = -\gamma - \ln t + \int_0^t (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x}.$$

Evaluati $E_1(t)$ pentru $t = 1.0, 2.0, 3.0$. Apare vreo dificultate datorită comportării integrandului în $x = 0$?

Problema 4.70. Potențialul în interiorul cercului unitate datorat unui potențial dat pe frontieră, $f(\theta)$, este dat de integrala lui Poisson

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\theta') + r^2} f(\theta') d\theta'.$$

Pot să apară dificultăți la evaluarea integrandului când $r \rightarrow 1$, deoarece pentru $\theta' = \theta$,

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\theta') + r^2} = \frac{1+r}{1-r}.$$

Problema nu este prea severă deoarece termenul este mare doar dacă r este foarte apropiat de 1, dar, în principiu, nu ar trebui să fie nici o problemă căci dacă $r \rightarrow 1$, $\varphi(r, \theta) \rightarrow f(\theta)$. Observând că

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\theta') + r^2} d\theta',$$

se obține forma

$$\varphi(r, \theta) = f(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\theta') + r^2} [f(\theta') - f(\theta)] d\theta',$$

care are proprietăți numerice mai bune. Verificați aceasta evaluând $\varphi(r, \theta)$ pentru r apropiat de 1 cu $f(\theta) = \sin \theta$. Soluția analitică este $\varphi(r, \theta) = \sin \theta$.

Problema 4.71. Funcția beta este definită prin

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt.$$

Scrieți un fișier `M mybeta` care aproximează $B(z, w)$ folosind o cuadratură adaptivă. Comparați funcția dumneavoastră cu funcția MATLAB `beta`.

Problema 4.72. Funcția $\Gamma(x)$ se definește prin

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Încercarea de evaluare numerică a acestei integrale cu o cuadratură este inefficientă și nefiabilă. Dificultățile sunt cauzate de intervalul infinit și de variațiile mari ale valorilor integrandului. Scrieți un fișier `M mygamma` care utilizează o cuadratură adaptivă pentru a calcula $\Gamma(x)$. Comparați funcția dumneavoastră cu funcția MATLAB `gamma`. Pentru ce valori ale lui x funcția dumneavoastră este rezonabil de rapidă și precisă? Pentru ce valori ale lui x devine lentă și imprecisă?

Problema 4.73. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_1^2 (x^4 - 1)f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f),$$

cu grad maxim de exactitate.

Problema 4.74. Determinați o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{10} A_k f(x_k) + R_3(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Să se aplice formula pentru a calcula

$$\int_{-1}^1 \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Verificare.

Problema 4.75. Determinați lungimea arcului de curba parametrică

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \cos(t)) \cos(t) \\ y(t) &= (1 - \cos(t)) \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

folosind o cuadratură adaptivă și metoda lui Romberg. Indicație: formula este

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Problema 4.76. Aproximați integralele

$$I_c = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad I_s = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

cu o precizie dată:

- (a) utilizând o cuadratură adaptivă;
- (b) utilizând o cuadratură Gauss-Legendre, după ce s-a efectuat schimbarea de variabilă $x = t^2$;
- (c) utilizând o cuadratură Gauss-Jacobi.

Problema 4.77. Dorim să calculăm

$$\int_0^1 x \sin \frac{1}{x} dx.$$

- (a) Incercați să obțineți valoarea „exactă” utilizând Symbolic Math Toolbox sau Maple.
- (b) Ce se întâmplă dacă utilizați o cuadratură adaptivă sau funcția MATLAB quad?

- (c) Cum puteți rezolva impedimentul de la punctul anterior? Calculați integrala cu o eroare absolută $< 10^{-8}$.

Problema 4.78. Calculați eroarea care se comite aplicând formula trapezului și formula elementară a lui Simpson la aproximarea $\int_0^1 x^4 dx$ și $\int_0^1 x^5 dx$. Găsiți valoarea constantei C pentru care regula trapezului dă valoarea exactă la calculul integralei

$$\int_0^1 (x^5 - Cx^4) dx$$

și arătați că regula trapezului dă rezultate mai precise decât regula lui Simpson pentru $\frac{15}{14} < C < \frac{85}{74}$.

Problema 4.79. Perioada unui pendul simplu de lungime L este $\tau = \sqrt{\frac{L}{g}} h(\theta_0)$, unde g este accelerația gravitațională, θ_0 reprezintă amplitudinea unghiulară, iar

$$h(\theta_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \theta}}.$$

Calculați $h(15^\circ)$, $h(30^\circ)$ și $h(45^\circ)$ și comparați aceste valori cu $h(0) = \pi/2$ (aproximarea utilizată pentru amplitudini mici).

Problema 4.80. Formula lui Debye pentru capacitatea calorică C_V a unui solid este $C_V = 9Nk g(u)$, unde

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^4} dx.$$

Termenii din această ecuație sunt

N = numărul de particule din solid

k = constanta lui Boltzmann

$u = T/D$

T = temperatura absolută

D = temperatura Debye

Calculați $g(u)$ pentru u de la 0 la 1.0 din 0.05 în 0.05 și reprezentați rezultatul.

Problema 4.81. Un vârf de tensiune într-un circuit este provocat de un curent

$$i(t) = i_0 e^{-t/t_0} \sin(2t/t_0)$$

printr-un rezistor. Energia E disipată de rezistor este

$$E = \int_0^\infty R i^2(t) dt.$$

Determinați E cunoscând $i_0 = 100 A$, $R = 0.5 \Omega$ și $t_0 = 0.01 s$.

Problema 4.82. (a) Calculați

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx,$$

unde T_k este polinomul Cebîșev de speța I de grad k .

(b) Folosiți rezultatul de la punctul anterior pentru a demonstra că integrala unui polinom de grad n exprimată sub forma unei serii Cebîșev este

$$\int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) dx = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^n \frac{2c_k}{1-k^2}.$$

(c) Implementați ideea de la punctul (b) în MATLAB (folosiți rutinele de la laborator pentru calculul coeficienților c_k) și utilizați-o la integrarea numerică a funcțiilor.

(d) Utilizați rutina de la punctul (c) pentru a calcula

$$\int_{-1}^1 e^x \sin x^2 dx.$$

Problema 4.83. Pentru $p \in \mathbb{N}$ fie

$$I_p = \int_0^1 (1-t)^p f(t) dt.$$

Comparați regula trapezelor cu n subintervale cu cuadratura Gauss-Jacobi cu n puncte pe $[0, 1]$ cu parametrii $\alpha = p$, $\beta = 0$. Luați de exemplu $f(t) = \tan t$ și $p = 5 : 5 : 20$ și $n = 10 : 10 : 50$ în cazul metodei trapezelor și $n = 2 : 2 : 10$ pentru cuadratura Gauss.

Problema 4.84. Nu există nici o metodă elegantă de a calcula

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

Metoda “forței brute” împarte integrala în trei părți: de la $x = 0$ la 0.01, de la 0.01 la 0.2 și de la $x = 0.02$ to $\pi/2$. Pentru prima parte utilizăm aproximarea $\sin x \approx x$, care ne permite să obținem integrala analitic. Celelalte părți se pot calcula cu o cuadratură Gauss-Legendre. Utilizați această metodă pentru a aproxima I cu șase zecimale.

Problema 4.85. O grindă uniformă formează arcul de cantilever (grindă încastrată) AB (figura 4.1). Se poate arăta că deplasamentul vertical al lui A datorat forței P este

$$\delta_A = \frac{Pb^3}{EI} C\left(\frac{h}{b}\right),$$

unde EI este rigiditatea grindei și

$$C\left(\frac{h}{b}\right) = \int_0^1 z^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b}z\right)^2} dz.$$

Scrieți un program care calculează $C(h/b)$ pentru orice valoare dată a lui h/b . Utilizați programul pentru a calcula $C(0.5)$, $C(1.0)$ și $C(2.0)$.

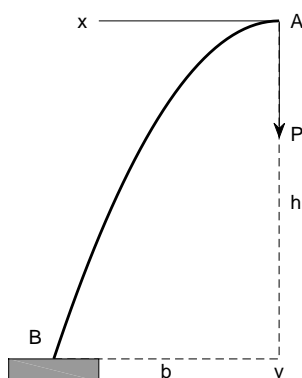


Figura 4.1: Cantilever semiparabolic

Sursa MATLAB 4.1 Cuadratură Gauss-Legendre

```
function [g_nodes,g_coeff]=Gauss_Legendre(n)
%GAUSS-LEGENDRE - Gauss-Legendre nodes and coefficients

beta=[2,(4-(1:n-1).^(-2)).^(-1)];
alpha=zeros(n,1);
[g_nodes,g_coeff]=Gaussquad(alpha,beta);
```

Problema 4.86. Aproximați

$$\int_1^{\pi} \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

cu 8 zecimale exacte folosind o cuadratură Gauss-Legendre. Aproximați

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

cu 9 zecimale exacte, folosind o cuadratură Gauss-Cebîșev.

Problema 4.87. Utilizați formule de cuadratură de tip Gauss pentru a verifica numeric formulele:

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx = \frac{\pi^2}{24}.$$

Problema 4.88. Presupunând că f este o funcție cu o comportare bună, discutați modul în care integralele următoare se pot aproxima prin cuadraturi gaussiene standard (adică cu intervale și ponderi canonice).

- (a) $\int_a^b f(x)dx$, $a < b$.
- (b) $\int_1^\infty e^{-ax} f(x)dx$, $a > 0$.
- (c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx)} f(x)dx$, $a > 0$. (Indicație: completați un pătrat perfect la exponent)
- (d) $\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{y+t} dt$, $x > 0$, $y > 0$. Este aproximarea obținută prea mare sau prea mică? Explicați.

Problema 4.89. Fie $f(x) = \frac{1}{1-\pi x}$ și $f_i = f(ih)$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Cu ajutorul diferențelor finite regresive

$$\begin{aligned}\nabla f_1 &= f_1 - f_0, \quad \nabla^2 f_1 = f_1 - 2f_0 + f_{-1} \\ \nabla^3 f_2 &= f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}, \quad \nabla^4 f_2 = f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2},\end{aligned}$$

definim

$$e_n(h) = f^{(n)}(0) - \frac{1}{h^n} \nabla^n f_{[\frac{n+1}{2}]}, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Încercați să determinați ordinul de convergență a lui $e_n(h)$ când $h \rightarrow \infty$ afișând pentru $n = 1, \dots, 4$

$$e_n(h_k) \text{ și } r_k := \frac{e_n(h_k)}{e_n(h_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots, 10,$$

unde $h_k = \frac{1}{4}2^{-k}$, $k \geq 0$. Comentați rezultatele.

Problema 4.90. (a) Utilizați `ezplot` pentru a reprezenta grafic x^x pentru $0 \leq x \leq 1$.

(b) Ce se întâmplă dacă încercați să utilizați Symbolic Math Toolbox pentru a găsi o expresie analitică pentru

$$\int_0^1 x^x dx?$$

(c) Încercați să găsiți valoarea numerică a acestei integrale cât mai precis posibil.

(d) Cât credeți că este eroarea în răspunsul obținut?

Problema 4.91. (a) Modificați rutina de cuadratură adaptivă astfel ca recursivitatea să se termine și să se afișeze un mesaj de avertisment ori de câte ori numărul de evaluări de funcții depășește 10,000. Asigurați-vă că mesajul se afișează o singură dată.

(b) Dați un exemplu care declanșează acest avertisment.

Problema 4.92. Fie

$$E_k = \int_0^1 x^k e^{x-1} dx.$$

(a) Arătați că

$$E_0 = 1 - 1/e$$

și că

$$E_k = 1 - kE_{k-1}.$$

(b) Presupunem că dorim să calculăm E_1, \dots, E_n pentru $n = 20$. Care dintre următoarele abordări este mai rapidă și mai precisă?

- Pentru orice k , utilizați o cuadratură adaptivă pentru a evalua E_k numeric.
- Utilizați recurența directă:

$$E_0 = 1 - 1/e$$

$$\text{for } k = 2, \dots, n, \quad E_k = 1 - kE_{k-1}.$$

- Utilizați recurența regresivă, pornind cu $N = 32$ cu o valoare complet imprecisă pentru E_N :

$$E_N = 0;$$

$$\text{for } k = N, \dots, 2, \quad E_{k-1} = (1 - E_k)/k;$$

$$\text{ignore } E_{n+1}, \dots, E_N$$

Problema 4.93. Un articol al Prof. Nick Trefethen de la Universitatea Oxford din ianuarie/februarie 2002 a apărut în SIAM News cu titlul „Hundred-dollar, Hundred-digit Challenge” [135]. Sfidarea lui Trefethen constă în 10 probleme de calcul al căror răspuns este un singur număr real. El a cerut ca fiecare răspuns să fie calculat cu 10 cifre semnificative și a oferit un premiu de 100\$ persoanei sau grupului de persoane care calculează cel mai mare număr de cifre corecte. 94 de echipe din 25 de țări au intrat în concurs. Spre marea surpriză a lui Trefethen, 20 de echipe au realizat un maxim de 100 de puncte și alte 5 echipe au realizat 99 de puncte. A apărut apoi o carte pe această temă [19]. Prima problemă a lui Trefethen este determinarea

$$T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-1} \cos(x^{-1} \ln x) dx.$$

(a) De ce nu putem utiliza pur și simplu o rutină de cuadratură numerică din MATLAB pentru a calcula această integrală cu doar câteva linii de cod? Iată aici un mod de a calcula T cu câteva cifre semnificative. Exprimați integrala ca o sumă infinită de integrale peste intervale în care integrandul nu-și schimbă semnul:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k,$$

unde

$$T_k = \int_{x_k}^{x_{k-1}} x^{-1} \cos(x^{-1} \ln x) dx.$$

Aici $x_0 = 1$, și, pentru $k > 0$, x_k sunt zerourile succesive ale lui $\cos(x^{-1} \ln x)$, ordonate descrescător, $x_1 > x_2 > \dots$. Cu alte cuvinte, pentru $k > 0$, x_k este soluție ecuației

$$\frac{\ln x_k}{x_k} = -\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Putem utiliza un rezolvitor de ecuații neliniare cum ar fi `fzero` pentru a calcula x_k -urile. Dacă utilizați `Symbolic Math Toolbox`, puteți apela funcția `lambertw` pentru a calcula x_k -urile. Pentru fiecare x_k , T_k poate fi calculat cu o cuadratură adaptivă propriu sau cu `quad`, ori `quadl`. Semnele T_k -urilor alternează și deci sumele parțiale ale seriilor vor oscila în jurul sumei seriei. Mai mult, media a două sume parțiale succesive este o aproximare mai precisă a rezultatului final decât suma înseși.

- (b) Utilizați această abordare pentru a calcula T cât mai precis posibil într-un timp rezonabil. Încercați să obțineți cel puțin patru sau cinci cifre. S-ar putea obține și mai multe. În toate cazurile, indicați cât sunt de precise rezultatele.
- (c) Investigați utilizarea accelerării δ^2 a lui Aitken

$$\hat{T}_k = T_k - \frac{(T_{k+1} - T_k)^2}{(T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1})}.$$

Problema 4.94. (a) Găsiți o formulă Gauss-Legendre cu trei noduri pentru intervalul $[a, b]$.

(b) Găsiți formula compusă corespunzătoare pentru n subintervale.

(c) Scrieți și rulați un program pentru a obține o aproximare numerică a integralei

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{e^x} dx$$

utilizând regula de la (b) cu $n = 120$. Utilizați soluția exactă $\frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi})$ calculată în dublă precizie pentru a calcula eroarea absolută.

Problema 4.95. Să se aproximeze

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

cu o precizie de 10^{-7} utilizând:

- (a) dezvoltarea Taylor;
- (d) metoda lui Romberg.

Problema 4.96. Utilizați metoda lui Romberg pentru a aproxima cu o precizie de 10^{-9} integrala

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

Explicați de ce pot să apară dificultăți și reformulați problema astfel încât să se poată obține mai ușor o aproximație precisă.

Problema 4.97. Studiul difracției luminii printr-o fantă dreptunghiulară implică integralele lui Fresnel

$$c(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi}{2} \omega^2 d\omega, \quad s(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi}{2} \omega^2 d\omega.$$

Construiți o tabelă a valorilor lui $c(t)$ și $s(t)$ cu o precizie de 10^{-5} pentru valorile $t = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$.

Problema 4.98. Presupunem că un corp de masă m călătorește în sus pe verticală pornind de la suprafața Pământului. Dacă orice rezistență exceptând gravitația se neglijează, viteza de evadare v este dată de

$$v^2 = 2gR \int_1^\infty z^{-2} dz, \text{ unde } z = \frac{x}{R},$$

$R = 6371$ km este raza Pământului, iar $g = 9.79881 m/s^2$ este accelerația gravitațională la suprafața Pământului. Aproximați viteza de evadare v .

Problema 4.99. Utilizați o cuadratură Gauss-Laguerre și o cuadratură Gauss-Hermite pentru a aproxima

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Problema 4.100. Dorim să calculăm aria unui elipsoid obținut prin rotația elipsei din figura 4.2 în jurul axei x . Raza ρ este dată în funcție de coordonatele axiale prin ecuația

$$\rho^2(x) = \alpha^2(1 - \beta^2 x^2), \quad -\frac{1}{\beta} \leq x \leq \frac{1}{\beta},$$

unde α și β verifică $\alpha^2 \beta^2 < 1$.

Pentru test vom utiliza următoarele valori ale parametrilor: $\alpha = (\sqrt{2}-1)/10$, $\beta = 10$. Aria este dată de

$$I(f) = 4\pi\alpha \int_0^{1/\beta} \sqrt{1 - K^2 x^2} dx,$$

unde $K^2 = \beta^2 \sqrt{1 - \alpha^2 \beta^2}$. Calculați aria:

- exact, utilizând Symbolic Math Toolbox;
- aproximativ, utilizând o cuadratură adaptivă, metoda lui Romberg și funcțiile MATLAB `quad` și `quadl`. Afișați metoda, aproximarea și numărul de evaluări de funcții.

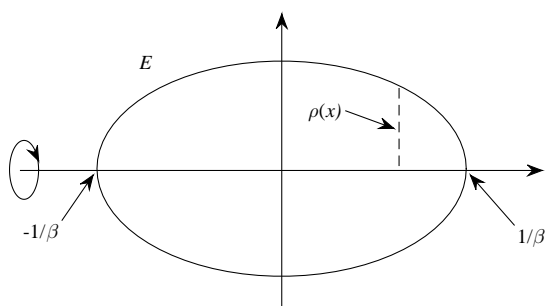


Figura 4.2: Secțiune în elipsoid

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

5.1. Probleme teoretice

Problema 5.1. Considerăm ecuația lui Kepler,

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x - \varepsilon \sin x - \eta, \quad 0 < |\varepsilon| < 1, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

unde ε, η sunt parametrii.

- (a) Arătați că, pentru orice ε, η există exact o rădăcină reală $\alpha = \alpha(\varepsilon, \eta)$ și că

$$\eta - |\varepsilon| \leq \alpha(\varepsilon, \eta) \leq \eta + |\varepsilon|.$$

- (b) Scriind ecuația sub forma unei probleme de punct fix

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \varepsilon \sin x + \eta$$

arătați că metoda aproximațiilor succesive $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge pentru orice valoare de pornire arbitrară x_0 .

- (c) Fie m un întreg astfel încât $m\pi < \eta < (m+1)\pi$. Arătați că metoda lui Newton cu valoarea de pornire

$$x_0 = \begin{cases} (m+1)\pi, & \text{dacă } (-1)^m \varepsilon > 0; \\ m\pi, & \text{altfel.} \end{cases}$$

converge (monoton) către $\alpha(\varepsilon, \eta)$.

- (d) Estimați constanta de eroare asimptotică c a metodei lui Newton.

Problema 5.2. (a) Deduceți o metodă iterativă ce utilizează numai adunări (sau scăderi) și înmulțiri pentru calculul inversului $\frac{1}{a}$ al unui număr pozitiv a .

(b) Pentru ce valori de pornire x_0 algoritmul de la (a) converge? Ce se întâmplă dacă $x_0 < 0$?

(c) Deoarece în aritmetica în virgulă flotantă binară este suficient să găsim inversul semnificativului, presupunem că $1 \leq a < 2$, sau după creșterea exponentului cu o unitate $\frac{1}{2} \leq a < 1$. Arătați că în acest ultim caz

$$\left| x_{n+1} - \frac{1}{a} \right| < \left| x_n - \frac{1}{a} \right|^2.$$

(d) Utilizați rezultatul de la (c) pentru a estima câte iterații sunt necesare pentru a obține $\frac{1}{a}$ cu o eroare mai mică decât 2^{-48} , dacă se ia $x_0 = \frac{3}{2}$.

Problema 5.3. (a) Deduceți iterația care rezultă aplicând metoda lui Newton funcției $f(x) := x^3 - a = 0$ pentru a calcula rădăcina cubică $\alpha = a^{\frac{1}{3}}$ a lui $a > 0$.

(b) Considerați ecuația echivalentă $f_\lambda(x) = 0$, unde $f_\lambda(x) = x^{3-\lambda} - ax^{-\lambda}$ și determinați λ , astfel încât metoda lui Newton să convergă cubic. Scrieți iterația obținută în cea mai simplă formă.

Problema 5.4. Arătați că

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

este o metodă de calcul al lui $\alpha = \sqrt[3]{a}$, care converge cubic către α (pentru un x_0 potrivit). Determinați constanta de eroare asimptotică.

Problema 5.5. Se consideră iterația de tip punct fix

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

unde

$$\varphi(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3.$$

(a) Dându-se un număr pozitiv α , să se determine constantele A, B, C , astfel ca iterația să convergă local către $1/\alpha$ cu ordinul $p = 3$. (Se obține astfel o metodă cu convergență cubică pentru calculul inversului $1/\alpha$ a lui α , care utilizează doar adunări, scăderi și înmulțiri).

(b) Determinați condiții asupra erorii inițiale $\varepsilon_0 = x_0 - \frac{1}{\alpha}$, astfel ca iterația să convergă.

Problema 5.6. Fie $p(t)$ un polinom monic de gradul n . Fie $x \in \mathbb{C}^n$ și definim

$$f_\nu(x) = p[x_1, x_2, \dots, x_\nu], \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

ca fiind diferența divizată a lui p relativ la coordonatele x_μ ale lui x . Considerăm sistemul de ecuații

$$f(x) = 0, \quad [f(x)]^T = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)].$$

- (a) Fie $\alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ zerourile lui p . Arătați că α este, exceptând o permutare a componentelor, soluția unică a lui $f(x) = 0$.

(Indicație. Folosiți forma Newton a polinomului de interpolare).

- (b) Arătați că

$$\frac{\partial}{\partial x_0} g[x_0, x_1, \dots, x_n] = g[x_0, x_0, x_1, \dots, x_n]$$

presupunând că g este o funcție diferențiabilă în x_0 . Ce se poate spune despre derivatele parțiale în raport cu celelalte variabile?

- (c) Descrieți aplicarea metodei lui Newton sistemului de ecuații neliniare $f(x) = 0$, dat la punctul (a).
- (d) Discutați în ce măsură procedura de la (a) și (c) este valabilă pentru funcții p nepolinomiale.

Problema 5.7. Pentru un întreg $n \geq 1$, se consideră ecuația

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x^{n+1} - b^n x + ab^n, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

- (a) Demonstrați că ecuația are exact două rădăcini distincte pozitive dacă și numai dacă

$$a < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} b.$$

(Indicație. Analizați convexitatea lui f .)

- (b) Presupunând că au loc condițiile de la (a), arătați că metoda lui Newton converge către cea mai mică rădăcină pozitivă, când se pornește cu $x_0 = a$ și către cea mai mare, când $x_0 = b$.

Problema 5.8. (a) Arătați că iterația Newton

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad a > 0$$

pentru calculul rădăcinii pătrate $\alpha = \sqrt{a}$ satisface

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2x_n}$$

Obțineți de aici eroarea asimptotică.

- (b) Care este formula analoagă pentru rădăcina cubică?

Problema 5.9. Se consideră metoda lui Newton

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad a > 0$$

pentru calculul rădăcinii pătrate $\alpha = \sqrt{a}$. Fie $d_n = x_{n+1} - x_n$.

(a) Arătați că

$$x_n = \frac{a}{d_n + \sqrt{d_n^2 + a}}$$

(b) Utilizați (a) pentru a arăta că

$$|d_{n+1}| = \frac{d_n^2}{2\sqrt{d_n^2 + a}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Discutați semnificația acestui rezultat pentru comportarea globală a iterației Newton în acest caz.

(c) Arătați că, numărul de cifre corecte se dublează (practic) la fiecare pas.

(Indicație. Punem $x_n = \sqrt{a}(1 + \delta)$ și calculăm x_{n+1}).

Problema 5.10. Pornind de la o ecuație convenabilă, deduceți o metodă de aproximare a lui $\sqrt[3]{a}$. Cum se alege valoarea de pornire? care este criteriul de oprire?

Problema 5.11 (Alegerea valorii de pornire pentru metoda lui Newton). Dacă $f(a)f(b) < 0$ și $f'(x)$ și $f''(x)$ asunt nenule și își păstrează semnul pe $[a, b]$, atunci alegând aproximația inițială $x_0 \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x_0)f''(x_0) > 0, \quad (5.1.1)$$

este posibil, utilizând metoda lui Newton, să se calculeze rădăcina unică ξ a lui $f(x) = 0$ cu orice precizie. ($f \in C^2[a, b]$).

Problema 5.12. Pentru ecuația $f(x) = 0$ definim

$$\begin{aligned} y^{[0]}(x) &= x \\ y^{[1]}(x) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &\dots \\ y^{[m]}(x) &= \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} y^{[m-1]}(x), \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Considerăm iterația definită de funcția

$$\varphi_r(x) := \sum_{m=0}^r (-1)^m \frac{y^{[m]}(x)}{m!} [f(x)]^m$$

Dacă $r = 1$ se obține metoda lui Newton. Arătați că $\varphi_r(x)$ definește o iterație $x_{n+1} = \varphi_r(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ce converge local cu ordinul exact $p = r + 1$ către o rădăcină α a ecuației dacă $y^{[r+1]}(\alpha)f'(\alpha) \neq 0$.

Problema 5.13. Fie α un zero simplu al lui f și $f \in C^p$ în vecinătatea lui α , unde $p \geq 3$. Arătați că: dacă $f''(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci metoda lui Newton aplicată lui $f(x) = 0$ converge local către α cu ordinul p . Determinați constanta de eroare asimptotică.

Problema 5.14. Iterația

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}f''(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pentru rezolvarea ecuației $f(x) = 0$ se numește metoda lui Halley.

(a) Arătați că metoda se poate obține aplicând metoda lui Newton ecuației $g(x) = 0$, $g(x) = f(x)/\sqrt{f'(x)}$.

(b) Presupunând că α este o rădăcină simplă a ecuației și $x_n \rightarrow \alpha$ când $n \rightarrow \infty$, arătați că ordinul exact de convergență este $p = 3$, înafară de cazul când

$$(Sf)(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

se anulează în $x = \alpha$ și atunci ordinul de convergență poate fi mai mare decât 3.

(c) Cum arată metoda lui Halley pentru ecuația $f(x) = x^\lambda - a$, $a > 0$?

Problema 5.15. Se consideră următoarea metodă de rezolvare a ecuației $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Să se determine ordinul de convergență și eroarea asimptotică.

Problema 5.16. Fie $p > 1$. Se consideră șirurile

$$x_n = \underbrace{\sqrt{p + \sqrt{p + \dots \sqrt{p}}}}_{n \text{ ori}}$$

și

$$y_n = \frac{1}{\underbrace{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \dots}}}_{n \text{ ori}}},$$

Demonstrați convergența lor și determinați limitele folosind metoda aproximațiilor succesive.

Problema 5.17. Se consideră aproximația succesivă dată de funcția $F(x) = x - f(x)f'(x)$, unde $f(r) = 0$ și $f'(r) \neq 0$. Impuneți condiții precise asupra lui f astfel ca metoda să converge cel puțin cubic către r dacă se pornește suficient de aproape de r .

Problema 5.18. Concepeți o metodă pentru a calcula $\sqrt[20]{a}$, $a > 0$, bazată pe metoda lui Newton. De ce o astfel de metodă este lent convergentă? (A se vedea de exemplu $a = 1$ și $x_0 = \frac{1}{2}$). Ce se poate face? Gândiți-vă și la o altă metodă.

Problema 5.19. Se consideră o metodă iterativă de forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Se presupune că metoda converge către un zero simplu al lui f , ξ , dar care nu este zero al lui g . Stabiliți o relație între f și g astfel încât ordinul de convergență al metodei să fie cel puțin 3.

Problema 5.20. Se consideră ecuația

$$x = e^{-x}$$

- (a) Arătați că există o rădăcină reală unică α și determinați intervalul care o conține.
- (b) Arătați că metoda aproximațiilor succesive $x_n = e^{-x_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ converge local către α și determinați constanta de eroare asimptotică.
- (c) Ilustrați grafic faptul că iterația de la (b) converge global, adică pentru $x_0 > 0$, arbitrar. Demonstrați apoi convergența.
- (d) O ecuație echivalentă este

$$x = \ln \frac{1}{x}.$$

Iterația $x_n = \ln \frac{1}{x_n}$ converge local? Explicați.

Problema 5.21. Se consideră ecuația $x = \cos x$.

- (a) Arătați grafic că are o rădăcină pozitivă unică α . Indicați, aproximativ, unde este situată.
- (b) Demonstrați convergența locală a iterației $x_{n+1} = \cos x_n$.
- (c) Pentru iterația de la (b) demonstrați că dacă $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, atunci

$$|x_{n+1} - \alpha| < \sin \frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha|.$$

În particular, are loc convergența globală pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- (d) Arătați că metoda lui Newton aplicată ecuației $f(x) = 0$, $f(x) = x - \cos x$, converge global pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Problema 5.22. Procedul Δ^2 al lui Aitken este un instrument pentru accelerarea convergenței proceselor liniare și se definește prin

$$x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}, \quad (5.1.2)$$

unde $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ și $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$. Fie (x_n) un șir ce converge liniar către α cu constanta de eroare asimptotică c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = c, \quad |c| < 1$$

și presupunem că $x_n \neq \alpha$, $\forall n$.

- (a) Deduceți procedeul Δ^2 al lui Aitken, presupunând că două rapoarte consecutive în relația de mai sus (de exemplu, pentru n și $n + 1$) sunt egale cu c .
- (b) Arătați că șirul (x'_n) din (5.1.2) este bine definit pentru n suficient de mare.
- (c) Arătați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0,$$

adică convergența superliniară.

Problema 5.23. (a) Să se arate că șirul dat prin relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n + (2 - e^{x_n}) \frac{x_n - x_{n-1}}{e^{x_n} - e^{x_{n-1}}}, x_0 = 0, x_1 = 1$$

este convergent și să se determine limita sa.

- (b) Iterația din metoda secantei se poate scrie și sub forma

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Din punct de vedere al erorii, care formă este mai bună în programe, forma aceasta sau forma clasică? Justificați riguros răspunsul.

5.2. Probleme practice

Problema 5.24. Determinați toate rădăcinile ecuației

$$x^4 - x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

cu metoda lui Newton. Atenție, ecuația are o rădăcină reală dublă și două complexe.

Problema 5.25. Analiza ecuației lui Schrödinger pentru o particulă de masă m într-un potențial rectangular ne conduce la o mulțime discretă de valori ale energiei totale R care sunt soluțiile unei perechi de ecuații transcendente. Una dintre aceste ecuații este

$$\cot\left(\frac{\alpha}{h}\sqrt{2mV_0}\sqrt{E/V_0}\right) = \sqrt{\frac{E/V_0}{1 - E/V_0}},$$

unde

$$\bar{h} = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6.625 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec},$$

este constanta lui Planck. Găsiți valorile lui E ce satisfac această ecuație. Utilizați datele următoare, care corespund unui model simplificat al atomului de hidrogen:

$$m = 9.109 \times 10^{-28} g$$

$$V_0 = 2.179 \times 10^{-11} \text{ erg}$$

$$a = 5.292 \times 10^{-9} \text{ cm}.$$

Pe unele mașini va fi nevoie să scalați unele variabile pentru a evita depășirea flotantă inferioară. Fiți atenți și la alegerea erorii dacă doriți un răspuns precis.

Problema 5.26. În încercarea de a rezolva ecuația transferului radiativ în atmosfere semiinfinite, se întâlnește ecuația neliniară

$$\omega_0 = \frac{2k}{\ln[(1+k)/(1-k)]},$$

unde numărul $\omega_0 \in (0, 1)$ se numește albedo. Arătați că pentru ω_0 fixat, dacă k este o rădăcină, la fel este și $-k$ și că există o singură rădăcină $k \in (0, 1)$. Pentru $\omega_0 = 0.25, 0.50, 0.75$ găsiți rădăcinile pozitive corespunzătoare.

Problema 5.27. Factorul de concentrare geometrică C într-un model de colectare a energiei solare (L. Vant-Hull, A. Hildebrandt: Solar thermal power systems based on optical transmissions, *Solar Energy*, 18(1976), pp. 31-40) satisface

$$C = \frac{\pi (h/\cos A)^2 f}{\frac{1}{2}\pi D^2 (1 + \sin A - \frac{1}{2}\cos A)}.$$

Scalați problema pentru a evita polii. Găsiți cea mai mică rădăcină pozitivă A dacă $h = 300$, $C = 1200$, $f = 0.8$ și $D = 14$.

Problema 5.28. Pentru curgerea turbulentă a unui fluid într-o conductă netedă, ecuația

$$1 = \sqrt{c_f} (-0.4 + 1.74 \ln(\operatorname{Re} \sqrt{c_f}))$$

modelează relația dintre factorul de frecare c_f și numărul lui Reynolds Re . Calculați c_f pentru $\operatorname{Re} = 10^4, 10^5, 10^6$.

Problema 5.29. (a) Implementați metoda falsei poziții în MATLAB.

- (b) Considerăm o distribuție de probabilitate *continuă*, pentru care F (cdf) este disponibilă. Scrieți o funcție MATLAB ce calculează o cuantilă de ordin α a acestei distribuții utilizând metoda falsei poziții. Atenție: F poate depinde de un număr variabil de parametrii.

Problema 5.30. Ecuația ce determină încărcarea critică pentru coloanele cu capitel îngroșat este dată în S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill, New York, 1961. Valori potrivite ale parametrilor fizici pentru experimentele realizate de Timoshenko conduc la problema

$$\frac{1}{180} = \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10} - \cos z} \right) \frac{\sin z}{z}$$

și se dorește cea mai mică rădăcină pozitivă. Faceți o schiță a graficului pentru a vă face o idee asupra locației rădăcinii. Scalați pentru a evita dificultățile legate de poli și singularitatea aparentă în 0 și apoi calculați rădăcina.

Problema 5.31. Căutăm parametrii α , β și γ ai modelului

$$f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma x$$

interpolând punctele $(1, 10)$, $(2, 12)$ și $(3, 18)$. Utilizați metoda lui Newton pentru a găsi parametrii cu trei cifre corecte.

Problema 5.32. În unele probleme de distribuție a temperaturii este necesar să se găsească rădăcinile pozitive ale ecuației

$$2xJ_1(x) - J_0(x) = 0,$$

unde $J_0(x)$ și $J_1(x)$ sunt funcțiile Bessel de speța I de ordinul 0 și 1. Calculați cele mai mici trei rădăcini pozitive.

Problema 5.33. Cartea P. Davis, J. Voge, *Propagation of Waves*, Pergamon Press, New York, 1969 conține o ecuație cubică pentru parametrul s în contextul corecției pentru curbura pământului în zona de interferență. Ecuația

$$s^3 - \frac{3}{2}s^2 - \frac{s}{2} \left(\frac{1+u}{v^2} - 1 \right) + \frac{1}{2v^2} = 0$$

depinde de doi parametri, u și v , care se obțin din înălțimile turnurilor, distanța între stații și raza pământului. Valorile reprezentative sunt $v = 1/291$, $u = 30$. Rădăcina de interes este cea mai mică rădăcină, dar calculați-le pe toate. Valoarea funcției în cele mai mari două rădăcini este mare. Sunt ele imprecise?

Problema 5.34. Ecuația temperaturii T pentru care otoluidina are o presiune de vaporizare de 500 mm Hg este

$$21.306 - \frac{3480.3}{T} - 5.081 \log_{10} T = 0.$$

Calculați toate rădăcinile.

Problema 5.35. Un fir cu greutatea de 0.7708689229 kg/m este suspendat între două turnuri de înălțimi egale, la același nivel la o distanță de 152.4 m. Dacă încovoierea firului este de 15.24 m, determinați tensiunea maximă în fir. Ecuațiile de rezolvat sunt

$$c + 15.24 = c \cosh \frac{152.4}{2c}$$

$$T = 0.7708689229(c + 15.24).$$

Problema 5.36. Problema aceasta se referă la răcirea unei sfere. Presupunem că sfera este de rază a și temperatura ei inițială este V . Ea se răcește după legea lui Newton cu conductivitatea k , constanta ε și difuzia h^2 după ce a fost pusă să se răcească la aer la temperatura de 0°C . Se poate arăta că temperatura $\theta(r, t)$ la momentul de timp $t > 0$ și raza r este

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} e^{-\gamma_n^2 h^2 t} \sin \gamma_n r.$$

Aici, γ_n sunt rădăcinile pozitive ale ecuației

$$\gamma_n \cos \gamma_n a - \left(\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon}{k} \right) \sin \gamma_n a = 0$$

și

$$A_n = \frac{2\gamma_n V}{[\gamma_n a - \cos \gamma_n a \sin \gamma_n a]} \int_0^a r \sin \gamma_n r dr.$$

Pentru o sferă de oțel răcită la aer la 0°C , presupunem că temperatura inițială este $V = 100^\circ \text{C}$ și că raza este $a = 0.30 \text{m}$. Constantele corespunzătoare sunt $h^2 = 1.73 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 20$ și $k = 60$. Găsiți cele trei cele mai mici valori ale lui $\gamma_n a$ și utilizați-le pentru a calcula A_1 , A_2 și A_3 . Aproximați temperatura pentru $r = 0.25$, pentru $t = 10^k$ secunde, $k = 2, 3, 4, 5$.

Problema 5.37. (a) Implementați metoda hibridă Newton-înjumătățire în MATLAB.

(b) Rezolvați ecuațiile $\sin 2\pi x = 0$ și $J_0(x) = 0$ pentru $x_0 = \frac{501\pi}{1000}$, unde J_0 este funcția Bessel de speța I și ordinul 0 (`besselj(0, x)` în MATLAB) cu metoda lui Newton și apoi cu metoda de la punctul (a). Comentați comportarea metodelor și avantajele și dezavantajele fiecăreia pentru problemele rezolvate aici.

Problema 5.38. (a) Implementați în MATLAB metoda lui Newton pentru ecuații scalare cu rădăcini multiple.

(b) Studiați comportarea metodei lui Newton și a metodei secantei pentru funcția

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) \sqrt{|x - a|}.$$

Problema 5.39. Rezolvați ecuația lui Kepler

$$f(x) = x - \varepsilon \sin x - \eta = 0, \quad 0 < |\varepsilon| < 1, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

unde ε și η sunt parametrii.

Problema 5.40. Rezolvați sistemul

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0$$

$$x^2 - 2y^2 - 20z = 0$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

Indicație: Sunt patru soluții. Valori bune de pornire

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Problema 5.41. Modelul lui Kepler pentru orbite planetare se bazează pe ecuația

$$M = E - e \sin E,$$

unde M este anomalia medie, E este anomalia excentrică, iar e este excentricitatea orbitei. Luați $M = 24.851090$ și $e = 0.1$.

- (a) Rezolvați ecuația de mai sus cu necunoscuta E folosind metoda lui Newton, metoda secantei și metoda aproximațiilor succesive.
- (b) Se cunoaște o formulă exactă pentru E

$$E = M + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_m(me) \sin(mM),$$

unde J_m este funcția Bessel de speța I de ordin m . Utilizați formula de mai sus și funcția MATLAB `besselj(m,x)` pentru a calcula E . Câți termeni sunt necesari? Cum este valoarea lui E calculată în acest mod față de valoarea obținută din ecuație.

Problema 5.42. Fie funcția $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 - x_2^2 - e^{x_3} - 8x_1 - 2x_2 + x_3$. Să se determine un punct staționar al ei.

Problema 5.43. Inversați funcția specială

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

rezolvând ecuația $y = \operatorname{erf}(x)$ în raport cu x folosind metoda lui Newton, $-1 \leq y \leq 1$.

Problema 5.44. Studiul transportului neutronului într-o vergea (vezi G. M. Wing: *An Introduction to Transport Theory*, Wiley, New York, 1962) conduce la o ecuație transcendentă care are rădăcini legate de lungimile critice. Pentru o vergea de lungime ℓ ecuația este

$$\cot(\ell x) = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

Faceți un grafic al funcțiilor $\cot(\ell x)$ și $\frac{x^2 - 1}{2x}$ pentru a vă face o idee asupra poziției rădăcinilor. Pentru $\ell = 1, 2$ determinați cele mai mici trei rădăcini pozitive.

Problema 5.45. Rețelele de utilități trebuie să evite înghețarea conductelor de apă. Dacă presupunem condiții uniforme de sol, temperatura $T(x, t)$ la adâncimea x față de suprafață și momentul t după o răcire bruscă este aproximată prin ecuația

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right).$$

Aici T_s este temperatura constantă de la suprafață, T_i este temperatura inițială a solului înainte de răcirea bruscă, iar α este conductivitatea termică a solului. Dacă x este măsurat în metri și t în secunde, atunci $\alpha = 0.138 \cdot 10^{-6} m^2/s$. Fie $T_i = 20^\circ C$, $T_s = -15^\circ C$. Determinați la ce adâncime trebuie îngropată conducta pentru ca să nu înghețe după cel puțin 60 de zile de expunere la aceste condiții. Care este adâncimea pentru o iarnă întreagă (în condiții de climă temperată)?

Problema 5.46. Un ax metalic circular este utilizat la transmiterea energiei. Se știe că la anumite viteze unghiulare critice ω , orice trepidație a axului va cauza deformări sau curbări. Aceasta este o situație periculoasă deoarece axul se poate distruge sub acțiunea forței centrifuge mari. Pentru a găsi viteza unghiulară critică ω , trebuie să determinăm întâi numărul x care satisface ecuația

$$\tan x + \tanh x = 0.$$

Rezolvați ecuația.

Problema 5.47. Să se rezolve sistemul

$$2x^2 - x + y^2 - z = 0$$

$$32x^2 - y^2 + 20z = 0$$

$$y^2 - 14xz = 0$$

cu o precizie de 10^{-4} , în vecinătatea punctului $(0.5, 1, 0)$.

Problema 5.48. Rezolvați sistemul

$$a_{11}x_1 \sin \theta + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cos \theta = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cos \theta + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 \cos \theta + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \sin \theta = b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \sin \theta + a_{43}x_3 = b_4$$

cu necunoscutele x_1, x_2, x_3 și θ .

Problema 5.49. Un mediu semi-infinit este încălzit uniform la temperatura inițială $T_0 = 70^\circ F$. La momentul $t > 0$, un flux de căldură cu densitatea constantă $q = 300$ Btu/hr sq ft este menținut pe suprafața $x = 0$. Cunoscând conductivitatea termică $k = 1.0$ Btu/hr/ft/°F și difuzivitatea termică $\alpha = 0.04$ sq ft/hr, temperatura rezultată $T(x, t)$ este dată de

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q}{k} \left[2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} e^{-x^2/4\alpha t} - x \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right) \right],$$

unde

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz$$

este funcția specială de eroare, disponibilă în MATLAB și alte pachete. Găsiți timpul t necesar pentru ca temperatura la distanțele $x = 0.1, 0.2, \dots, 0.5$ să atingă o valoare de $T = 100^\circ F$. Utilizați o eroare absolută de 10^{-8} și o eroare relativă de 10^{-6} .

Problema 5.50. (a) Scrieți o funcție `SquareRoot(x)` pentru calculul lui \sqrt{x} pentru x pozitiv utilizând algoritmul următor. La început, reduceți argumentul x determinând un

număr real r și un întreg m astfel încât $x = 2^{2m}r$ cu $\frac{1}{4} \leq r < 1$. Apoi, calculați x_2 utilizând trei iterații ale metodei lui Newton cu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{r}{x_n} \right)$$

cu valoarea de pornire specială

$$x_0 = 1.27235367 + 0.242693281r - \frac{1.02966039}{1+r}.$$

Apoi, setați $\sqrt{x} \approx 2^m x_2$. Testați acest algoritm pentru diverse valori ale lui x .

(b) Comparați experimental cu metoda cu ordinul de convergență 3 dată de

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3r)}{3x_n^2 + r}.$$

Utilizați aceeași reducere a argumentului și aceeași aproximație inițială.

Problema 5.51. Fie $f(x) = \frac{1}{1-\pi x}$ și $f_i = f(ih)$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Cu ajutorul diferențelor finite regresive

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= f_1 - f_0, \quad \nabla^2 f_1 = f_1 - 2f_0 + f_{-1} \\ \nabla^3 f_2 &= f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}, \quad \nabla^4 f_2 = f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}, \end{aligned}$$

definim

$$e_n(h) = f^{(n)}(0) - \frac{1}{h^n} \nabla^n f_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Încercați să determinați ordinul de convergență a lui $e_n(h)$ când $h \rightarrow \infty$ afișând pentru $n = 1, \dots, 4$

$$e_n(h_k) \text{ și } r_k := \frac{e_n(h_k)}{e_n(h_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots, 10,$$

unde $h_k = \frac{1}{4}2^{-k}$, $k \geq 0$. Comentați rezultatele.

Problema 5.52. Constanta Littlewood–Salem–Izumi, α_0 , definită ca soluția unică în intervalul $0 < \alpha < 1$ a ecuației

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt = 0,$$

prezintă interes în teoria seriilor trigonometrice. Utilizați metoda lui Newton în combinație cu o cuadratură Gauss–Jacobi pentru a calcula α_0 .

Problema 5.53. Ecuația

$$f(x) = x \tan x - 1 = 0;$$

are o infinitate de rădăcini, α_n , câte una în fiecare interval $[n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Arătați existența rădăcinilor pe cale grafică.

- (b) Arătați că cea mai mică rădăcină pozitivă α_0 se poate obține cu metoda lui Newton pornind cu $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
- (c) Arătați că metoda lui Newton cu valoarea de pornire $x_0 = (n + \frac{1}{4})\pi$ converge monoton descrescător către α_n dacă $n \geq 1$.
- (d) Dezvoltând α_n (formal) după puterile inverse ale lui πn

$$\alpha_n = n\pi + c_0 + c_1 (\pi n)^{-1} + c_2 (\pi n)^{-2} + c_3 (\pi n)^{-3} + \dots$$

determinați $c_0, c_1, c_2, \dots, c_9$. (Indicație: Utilizați comanda Maple `series`.)

- (e) Utilizați metoda lui Newton pentru a calcula α_n pentru $n = 1 : 10$ și comparați rezultatele cu aproximația furnizată de dezvoltarea de la (d).

Problema 5.54. Scrieți o funcție `CubeRoot(x)` pentru calculul lui $\sqrt[3]{x}$ pentru x real utilizând algoritmul următor. La început, reduceți argumentul x determinând un număr real r și un întreg m astfel încât $x = 2^{3m}r$ cu $\frac{1}{8} \leq r < 1$. Apoi, calculați x_4 utilizând patru iterații ale metodei lui Newton cu

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} \left(x_n + \frac{r}{2x_n^2} \right)$$

cu valoarea de pornire specială

$$x_0 = 2.502926 - \frac{8.045125(r + 0.3877552)}{(r + 4.612244)(r + 0.3877552) - 0.3598496}.$$

Setați $\sqrt[3]{x} \approx 2^m x_4$. Testați pentru diverse valori ale lui x .

Problema 5.55. Să se rezolve sistemul neliniar

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ e^x + xy - xz = 1 \end{cases}$$

cu metoda lui Newton.

Problema 5.56. (a) Ce se întâmplă dacă aplicăm metoda lui Newton funcției $f(x) = \arctan x$ cu $x_0 = 2$? Pentru ce valori de pornire metoda converge?

- (b) În metoda lui Newton se avansează de la x la $x - h$, unde $h = f(x)/f'(x)$. O rafinare ușor de programat este următoarea: dacă $|f(x-h)|$ nu este mai mic decât $|f(x)|$, atunci valoarea lui h se respinge și se utilizează valoarea $h/2$. Testați această rafinare.

Problema 5.57. (a) Se consideră ecuația $e^{-x^2} = \cos x + 1$ pe $[0, 4]$. Ce se întâmplă dacă se aplică metoda lui Newton cu $x_0 = 0$ și $x_0 = 1$?

- (b) Găsiți rădăcina ecuației $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x = 0$ cu metoda lui Newton și $x_0 = 1$. Remarcați convergența lentă, explicați fenomenul și găsiți un remediu.

Problema 5.58. Fie

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - k),$$

M_n și m_n cel mai mare și cel mai mic maxim relativ al lui $|\omega_n(x)|$. Pentru $n = 5 : 5 : 30$, calculați M_n , m_n și M_n/m_n , utilizând metoda lui Newton și afișați și numărul maxim de iterații.

Problema 5.59. Se consideră sistemul neliniar

$$f_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x, y, z) \equiv 2x^2 + y^2 - 4z = 0$$

$$f_3(x, y, z) \equiv 3x^2 - 4y + z^2 = 0.$$

Găsiți soluția sistemului situată în primul octant ($\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$).

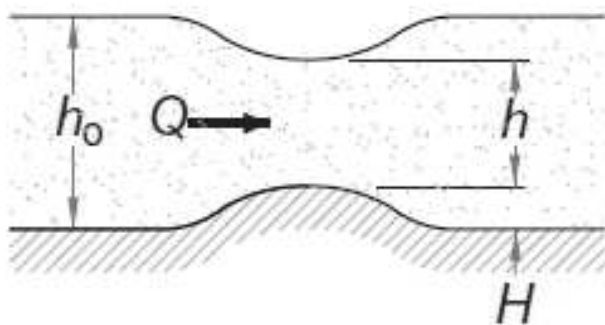


Figura 5.1: Ec. Bernoulli

Problema 5.60. Ecuația lui Bernoulli pentru fluxul de fluid într-un canal deschis cu o mică cocoașă este

$$\frac{Q^2}{2gb^2h_0^2 + h_0} + h_0 = \frac{Q^2}{2gb^2h^2 + h} + h + H$$

unde (vezi figura 5.1)

$$Q = 1.2 \text{ m}^3/\text{s} = \text{rata de curgere a volumului}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 = \text{acelerația gravitațională}$$

$$b = 1.8 \text{ m} = \text{lățimea canalului}$$

$$h_0 = 0.6 \text{ m} = \text{nivelul superior al apei}$$

$$H = 0.075 \text{ m} = \text{înălțimea cocoșei}$$

$$h = \text{nivelul apei deasupra cocoșei}$$

Determinați h .

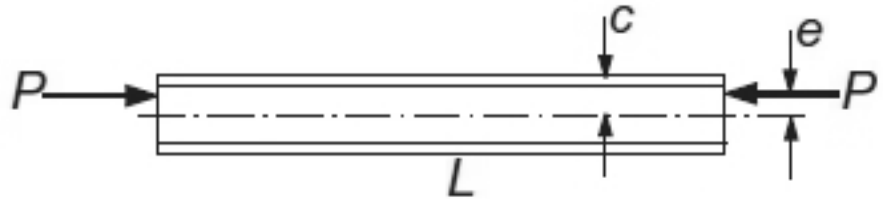


Figura 5.2: Coloană de aluminiu

Problema 5.61. O coloană de aluminiu $W310 \times 202$ (flanșă largă) este supusă unei încărcări excentrice axiale P ca în figura 5.2. Apăsarea maximă compresivă în coloană este dată de formula secantei:

$$\sigma_{\max} = \bar{\sigma} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{\bar{\sigma}}{E}} \right) \right]$$

unde

$$\bar{\sigma} = P/A = \text{apăsarea medie}$$

$$A = 25800 \text{ mm}^2 = \text{aria secțiunii coloanei}$$

$$e = 85 \text{ mm} = \text{excentricitatea încărcării}$$

$$c = 170 \text{ mm} = \text{semiadâncimea coloanei}$$

$$r = 142 \text{ mm} = \text{raza de girație a secțiunii}$$

$$L = 7100 \text{ mm} = \text{lungimea coloanei}$$

$$E = 71 \times 10^9 \text{ Pa} = \text{modulul de elasticitate}$$

Determinați încărcarea maximă P pe care coloana o poate suporta, dacă apăsarea maximă nu poate depăși $120 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Problema 5.62. Un cablu de oțel de lungime s este suspendat așa cum se arată în figura 5.3. Tensiunea de întindere maximă în cablu, care apare la suporturi (punctele de sprijin), este

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \cosh \beta$$

unde

$$\beta = \frac{\gamma L}{2\sigma_0}$$

σ_0 = tensiunea de întindere în O

γ = greutatea cablului pe unitatea de volum

L = întinderea orizontală a cablului

Raportul lungime-întindere este legat de β prin

$$\frac{s}{L} = \frac{1}{\beta} \sinh \beta$$

Determinați σ_{\max} dacă $\gamma = 77 \times 10^3 \text{ N/m}^3$ (oțel), $L = 1000 \text{ m}$ și $s = 1100 \text{ m}$.

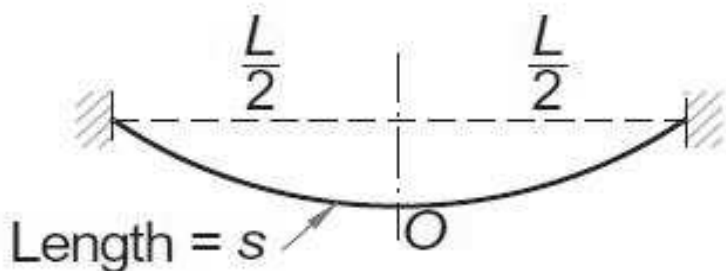


Figura 5.3: Tensiune în cablu

Problema 5.63. Frecvențele naturale ale unui cantilever (grindă în consolă) uniform sunt legate de rădăcinile β_i ale ecuației de frecvență $f(\beta) = \cosh \beta \cos \beta + 1 = 0$, unde

$$\beta_i^4 = (2\pi f_i)^2 \frac{mL^3}{EI}$$

f_i = a i -a frecvență naturală

m = masa grinzii

L = lungimea grinzii

E = modulul de elasticitate

I = momentul de inerție al secțiunii transversale

Determinați cele mai mici două frecvențe ale unei grinzi de $0.9m$ lungime, cu o secțiune rectangulară cu lățimea de 25 mm și înălțimea de 2.5 mm . Densitatea oțelului este 7850 kg/m^3 și $E = 200GPa$.

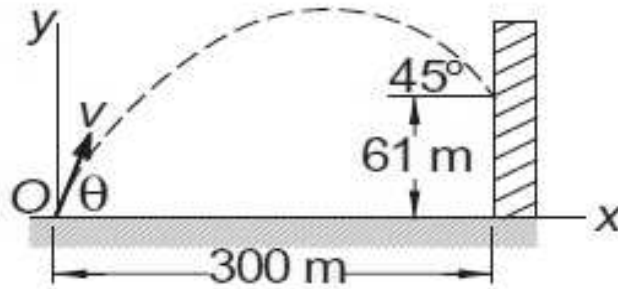


Figura 5.4: Proiectil

Problema 5.64. Un proiectil este lansat din O cu viteza v la unghiul θ cu orizontala. Ecuația parametrică a traiectoriei este

$$\begin{aligned} x &= (v \cos \theta) t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v \sin \theta) t, \end{aligned}$$

unde t este timpul măsurat de la lansare, iar $g = 9.81m/s^2$ reprezintă accelerația gravitațională. Dacă proiectilul trebuie să atingă ținta la un unghi de 45° (figura 5.4), determinați v , θ și timpul de zbor.

Problema 5.65. Traectoria unui satelit care se rotește pe orbită în jurul Pământului este (figura 5.5)

$$R = \frac{C}{1 + e \sin(\theta + \alpha)}$$

unde (R, θ) sunt coordonatele polare ale satelitului, iar C , e și α sunt constante (e se numește excentricitatea orbitei). Dacă satelitul a fost observat în următoarele trei poziții

| | | | |
|----------|-------------|-----------|------------|
| θ | -30° | 0° | 30° |
| $R(km)$ | 6870 | 6728 | 6615 |

determinați cea mai mică rază R a traiectoriei și valoarea corespunzătoare a lui θ .

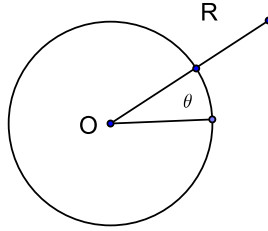


Figura 5.5: Satelit

Problema 5.66. Viteza v a unei rachete Saturn V în zbor vertical în apropierea suprafeței Pământului poate fi aproximată prin

$$v = u \ln \frac{M_0}{M_0 - mt} - gt$$

unde

- $u = 2510 \text{ m/s}$ = viteza de expulzare relativă la rachetă
- $M_0 = 2.8 \times 10^6 \text{ kg}$ = masa rachetei la lansare
- $m = 13.3 \times 10^3 \text{ kg/s}$ = rata de consum a combustibilului
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ = accelerația gravitațională
- t = timpul măsurat de la lansare

Determinați momentul când racheta atinge viteza sunetului (335 m/s).

Problema 5.67. Un cablu de 15 m este suspendat în A și D și susține greutatea concentrate în B și C (vezi figura 5.6). Ecuațiile de echilibru vertical în joncțiunile B și C sunt

$$T(-\tan \theta_2 + \tan \theta_1) = 16$$

$$T(\tan \theta_3 + \tan \theta_2) = 20$$

unde T componenta orizontală a forței cablului (este aceeași în toate segmentele cablului). În plus, există două restricții geometrice impuse de pozițiile suporturilor:

$$-4 \sin \theta_1 - 6 \sin \theta_2 + 5 \sin \theta_3 = -3$$

$$4 \cos \theta_1 + 6 \cos \theta_2 + 5 \cos \theta_3 = 12.$$

Determinați unghiurile θ_1 , θ_2 și θ_3 .

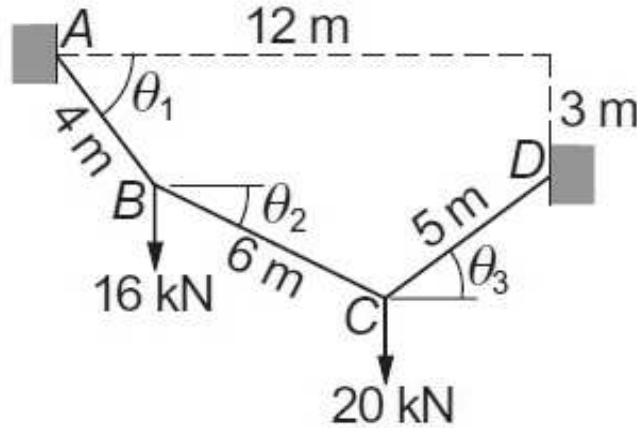


Figura 5.6: Problema 5.67

Problema 5.68. (a) Fie funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 1 + z^2 + e^z$. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $f(z) = 0$, alegând ca valoare de pornire $z_0 = -1 + 4i$.

(b) Găsiți primele patru zerouri ale funcției f ordonate crescător după modulele valorilor complexe. Cum știți că acestea sunt într-adevăr primele patru zerouri și că nu ați omis niciunul?

(c) Să se rezolve sistemul

$$f_1(x, y) = 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y = 0$$

$$f_2(x, y) = 2xy + e^x \sin y = 0$$

Utilizați valorile de pornire $x_0 = -1$ și $y_0 = 4$. Este această problemă legată de problema de la punctul (a) și au ele aceeași comportare numerică? Explicați. (Indicație: $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$)

Problema 5.69. Determinați un zero al funcției

$$f(x) = x^3 - \sinh x + 4x^2 + 6x + 9.$$

Problema 5.70 (TP). Se consideră iterația

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

pentru rezolvarea ecuației $f(x) = 0$. Explicați legătura cu iterația Newton și arătați că (x_k) converge pătratic dacă x_0 este suficient de apropiată de soluție. Aplicați această metodă pentru $f(x) = e^x - x - 2$ și verificați convergența pătratică pentru $x_0 = 1$. Experimentați și pentru $x_0 = 10$ și $x_0 = -10$ și explicați comportarea.

Problema 5.71 (TP). Să se aplice metoda lui Newton ecuației $\sin x = 0$ pe $[0, \frac{\pi}{2}]$, dacă x_0 este soluția nenulă a ecuației $\operatorname{tg} x = 2x$. Ce ar trebui să se întâmple și ce se întâmplă în realitate?

Problema 5.72 (TP). (a) Deduceți o metodă de rezolvare numerică a ecuației $f(x) = 0$, bazată pe interpolarea Lagrange inversă de ordinul II. (Indicație: Fie g inversa lui f . $f(\alpha) = 0 \implies \alpha = g(0)$, și se aproximează $g(0)$ prin polinomul de interpolare Lagrange de grad II, $(L_2g)(0)$, de preferat în forma Newton.

(b) Implementați algoritmul Van Wijngaarden-Dekker-Brent în MATLAB. Ce legătură este cu problema de la punctul (a)?

(c) Rezolvați ecuațiile $\sin \pi x = 0$ și $J_0(x) = 0$, unde J_0 este funcția Bessel de speța I și ordinul 0 (`besselj(0, x)` în MATLAB) pe intervalul $[0, \pi]$ utilizând metoda lui Newton și metoda de la (a). Ce se observă?

Problema 5.73 (TP). Se consideră problema cu valori pe frontieră

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (5.2.1)$$

Ea poate fi discretizată notând $u_k = y(x_k)$ și înlocuind derivata întâi și a doua cu formulele din problema 4.44 relative la o grilă de puncte echidistante $x_k = a + \frac{k}{n+1}h$, $k = 0, 1, \dots, n, n+1$, $h = \frac{b-a}{n+1}$. Se ajunge la un sistem neliniar în necunoscutele u_k , $k = 1, \dots, n$. Concepeți o metodă de rezolvare aproximativă a problemei (5.2.1) bazată pe metoda lui Newton. Aplicație: implementați metoda în MATLAB și rezolvați problema

$$y'' = yy', \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

pentru $n = 10, 50, 100$ și precizia $0.5e - 6$. Cum verificați corectitudinea programului?

Problema 5.74 (TP). Se consideră problema bilocală

$$\begin{aligned} y'' + \sin y &= 0, & x &\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(0) &= 0, & y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1. \end{aligned}$$

care descrie mișcarea unghiulară a unui pendul.

(a) Aproximând derivatele prin diferențe centrate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

și considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, n, n+1$, să se dea un algoritm de rezolvare a problemei bilocale de mai sus prin metoda aproximațiilor succesive. (Indicație: utilizați faptul că o matrice simetrică tridiagonală A de dimensiune $n \times n$ cu -2 pe diagonală principală și -1 pe diagonalele adiacente are o inversă ce satisface $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq (n+1)^2/8$.)

(b) Implementați algoritmul de la (a) în MATLAB.

Problema 5.75 (TP). Se consideră problema bilocală

$$\begin{aligned} y'' + \sin y &= 0, & x &\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(0) &= 0, & y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1. \end{aligned}$$

care descrie mișcarea unghiulară a unui pendul.

(a) Aproximând derivatele prin diferențe centrate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

și considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, n, n+1$, să se dea un algoritm de rezolvare a problemei bilocale de mai sus prin metoda lui Newton.

(b) Implementați algoritmul de la (a) în MATLAB.

Problema 5.76 (TP). Pentru $n \geq 2$ întreg, considerăm ecuația

$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

(a) Scrieți ecuația sub forma unei ecuații polinomiale echivalente $p_n(x) = 0$.

(b) Utilizați regula lui Descartes (aplicată lui $p_n(x) = 0$) pentru a arăta că există exact două rădăcini pozitive, una în $(0, 1)$, alta în $(1, 1)$. Ce legătură este între ele? Se notează cea mai mare rădăcină cu α_n ($n > 1$). Se știe că (*nu trebuie să demonstrați aceasta*)

$$1 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < 3, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

(c) Scrieți și executați un program care aplică metoda lui Newton (ecuației $p_n(x) = 0$) pentru a calcula α_n , $n = 2, 3, \dots, 20$, cu șase zecimale exacte, utilizând valoarea inițială 3 pentru α_2 și valoarea inițială α_n pentru α_{n+1} ($n \geq 2$). (Justificați aceste alegeri.) Pentru fiecare n , determinați numărul de iterații necesare.

Problema 5.77 (TP). Se consideră ecuația

$$x = e^{-x}.$$

- (a) Implementați iterația cu punct fix $x_n = e^{-x_n}$, pornind cu $x_0 = 1$ și oprind după primul n pentru care x_{n+1} coincide cu x_n în limita preciziei mașinii. Listați această valoare a lui n și x_{n+1} corespunzător.
- (b) Dacă ecuația este înmulțită cu ω ($\neq 0$ și $\neq 1$) și x este adăugat la ambii membri, se obține ecuația echivalentă

$$x = \frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega}.$$

Ce condiții trebuie puse asupra lui ω pentru ca iterația cu punct fix pentru această ecuație să convergă mai rapid decât iterația de la (a)? În această condiție apare și rădăcina α a ecuației

- (c) Care este valoarea optimă a lui ω ? Verificați pe calculator într-o manieră analogă cu cea de la (a).

Problema 5.78 (TP). (a) Metoda lui Newton se poate aplica și pentru funcții complexe utilizând valori de pornire complexe și aritmetică complexă. De asemenea, se poate aplica și ecuației $f(z) = g(x, y) + ih(x, y)$, unde $f(z)$ este o funcție analitică în variabila complexă $z = x + iy$ (x și y reale) și $g(x, y)$ și $h(x, y)$ sunt funcții reale de variabilele x și y . Derivata $f'(z)$ este dată de $f'(z) = g_x + ih_x = h_y - ig_y$, datorită condițiilor Cauchy-Riemann $g_x = h_y$ și $h_x = -g_y$. Semnificația notațiilor este $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$, $g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$, $h_x = \frac{\partial h}{\partial x}$, $h_y = \frac{\partial h}{\partial y}$. Arătați că metoda lui Newton

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

se poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{gh_y - hg_y}{g_x h_y - g_y h_x}, \quad y_{n+1} = y_n - \frac{hg_x - gh_x}{g_x h_y - g_y h_x}.$$

Toate funcțiile se evaluează în $z_n = x_n + iy_n$.

- (b) Determinați rădăcinile complexe ale ecuațiilor

$$\begin{aligned} z^3 - z - 1 &= 0, & z^4 - 2z^3 - 2iz^2 + 4iz &= 0, \\ 2z^3 - 6(1+i) - 6(1-i) &= 0, & z &= e^z, \end{aligned}$$

aplicând direct metoda lui Newton și folosind punctul (a).

Problema 5.79 (TP). (1) Stabiliți următoarea formulă pentru aproximarea lui $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{k^2 f(x+h) - h^2 f(x+k) + (h^2 - k^2)f(x)}{(k-h)kh},$$

- (a) utilizând formula lui Taylor pentru $f(x+h)$ și $f(x+k)$;
- (b) utilizând interpolarea Lagrange cu nodurile x , $x+h$, $x+k$ și derivând rezultatul.

- (2) Programați și testați o rafinare a metodei secantei ce utilizează aproximarea lui $f'(x)$ dată la punctul (1). Adică, utilizați această aproximație a lui $f'(x)$ în metoda lui Newton. Sunt necesare trei puncte de pornire: două pot fi arbitrare, iar al treilea se poate obține prin metoda secantei.

Aplicație pentru funcția $f(x) = x^3 - 12x^2 + 3x + 1$.

Problema 5.80 (TP). Presupunem că (1) ξ este un punct fix al funcției g , (2) g este de două ori continuu derivabilă într-o vecinătate a lui ξ , și (3) $g'(\xi) \neq 1$. Considerăm metoda iterativă definită prin:

$$z_{i+1} = g(g(z_i)) - \frac{[g(g(z_i)) - g(z_i)]^2}{g(g(z_i)) - 2g(z_i) + z_i}.$$

- (a) Dezvoltând $g(z_i)$ și $g(g(z_i))$ cu formula lui Taylor în jurul lui ξ , arătați că
- (a1) ξ este limita lui (z_n) .
 - (a2) Convergența este pătratică.
- (b) Implementați această metodă în MATLAB.
- (c) Utilizați funcția MATLAB de la punctul precedent pentru a găsi o rădăcină reală a ecuației $x^3 - x - 1 = 0$.

Problema 5.81. Să considerăm sistemul, inspirat dintr-un exemplu din industria chimică

$$f_i := \beta a_i^2 + a_i - a_{i-1} = 0.$$

Sistemul are n ecuații și $n + 2$ necunoscute. Vom lua $a_0 = 5$, $a_n = 0.5$ mol/litru. Să se rezolve sistemul pentru $n = 10$ și valoarea de pornire $\mathbf{x} = [1 : -0.1 : 0.1]'$.

Bibliografie

- [1] O. Agradini, *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.
- [2] ———, *Positive Approximation Processes*, Hiperboreea Press, Turda, 2001.
- [3] Octavian Agradini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, and Radu Trîmbițaș, *Analiză numerică și teoria aproximării*, vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002, D. D. Stancu, Gh. Coman, (coord.).
- [4] P. Albrecht, *The Runge-Kutta theory in a nutshell*, SIAM J. Numer. Anal **33** (1996), 1712–1735.
- [5] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and Sorensen D., *LAPACK Users' Guide*, third ed., SIAM, Philadelphia, 1999, <http://www.netlib.org/lapack>.
- [6] K. E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1989.
- [7] Kendall Atkinson and Weimin Han, *Theoretical numerical analysis : a functional analysis framework*, Texts in applied mathematics, Springer, New York, Berlin, Paris, etc., 2001.
- [8] Kendall E. Atkinson and Weimin Han, *Elementary numerical analysis*, third ed., Wiley, New York, NY, USA, 2004.
- [9] S Axler, *Down with determinants*, Amer. Math. Monthly 102 **102** (1995), 139–154.
- [10] N. Bakhvalov, *Methodes numeriques*, Mir, Moscou, 1976.

- [11] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, PA, 1994, disponibilă prin [www, http://www.netlib.org/templates](http://www.netlib.org/templates).
- [12] Șt. Berți, *Aritmetica intervalelor*, Editura Academiei, București, 1977.
- [13] I. S. Berezin and N. P. Jidkov, *Metodî vîcislenij*, vol. 1, Mir, 1966.
- [14] Å. Björk, *Numerical Methods for Least Squares Problem*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [15] P. Blaga, Gh. Coman, et al., *Analiză numerică, Îndrumător de lucrări de laborator*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1995.
- [16] E. Blum, *Numerical Computing: Theory and Practice*, Addison-Wesley, 1972.
- [17] P. Bogacki and L. F. Shampine, *A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas*, Appl. Math. Lett. **2** (1989), no. 4, 321–325.
- [18] F. Boian, F. Chisăliță, and Gh. Coman, *Îndrumător pentru lucrări de laborator*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1982.
- [19] F. Bornemann, D. Laurie, S. Wagon, and J. Waldvogel, *The SIAM 100-Digit Challenge: A Study in High-Accuracy Numerical Computing*, SIAM, 2004.
- [20] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*, SIAM Review **26** (1984), 351–366.
- [21] ———, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Wiley, New York, 1987.
- [22] S. C. Brenner and L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
- [23] R. P. Brent, *Fast multiple precision evaluation of elementary functions*, JACM **23** (1976), 242–251.
- [24] W. Briggs, *A Multigrid Tutorial*, Lancaster Press, Lancaster, 1988.
- [25] C. G. Broyden, *A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations*, Math. Comp. **19** (1965), 577–593.
- [26] C. M. Bucur, *Metode numerice*, Ed. Facla, Timișoara, 1973.
- [27] L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, PWS Kent, Boston, 1986.
- [28] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*, Wiley-Interscience Publ., Wiley, Chichester, 1987.
- [29] F. Chatelin, *Valeurs propres de matrices*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1988.

- [30] W. Cheney and D. Kinkaid, *Numerical Mathematics and Computing*, sixth ed., Thomson Brooks/Cole, Belmont, CA, 2008.
- [31] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1990.
- [32] P. G. Ciarlet and G. L. Lions (Eds), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. II, North Holland, Amsterdam, 1991, Finite Element Methods (Part 1).
- [33] P. G. Ciarlet and C. Wagschal, *Multipoint Taylor formulas and applications to the finite element methods*, Numer. Math **17** (1971), 84–100.
- [34] Gh. Coman, *Some practical approximation methods for nonlinear equations*, L'Analyse numérique et la théorie de l'approximation **11** (1982), 41–48.
- [35] ———, *Analiză numerică*, Ed. Libris, Cluj-Napoca, 1994.
- [36] Gh. Coman, G. Pavel, I. Rus, and I. A. Rus, *Introducere în teoria ecuațiilor operatoriale*, Ed. Dacia, 1976.
- [37] Gheorghe Coman, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.
- [38] D. Coppersmith and Winograd S., *Matrix multiplication via arithmetic progressions*, J. Symbolic Comput. **9** (1990), 251–280.
- [39] C. Cormen, T. Leiserson, and R. Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1994.
- [40] M. Crouzeix and A. L. Mignot, *Analyse numerique des équations différentielles*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1989.
- [41] I. Cuculescu, *Analiză numerică*, Editura Tehnică, București, 1967.
- [42] Trif D., *Metode numerice pentru ecuații diferențiale și sisteme dinamice*, Transilvania Press, Cluj, 1997.
- [43] G. Dahlquist, *Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations*, Math. Scand. **4** (1956), 33–53.
- [44] ———, *A special stability problem for the linear multistep methods*, BIT **3** (1956), 27–43.
- [45] ———, *Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations*, Ph.D. thesis, Kungl. Tekn. Högsk. Handl., Stockholm, 1959, no. 130.
- [46] ———, *33 years of numerical instability*, BIT **25** (1985), 188–204.
- [47] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Numerical Integration*, Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1967.
- [48] James Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

- [49] J. E. Dennis and J. J. Moré, *Quasi-Newton Metods, Motivation and Theory*, SIAM Review **19** (1977), 46–89.
- [50] J. Dormand, *Numerical Methods for Differential Equations. A Computational Approach*, CRC Press, Boca Raton New York, 1996.
- [51] D. Dubois, A. Greebaum, and G. Rodrigue, *Approximating the inverse of a matrix for use in iterative algorithms on vector processors*, Computing **22** (1979), 257–268.
- [52] Gerald Farin, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: a Practical Guide*, fourth ed., Academic Press, 1996.
- [53] E. Fehlberg, *Klassische Runge-Kutta-Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle*, Computing **4** (1969), 93–106, Corrigendum: *ibid.* 5, 184.
- [54] ———, *Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedriger Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme*, Computing **6** (1970), 61–71, Corrigendum: *ibid.* 5, 184.
- [55] G. E. Forsythe and C. B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.
- [56] J. G. F. Francis, *The QR transformation: A unitary analogue to the LR transformation*, Computer J. **4** (1961), 256–272, 332–345, parts I and II.
- [57] W. Gander and W. Gautschi, *Adaptive quadrature - revisited*, BIT **40** (2000), 84–101.
- [58] W. Gautschi, *On the condition of algebraic equations*, Numer. Math. **21** (1973), 405–424.
- [59] ———, *Numerical Analysis, An Introduction*, second ed., Birkhäuser, Basel, 2012.
- [60] W. Gautschi and J. Waldvogel, *Solving problems in scientific computing using Maple and MATLAB*, 3rd ed., ch. Contour plot of analytic functions, pp. 359–372, Springer Verlag, Berlin, 1997, W. Gander and J. Hřebíček, eds.
- [61] Walther Gautschi, *Orthogonal polynomials: applications and computation*, Acta Numerica **5** (1996), 45–119.
- [62] J. Gilbert, C. Moler, and R. Schreiber, *Sparse matrices in MATLAB: Design and implementation.*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **13** (1992), no. 1, 333–356, disponibil în kit-ul MATLAB.
- [63] D. Goldberg, *What every computer scientist should know about floating-point arithmetic*, Computing Surveys **23** (1991), no. 1, 5–48.
- [64] H. H. Goldstine and J. von Neumann, *Numerical inverting of matrices of high order*, Amer. Math. Soc. Bull. **53** (1947), 1021–1099.
- [65] G. Golub and W. Kahan, *Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **2** (1965), 205–224.

- [66] Gene H. Golub and Charles van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [67] Jens Gravesen, *Differential Geometry and Design of Shape and Motion*, Technical University of Denmark, Lingby, Denmark, 2002.
- [68] Anne Greenbaum and Timothy P. Chartier, *Numerical Methods: Design, Analysis, and Computer Implementation of Algorithms*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 08540 USA, 2012.
- [69] P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer Verlag, New York, 1958.
- [70] R. L. Hardy, *Multiquadric equations of topography and and other irregular surfaces*, Journal Geophysical Research **76** (1971), 1905–1915.
- [71] M. R. Hestenes and E. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Res. Nat. Bur. Stand. **49** (1952), 409–436.
- [72] D. J. Higham and N. J. Higham, *MATLAB Guide*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [73] N. J. Higham and F. Tisseur, *A Block Algorithm for Matrix 1-Norm Estimation, with an Application to 1-Norm Pseudospectra*, SIAM Journal Matrix Anal. Appl. **21** (2000), no. 4, 1185–1201.
- [74] Nicholas J. Higham, *The Test Matrix Toolbox for MATLAB*, Tech. report, Manchester Centre for Computational Mathematics, 1995, disponibil via WWW la adresa <http://www.ma.man.ac.uk/MCCM/MCCM.html>.
- [75] Nicholas J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [76] A. S. Householder, *Unitary triangularization of nonsymmetric matrix*, J.A.C.M. **5** (1958), 339–342.
- [77] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, 2nd ed., Dover, Mineola, New York, 1966.
- [78] D. Kincaid and W. Cheney, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, CA, 1991.
- [79] Jaan Kiusalaas, *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010.
- [80] V. V. Klyuev and N. I. Kokovkin-Shcherbak, *On the minimization of the number of arithmetic operations for the solution of linear algebraic systems of equations*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz **5** (1965), 21–33.
- [81] Mirela Kohr, *Capitole speciale de mecanică*, Presa Univ. Clujeană, 2005.
- [82] V. N. Kublanovskaya, *On some algorithms for the solution of the complete eigenvalue problem*, USSR Comp. Math. Phys. **3** (1961), 637–657.

- [83] Shampine L., *Variable order Adams code*, Tech. Report TR-01-01, University of Western Ontario – The Ontario Research Centre for Computer Algebra, Canada, 2001.
- [84] P. Marchand and O. T. Holland, *Graphics and GUIs with MATLAB*, third ed., CHAPMAN & HALL/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2003.
- [85] Gh. Marinescu, *Analiză numerică*, Editura Academiei, București, 1974.
- [86] The Mathworks Inc., Natick, Ma, *Using MATLAB*, 2002.
- [87] The Mathworks Inc., Natick, Ma, *MATLAB. Getting Started*, 2004, Version 7.
- [88] The Mathworks Inc., Natick, Ma, *MATLAB. Symbolic Math Toolbox*, 2004, Version 7.
- [89] The Mathworks Inc., Natick, Ma, *MATLAB. The Language of Technical Computing. Mathematics*, 2004, Version 7.
- [90] The Mathworks Inc., Natick, Ma, *MATLAB. The Language of Technical Computing. Programming*, 2004, Version 7.
- [91] The Mathworks Inc., Natick, Ma, *Using MATLAB Graphics*, 2004, Version 7.
- [92] J. Meijerink and H. A. Van der Vorst, *An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix*, Math. Comp. **31** (1977), 148–162.
- [93] Gh. Micula, *Funcții spline și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1978.
- [94] Gh. Micula and S. Micula, *Handbook of Splines*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1999.
- [95] M. Mihoc and I. Mihoc, *Matematici aplicate în economie. Algebră liniară*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.
- [96] C. Moler and D. Morison, *Replacing Square Roots by Pythagorean Sums*, IBM J. Res. Develop **27** (1983), no. 6, 577–581.
- [97] Cleve Moler, *Numerical Computing in MATLAB*, SIAM, 2004, disponibil via www la adresa <http://www.mathworks.com/moler>.
- [98] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.
- [99] J. J. Moré and M. Y. Cosnard, *Numerical Solutions of Nonlinear Equations*, ACM Trans. Math. Softw. **5** (1979), 64–85.
- [100] Shoichiro Nakamura, *Numerical Computing and Graphic Vizualization in MATLAB*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [101] K. C. Ng, *Argument Reduction for Huge Arguments: Good to the Last Bit*, SunPro (1992), 1–9.
- [102] J. T. Oden, G. F. Carey, and E. B. Becker, *Finite elements*, Prentice Hall, 1981.

- [103] Victor Pan, *How to Multiply Matrices Faster*, Lecture Notes in Comp. Sci., vol. 179, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [104] Dana Petcu, *Matematică asistată de calculator*, Eubeea, Timișoara, 2000.
- [105] M. T. D. Powell, *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, 1981.
- [106] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibilă prin [www](http://www.nr.com/), <http://www.nr.com/>.
- [107] I. Păvăloiu, *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Ed. Dacia, 1981.
- [108] J. J. Rissler, *Méthodes mathématiques pour la CAO*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Bonn, 1991.
- [109] I. A. Rus, *Ecuații diferențiale, ecuații integrale și sisteme dinamice*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1996.
- [110] I. A. Rus and P. Pavel, *Ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982, ediția a doua.
- [111] H. Rutishauser, *Solution of the eigenvalue problems with the LR transformation*, Nat. Bur. Stand. App. Math. Ser. **49** (1958), 47–81.
- [112] Y. Saad, *SPARSKIT: a basic toolkit for matrix computation*, Technical Report RIACS-90-20, Institute for Advanced Computer Science, NASA Ames Research Center, Moffet Field, CA, 1990, Version 2.0.
- [113] ———, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Manchester Univ. Press, Manchester, 1992, disponibilă via [www](http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html) la adresa <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html>.
- [114] ———, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing, Boston, 1996, disponibilă via [www](http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html) la adresa <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html>.
- [115] Y. Saad and M. Schultz, *GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Sci. Sta. Comput. **7** (1986), 856–869.
- [116] E. Salamin, *Computation of π using arithmetic-geometric mean*, Mathematics of Computation **30** (1976), 565–570.
- [117] A. Sard, *Linear Approximation*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1963.
- [118] Thomas Sauer, *Numerische Mathematik I*, Universität Erlangen-Nurnberg, Erlangen, 2000, Vorlesungskript.

- [119] ———, *Numerische Mathematik II*, Universität Erlangen-Nurnberg, Erlangen, 2000, Vorlesungskript.
- [120] R. Schwarz, H., *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [121] L. F. Shampine, R. C. Allen, and S. Pruess, *Fundamentals of Numerical Computing*, John Wiley & Sons, Inc, 1997.
- [122] L. F. Shampine, I. Gladwell, and S Thompson, *Solving ODEs with matlab*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2003.
- [123] L. F. Shampine and Reichelt R. W., *The MATLAB ODE suite*, SIAM J. Sci. Comput. **18** (1997), no. 1, 1–22.
- [124] D. D. Stancu, *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite și a unor aplicații ale acesteia*, Acad. R. P. Rom. Studii și Cercetări Matematice **8** (1957), 339–355, Filiala Cluj a Academiei.
- [125] D. D. Stancu, *Analiză numerică – Curs și culegere de probleme*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1977.
- [126] D. D. Stancu, G. Coman, and P. Blaga, *Analiză numerică și teoria aproximării*, vol. II, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002, D. D. Stancu, Gh. Coman, (coord.).
- [127] D. D. Stancu, Gh. Coman, O. Agratini, and R. Trîmbițaș, *Analiză numerică și Teoria aproximării*, vol. I, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001, D. D. Stancu, Gh. Coman, (coord.).
- [128] J. Stoer and R. Burlisch, *Einführung in die Numerische Mathematik*, vol. II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [129] J. Stoer and R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.
- [130] Volker Strassen, *Gaussian elimination is not optimal*, Numer. Math. **13** (1969), 354–356.
- [131] A. H. Stroud, *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [132] J. F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1964.
- [133] J. F. Traub and H. Wozniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Acad. Press, 1980.
- [134] L. N. Trefethen, *Maxims About Numerical Mathematics, Computers, Science and Life*, SIAM News **31** (1998), no. 1, 1.
- [135] ———, *A hundred-dollar, hundred-digit challenge*, SIAM News **35** (2002), no. 1, 1.

- [136] Lloyd N. Trefethen, *The Definition of Numerical Analysis*, SIAM News ? (1992), no. 3, 1–5.
- [137] Lloyd N. Trefethen and David Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [138] R. T. Trîmbițaș, *Analiză numerică. O introducere bazată pe MATLAB*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, Romania, 2005.
- [139] ———, *Numerical Analysis in MATLAB*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, Romania, 2009.
- [140] E. E. Tyrtyshnikov, *A Brief Introduction to Numerical Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
- [141] C. Überhuber, *Computer-Numerik*, vol. 1, 2, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1995.
- [142] C. Ueberhuber, *Numerical Computation. Methods, Software and Analysis*, vol. I, II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [143] J. H. Wilkinson, *Error analysis of direct methods of matrix inversion*, J.A.C.M **8** (1961), 281–330.
- [144] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [145] J. H. Wilkinson, *The perfidious polynomial*, Studies in numerical analysis (Gene H. Golub, ed.), MAA Stud. Math., vol. 24, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1984, pp. 1–28.
- [146] S. J. Wright, *A collection of problems for which gaussian elimination with partial pivoting is unstable*, SIAM J. Sci. Comput. **14** (1993), 231–238.
- [147] M. Zlámal, *On the finite element method*, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.