

IX. Integrale

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\sin^2 x} dx$

c) $\int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx$

d) $\int \frac{1}{x \sqrt{1+x+x^2}} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$

f) $\int \frac{dx}{x^5+x^3} \cdot x \int_0^2 \min(x, \frac{2}{1+x^2}) dx$

g) $\int_0^1 x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

h) $\int_0^1 x \cdot e^{2x+1} dx$

i) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$

j) $\int_{-1}^1 \ln \frac{|x|+1}{x^2+1} dx$

h) $\int_0^2 x \ln(1+x) dx$

l) $\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

m) $\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$, $a \in \mathbb{R}$.

n) $\int (2x+e^x) dx$

o) $\int \frac{x^2}{x^2+4} dx$

v) $\int \frac{\sin t}{1+\sin t} dt$

p) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

r) $\int x \ln x dx$

s) $\int_{-1}^3 \frac{|2-x|}{1+|x|} dx$

t) $\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

2. a) Să se calculeze $\int_0^1 x^2 e^x dx$

b) Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul lui $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n e^x dx$

3. Fie $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$. Să se arate că f este bijectivă

4. Fie integrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}$

a) Calculați: I_0, I_1, I_2 .

b) Stabiliți o relație de recurență între I_n și I_{n-2} .

c) Calculați I_{2m+1} , $m \in \mathbb{N}$.

5. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între parabola de ecuație $y^2 = 4x$ și dreapta de ecuație $y = 2x$.

6. Fie $f: [e, e^3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4} x^2 - \ln \sqrt{x}$. Să se calculeze lungimea graficului lui f .

7. Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine o relație de recurență între

I_{n+1} și I_n , și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

8. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ cu grad $P = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x P(t) \cdot e^{-t} dt = P(0) + P'(0) + \dots + P^{(n)}(0).$$

9. Stabiliți o relație de recurență pentru $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n x^n}{x e} dx$.