VIII. Matrice. Determinanți. Sisteme liniare de ecuații

Probleme propuse

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați $(I_3+A)^2$.

2. Rezolvați ecuația matriceală $3X+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Fie ε o rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}$.

4. Determinați rangul matricei $\begin{bmatrix} 2 & \alpha & -5 \\ \beta & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

5. Să se calculeze determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ știind că x_1, x_2, x_3

sunt rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x+17=0$.

6. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=b \\ x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=c \end{cases}$ unde $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ și $a^2+b^2+c^2\neq 0$. $a,b,c\in\mathbb{R}$.

7. Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ este inversabilă. Aflați

A^{-1} pt. $\alpha=0$

8. Rezolvați sistemele de ecuații

a) $\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha^2 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ b) $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \\ 3x-y=\alpha \\ 2x+y=\beta \end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ c) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=2-a \\ x+y+az=3a+1 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x-my+z=2m \\ x-2y+z=-1 \\ mx+m^2y-2z=2 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ e) $\begin{cases} 2x-y+az=0 \\ x+2y-z=0 \\ 3x+4y+(a+2)z=0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ f) $\begin{cases} 2x-2y-1=0 \\ 2x+\alpha y+2=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

9. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$. a) Arătați că A este inversabilă. b) Aflați A^2 și A^3. c) Aflați $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^3=xA^2+yA+I_3$.

10. Aflați $m\in\mathbb{R}$. a.î. $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ să fie inversabilă $\forall x\in\mathbb{R}$.

11. Să se rezolve ecuațiile: a) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}=0$, $a\in\mathbb{R}$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$