

VI. Limite de funcții, Funcții continue

VII. Funcții derivabile

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{|x-1|}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m + 1}{x^n + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 5x + 3} \right)^x$ g) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \log_2 \frac{x}{x-1}$

2. Să se afle $a \in \mathbb{R}$ a.i. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} a \ln(3-x), & x \leq 1 \\ \frac{2^x - 2}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{să aibă limita în } x=1.$$

3. Să se studieze continuitatea în $x=1$ pentru:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 0, & 1 - \frac{1}{10^5} < x < 1 + \frac{1}{10^5} \\ 3, & \text{în rest} \end{cases}$

4. Calculați derivatele funcțiilor:

a) $f(x) = \sin(2x+5)$ b) $f(x) = \sin^3 x + \cos^6 x$ c) $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$
 d) $f(x) = \sin(\cos x)$ e) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ f) $f(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\right)^2$

5. Să se determine punctele critice ale funcțiilor:

a) $f(x) = \ln(x^2+2)(x^2+3)$; b) $f(x) = \sin^{50}(2x)$ c) $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$ d) $f(x) = \frac{x^3}{|x|+1}$

6. Să se determine intervalele de monotonie pentru funcțiile:

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ c) $f(x) = x\sqrt{\frac{2+x}{x}}$ d) $f(x) = x^3 \ln x$
 e) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ f) $f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot e^x$ g) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ h) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

7. Să se afle extremele locale pentru funcțiile de mai jos pe domeniul de definiție

a) $f(x) = x^4 - 10x^2$ b) $f(x) = x - \arcsin x$ c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ d) $f(x) = 2x + \cos x$

8. Calculați: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sin(x-2)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

9. Determinați intervalele de convexitate și concavitate pentru:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ b) $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ e) $f(x) = x^2 \ln x$

10. Determinați punctele de inflexiune pentru:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$ b) $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ c) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ d) $f(x) = x^3 - 3x^2$

11. Arătați că $\forall x > 0$ are loc $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x)$.

12. Aflați $a \in \mathbb{R}$ a.i. $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ să aibă un punct de extrem pt. $x = -2$.

13. Aflați derivata de ordin n pentru: a) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$.

14. Fie $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$. a) Aflați intervalele de monotonie
 b) Arătați că $e^x > 1 + \ln(1+x)$, $\forall x > -1$.