IV. Polinoame

Probleme propuse

1. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + (m+1)X^2 + 2X + m$. Să se afle m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geq 2x_1x_2x_3 + 5$

2. Fie ecuația $x^4 + (2a+1)\cdot x^3 + 2(a+1)^2 x^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Să se arate că ecuația admite cel mult două rădăcini reale.

3. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 91X^2 - 30X - 50$ dacă $3+i$ și $1-\sqrt{2}$ sunt rădăcini.

4. Se consideră polinomul $P_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$ care admite pe 0 ca rădăcină și satisface relația $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$. Să se arate că:
   i) $P_n(X)$ divizibil cu $X^2 - X$
   ii) $P_n(k) = 1^n + 2^n + \dots + (k-1)^n$

5. Să se determine a și b astfel încât polinomul $P(x) = (x+1)^n + ax + b$ să fie divizibil prin $x^2 + 1$.

6. Se dă polinomul $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + 2$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   1) Să se afle a și b astfel încât suma a două rădăcini să fie -2, iar celelalte două rădăcini să fie egale între ele. Să se rezolve $P(x) = 0$.
   2) Dacă x_1 este rădacina dublă să se determine polinomul $S(X) = \dfrac{P(X)}{X - X_1}$.
   3. Să se determine un polinom $Q(x)$ de gradul doi pentru care:
   $$Q(x_1) = x_1, \quad Q(x_4) = x_3, \quad Q(x_3) = x_4.$$

7. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^4 - 2ax^2 + b^2$ să admită rădăcini în progresie aritmetică.

8. Se dă polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + X + b$. a) Să se arate că ecuația $P(x) = 0$ nu admite concomitent rădăcinile 1 și -1 pentru nici o valoare a lui a și b. b). Să se determine a și b astfel încât $Q(X) = X^2 + X + 1$ să-l dividă pe $P(X)$. c) Cu valoarea lui a determinată la punctul b) se consideră ecuația $P(X) = 0$. Aflați b astfel încât:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq 5.$$

9. a) Să se determine numerele raționale m și n dacă polinomul $X^3 + X^2 + mX + n$ este divizibil cu $X^2 - 2$.
   b) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$; Să se arate că polinomul f are rădăcina $\sqrt{2}$ dacă și numai dacă f este divizibil cu $X^2 - 2$.

10. Să se afle n astfel încât $f = X^n + X^{24} + X^{18} + X^{12} + X^6$ să se dividă cu $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.